N. TEODORESCU

METODE VECTORIALE IN FIZICA MATEMATICĂ

I

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Prof. N. TEODORESCU

METODE VECTORIALE IN FIZICA MATEMATICĂ

I

ALGEBRA VECTORIALĂ ŞI INTRODUCERE IN ALGEBRA TENSORIALĂ

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Cu toată structura sa teoretică nouă, datorită concepției Calculului vectorial ca teorie de mărimi fizice, reprezentabile geometric, această lucrare urmărește permanent un scop aplicativ: prezentarea metodei vectoriale în diverse domenii ale Fizicei matematice și ale aplicațiilor sale tehnice. Pentru aceasta, ținând seama de stadiul actual de desvoltare a Fizicei și Tehnicei, am socotit indispensabil pentru cititor să cunoască dela început semnificația geometrico-fizică exactă a noțiunilor și operațiilor introduse, pornind dela fenomenele fizice fundamentale, a căror descriere matematică a condus la Calculul vectorial. Efortul făcut pentru a înțelege fundamentele teoretice expuse în capitolul introductiv îi va da posibilitatea de a urmări cu ușurință, în mod natural, această semnificație și de a și-o însuși în toate desvoltările teoretice următoare, ca și în aplicațiile spre care va fi condus.

Lucrarea de față se adresează în același timp studenților ingineri, fizicieni și matematicieni, precum și cercetătorilor în domeniile Fizicei matematice și Tehnicei. Ea desvoltă liniile directoare ale unor părți din cursurile de Matematici speciale și aplicate predate de mine în anii 1948—1952 la Institutul Politehnic și Institutul de Construcții din București, folosind ideile de bază asupra mărimilor și obiectelor geometrice expuse în cursurile de Ecuațiile Fizicei matematice predate la Universitatea C. I. Parhon în același interval de timp. Experiența făcută în aceste cursuri m'a determinat să dau pe baza acestor idei personale o prezentare sistematică a Metodelor vectoriale în Fizica matematică.

Prima parte întitulată „Calculul vectorial și Introducere în Calculul tensorial“ *este expusă în două volume: Algebra vectorială și Analiza vectorială, noțiunile de calcul tensorial fiind introduse treptat pe măsură ce se prezintă în desfășurarea teoriei. Totuși, acumularea lor devenind din ce în ce mai puternică, a necesitat o expunere deosebită, căreia îi este consacrat un capitol special ce stabilește trecerea dela Calculul vectorial la Calculul tensorial și modul în care ultimul ia naștere din primul.*

Etapele principale parcurse în constituirea Algebrei vectoriale ca teorie a vectorului și a operațiilor vectoriale sunt marcate în Volumul I prin subdiviziunea în patru capitole:

In capitolul I se expun Bazele Calculului vectorial. *La punctul A din acest capitol se tratează bazele teoriei geometrice a mărimilor fizice. La punctele B și C se stabilesc bazele fizice și geometrice ale Calculului vectorial.*

In capitolul II se tratează mărimile și operațiile Algebrei vectoriale. *La punctele A și B se prezintă aceste mărimi și operații succesiv în spațiul metric euclidian și în spațiul afin, La punctul B se prezintă aplicația teoriei geometrice a mărimilor fizice la simbolismul Algebrei vectoriale.*

Scanned with OKEN Scanner

In capitolul III se tratează măsura mărimilor spațiului metric euclidian, *deschizând perspectivele trecerii la Calculul tensorial. La punctul A se expune măsura mărimilor față de sistemele de referință carteziene ortogonale. La punctul B se reia problema măsurii într'o bază oarecare de vectori, punând în evidență caracterele contravariante și covariante ale mărimilor spațiului euclidian și conducând direct la necesitatea evidențierii caracterului tensorial al mărimilor Calculului vectorial.*

Capitolul IV, consacrat stabilirii raporturilor dintre Calculul vectorial și Calculul tensorial, înfățișează mărimile tensoriale și compuse ale Calculului vectorial. *La punctul A, pregătit de precedentul, se prezintă introducerea metodelor tensoriale de recunoaștere a naturii mărimilor în spațiul afin, se studiază formele biliniare și pătratice de vectori, tensorul fundamental al metricei euclidiene și se ajunge la formulele de transformare caracteristice tensorilor uzuali de ordinul al doilea și al treilea și densităților și capacităților tensoriale din Calculul vectorial. La punctul B se expune teoria vectorilor alunecători, care în general lipsește din majoritatea lucrărilor de specialitate, fiind considerată ca un capitol al Staticei,* vectorul alunecător *deosebindu-se profund de vectorul liber. Prin încadrarea Calculului vectorial în Teoria geometrică a mărimilor fizice, natura vectorului alunecător este lămurită: vectorul alunecător este o formă particulară a unei mărimi compuse dintr'un vector liber și un bivector legat, numită torsor, constituind de fapt un prim exemplu de* câmp de mărimi.

Volumul II conține extensiunea noțiunilor fundamentale de limită și funcție în Analiza vectorială și se împarte în trei capitole (V, VI, VII).

In capitolul V se tratează Bazele Analizei vectoriale *în spațiul euclidian, extinzând apoi noțiunile introduse la spațiul afin, și atrăgând atenția asupra operatorilor diferențiali și asupra mărimilor tensoriale uzuale.*

In capitolul VI se expune Metoda vectorială în Geometria diferențială. *La punctul A se tratează teoria curbelor strâmbe cu diversele sale aplicații. La punctul B se tratează elementele teoriei suprafețelor, necesare aplicațiilor mecanice și fizice. Teoria va fi complectată în volumul al III-lea într'un cadru mai larg. La punctul C se introduc coordonatele curbilinii în spațiu, deasemenea în vederea aplicațiilor ulterioare la proprietățile locale ale câmpurilor de mărimi fizice.*

In capitolul VII se expune Metoda vectorială în Mecanica rațională. *Aici sunt prezentate rezultatele aplicării metodelor vectoriale la probleme de Mecanica punctului, a solidului și a sistemelor materiale discrete.*

Intinderea mare a acestor volume nu constitue un obstacol în înțelegerea și asimilarea noțiunilor și metodelor expuse. Ea se explică prin faptul că lucrarea se adresează mai multor categorii de cititori. Este însă recomandabil ca lectura sa să fie făcută în două etape, *corespunzând la două nivele diferite. In acest scop,* unele paragrafe au fost însemnate prin steluțe. *Intr'o primă lectură, cititorul va putea cuprinde: capitolul I A, B, C; capitolul II A; capitolul III A, B; capitolul V; capitolul VI A, omițând paragrafele însemnate și complectându-și facultativ cunoștințele prin parcurgerea capitolelor VI B, C și VII. A doua lectură va cuprinde capitolele II B și IV A, paragrafele însemnate prin steluțe în-diversele capitole destinate primei lecturi precum și capitolele VI B, C și VII. Capitolul IV B, având un caracter special, poate fi neglijat de o parte din cititori, iar capitolul VII nu capătă*

Scanned with OKEN Scanner

o semnificație satisfăcătoare decât pentru cititorii ce au cunoștințe de Mecanică. Materialul menționat pentru prima lectură acoperă programul obișnuit al cursurilor de Calcul vectorial și este complectat prin numeroase exerciții cu indicația soluției. El este destinat studenților și în primul rând studenților ingineri și fizicieni. A doua lectură urmărește cunoașterea aprofundată a teoriei vectorului și a mărimilor exprimate prin operațiile vectoriale și este accesibilă unui bun student ce posedă cunoștințele cursurilor Facultăților de Matematică și Fizică.

In redactarea acestor volume am fost ajutat de un colectiv de colaboratori compus din: Conf. I. Barbălat, Conf. L. Dobrescu-Purice, Conf. C. Ionescu Tulcea, Conf. I. Șabac și Asist. M. Mayer.

Unele aplicații, exercițiile, câteva complectări teoretice, indicele, un număr de observații critice, revizia preliminară a textului și a corecturilor au revenit acestui colectiv, căruia îi adresez cele mai călduroase mulțumiri, cu o mențiune specială pentru Conf. I. Barbălat, pentru contribuția sa la câteva puncte ale textului (demonstrațiile 2 și 3 ale dublului produs vectorial, unele aplicații, etc.) și pentru Asist. M. Mayer, pentru unele aplicații fizice ale vectorilor, precum și pentru întreaga sa colaborare în punerea la punct a textului dactilografiat.

A doua parte a lucrării va face obiectul unui al treilea volum și va trata Teoria câmpurilor de mărimi scalare și vectoriale în cadrul Teoriei geometrice a mărimilor fizice.

N. TEODORESCU

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Evoluţia Calculului vectorial

Strânsa conexiune între Matematică şi Fizică se manifestă atât prin folosirea pe o scară din ce în ce mai largă a instrumentelor şi metodelor matematice în teoriile fizice, cât şi prin continua alimentare a majorităţii domeniilor Matematicei prin probleme puse de Fizică, ce conduc la desvoltarea unor vaste teorii matematice.

Calculul vectorial este un exemplu extrem de important de instrument matematic cu puternice rădăcini fizice, a cărui desvoltare a avut loc în lumina problemelor fizice.

Operaţia fundamentală de compunere a forţelor, cunoscută de Stevin, care şi-a găsit reprezentarea geometrică în regula paralelogramului, a pus în evidenţă — sub o formă restrânsă — noţiunea de vector, prin care se puteau reuni caracterele esenţiale ale unui efort de tracţiune: direcţie, sens şi intensitate. Totuşi, Statica solidelor şi, în general, Mecanica n'au folosit decât foarte târziu vectorul şi operaţiile vectoriale. Se poate spune că bazele Calculului vectorial au fost puse de Hamilton şi Grassmann, care au urmărit introducerea unui calcul simbolic cu mărimi fizice.

Caracterul geometric al vectorului şi structura euclidiană a spaţiului, puse în evidenţă de fenomenele fizice clasice, au dat Calculului vectorial înfăţişarea unui *calcul cu mărimi geometrice în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni*. Inafară de vector se mai introduc în acest calcul şi scalarii ca mărimi determinate printr'un singur număr. Operaţiile de bază sunt adunarea şi amplificarea prin scalari, precum şi produsul scalar şi produsul vectorial. Prin aplicarea acestor operaţii, care au toate semnificaţii fizico-geometrice, se obţin scalari sau vectori, astfel încât un număr important de mărimi fizice clasice sunt reprezentabile prin scalari sau vectori, relaţiile dintre ele având un caracter vectorial.

Este însă necesar să facem observaţia că vectorii obţinuţi prin anumite operaţii, cum este produsul vectorial, precum şi scalarii obţinuţi prin anumite operaţii asupra vectorilor, cum este produsul mixt, *au particularitatea de a depinde de orientarea spaţiului*, determinată de alegerea unui sens pozitiv de înşurubare. *Există deci două feluri de scalari şi două feluri de vectori, după cum sunt independenţi sau dependenţi de orientarea spaţiului?*

Semnificaţia fizică a mărimilor reprezentate prin scalari şi vectori atrage în adevăr atenţia asupra unor deosebiri esenţiale între diverse mărimi scalare sau vectoriale. Astfel, atât volumul, cât şi temperatura sunt scalare, dar temperatura nu se schimbă odată cu orientarea spaţiului, pe când volumul orientat, care reprezintă o mărime fizică indispensabilă — fiindcă exprimă fluxul pozitiv

sau negativ printr'o suprafaţă — se schimbă. Deasemenea, atât forţa, cât şi cuplul de forţe sunt mărimi vectoriale, dar schimbarea orientării spaţiului nu modifică sensul forţei, pe când sensul cuplului este determinat de această orientare. Deaceea, Calculul vectorial împarte vectorii în *vectori polari*, corespunzând translaţiei şi *vectori axiali*, corespunzători rotaţiei.

Calculul simbolic cu vectori permite exprimarea relaţiilor între mărimile fizice independent de orice sistem de referinţă, spre deosebire de metoda carteziană, în care fiecărui punct îi corespund coordonatele prin care este determinat faţă de un anumit sistem de axe rectilinii. Totuşi, chiar în Calculul vectorial este necesar să se introducă un sistem de referinţă pentru măsura mărimilor, deoarece în aplicaţii acestea sunt determinate numeric.

Independenţa mărimilor fizice sau geometrice faţă de alegerea sistemului de referinţă se manifestă prin posibilitatea de trecere dela componentele măsurate într'un sistem la componentele măsurate în alt sistem prin relaţii ce nu depind decât de componentele vechi şi noi şi de mărimile ce definesc transformarea, iar legile de transformare sunt caracteristice pentru fiecare categorie de mărimi.

Criza Calculului vectorial

Folosirea acestei idei a însemnat o nouă etapă în desvoltarea Calculului vectorial şi a deschis calea spre un nou calcul cu mărimi geometrico-fizice: *Calculul tensorial*, în care mărimile nu mai sunt exprimate simbolic, ci sunt determinate prin componentele lor faţă de un sistem de referinţă. Acest sistem este apoi schimbat prin altul oarecare dintr'o anumită familie şi mărimile sunt caracterizate prin modul în care se transformă în aceste schimbări.

Ori, dacă în locul coordonatelor carteziene ortogonale, folosite cu preferinţă în toate problemele metrice din Geometria analitică şi apoi în aplicaţiile mecanice şi fizice, se introduc coordonate carteziene oblice, se constată că *modurile de transformare a celor două feluri de scalari, precum şi a celor două feluri de vectori, sunt diferite. Aceasta arată că în fapt este vorba de mărimi deosebite, care au fost reprezentate prin aceleaşi simboluri, iar criteriul măsurii în sisteme de referinţă diferite pune în evidenţă deosebirea de natură a acestor mărimi.*

Descoperirea acestei importante lacune a Calculului vectorial, în care *mărimi fizice deosebite sunt reprezentate prin acelaşi simbol*, precum şi rapida desvoltare a Calculului tensorial, care discerne cu precizie deosebirile de natură ale mărimilor şi are un câmp de aplicaţie mult mai larg, pune în discuţie utilitatea acestui calcul, a cărui extensiune la spaţii cu mai mult de trei dimensiuni este anevoioasă.

In lumina acestei critici, se vede că *în prezent Calculul vectorial traversează o perioadă de criză profundă.*

Totuşi, este indiscutabil că folosirea sa în numeroase domenii ale Geometriei analitice liniare şi patratice, ale Geometriei diferenţiale a curbelor şi suprafeţelor, în Mecanica sistemelor discrete şi a corpului solid, în teoria câmpurilor electromagnetice, etc., a adus servicii importante şi a condus la rezolvarea unor probleme fundamentale. Este suficient să se compare expunerea unui capitol de Mecanică sau de teoria curbelor strâmbe, prin metoda carteziană şi prin metoda vectorială pentru a descoperi calităţile Calculului vectorial.

Scanned with OKEN Scanner

Faptul că *acest calcul operează direct asupra mărimilor prin operații esențiale, care nu introduc elemente străine*, artificiale, ne dă posibilitatea de a urmări permanent desfășurarea raționamentelor și de a le controla prin rezultatele parțiale obținute.

Metodele vectoriale sunt din ce în ce mai răspândite în învățământul superior teoretic și tehnic, iar literatura științifică de specialitate conține un mare număr de manuale și tratate. Sub influența desvoltării Fizicei moderne, în unele dintre acestea se adâncește natura mărimilor obținute prin operațiile vectoriale, introducându-se capitole de Calcul tensorial. In acest scop, unii autori folosesc fie calculul simbolic cu diade, fie calculul cu mărimi extensive al lui Grassmann, iar alții introduc direct metode tensoriale folosind componentele. *Această ultimă extensiune a cadrului clasic al Calculului vectorial, care corespunde necesității fizicei și tehnicei actuale, este deci justificată și constitue un nou stadiu în desvoltarea acestui calcul.*

Urmând exemplul sovietic, programele recente ale învățământului superior tehnic din țara noastră conțin, pe lângă Algebra și Analiza vectorială cu aplicațiile lor geometrice și fizice, noțiuni de Calcul tensorial și matricial. Prin urmare, tratarea Calculului vectorial în conexiune cu Calculul tensorial este un punct de program al învățământului matematic în instituțiile noastre de învățământ superior.

Cu atât mai importantă apare atunci următoarea problemă: *Are Calculul vectorial în stadiul actual o autonomie suficientă sau trebue considerat ca un capitol special al Calculului tensorial, care folosește un simbolism și metode proprii?*

Semnificația principială a acestei probleme se desprinde din faptul că desvoltarea Geometriei diferențiale și a Fizicei teoretice a arătat că nici *mărimile tensoriale nu epuizează mărimile ce se introduc în teoriile geometrico-fizice. In consecință, încorporarea Calculului vectorial în Calculul tensorial ar trebui urmată de încorporarea acestuia într'un calcul cu mărimi și mai cuprinzătoare decât mărimile tensoriale.* Cum totuși, fiecare din aceste instrumente matematice corespunde unei categorii de fenomene fizice și prezintă caractere și metode specifice, *stabilirea raporturilor dintre ele necesită adoptarea unui punct de vedere unitar în cadrul unei teorii mai cuprinzătoare a mărimilor fizice reprezentabile geometric, ceeace vom face în lucrarea de față.*

Teoria geometrică a mărimilor fizice și Calculul vectorial

In capitolul I al acestui volum se prezintă și *se expun pentru prima dată bazele unei teorii geometrice a mărimilor fizice, cu scopul de a concepe apoi Calculul vectorial ca un capitol al acestei teorii.* Pornind dela observația modului în care se formează în viața practică noțiunea de mărime prin împărțirea unei categorii de obiecte înzestrate cu o proprietate comună în clase de obiecte echivalente, se definesc *obiectele geometrice* ale spațiului și acestora li se asociază *mărimi geometrice*, prin care sunt caracterizate în mulțimea figurilor spațiului.

In același timp, ținând seama de proprietățile mărimilor fizice cele mai simple, care au fost reprezentate geometric de multă vreme, se asociază acestor mărimi fizice mărimi geometrice.

Scanned with OKEN Scanner

Se repetă astfel procesul — elementar la epoca actuală — prin care unor mărimi fizice, cum sunt vitezele, acceleraţiile, forţele, li se asociază câte un vector, *dar acest proces este examinat în adâncime dintr'un punct de vedere nou, critic, acela al justeţei reprezentărilor geometrice ale mărimilor fizice.*

Din expunerea precedentă rezultă că *reprezentarea geometrică vectorială nu este corectă pentru unele dintre mărimile fizice fundamentale,* cum este momentul unui cuplu de forţe, deşi operaţiile vectoriale cu vectorii reprezentativi sunt juste. Aceasta înseamnă că reprezentarea printr'un vector a mărimii obţinute prin produsul vectorial este particulară, aşa cum reiese din schimbarea sistemului de referinţă în Calculul tensorial. *Teoria geometrică a mărimilor fizice exclude dela început această posibilitate de reprezentare incorectă, deoarece asocierea mărimilor se face pe baza proprietăţilor de echivalenţă ale figurilor reprezentative.*

In această teorie *vectorul este mărimea geometrică fundamentală a spaţiului afin euclidian,* în care noţiunile de distanţă şi unghi nu sunt definite. Cu toate acestea, operaţiile de produs scalar şi vectorial, considerate în general ca metrice şi folosite pentru exprimarea proprietăţilor metrice ale figurilor în spaţiul metric euclidian, se pot defini şi în spaţiul afin euclidian.

Produsul vectorial are ca rezultat o mărime numită *bivector*, care se deosebeşte de vector atât prin obiectul geometric căruia îi este asociată, cât şi prin proprietatea de orientare. *Introducerea măsurii în raport cu un sistem de referinţă adânceşte şi mai mult aceste diferenţe fundamentale*, arătând că numai în spaţiul cu trei dimensiuni se pot produce confuzii între vectori şi bivectori, deoarece numai în acest spaţiu ei au acelaşi număr de componente.

Dualitatea geometrică dintre puncte şi plane conduce la introducerea unei mărimi, pusă în evidenţă de Calculul tensorial şi care are proprietăţile formale ale vectorului, de care însă se deosebeşte prin modul de măsură. Această mărime, numită *vector covariant*, este asociată în teoria geometrică a mărimilor fizice unei perechi orientate de plane, după cum vectorul contravariant este asociat unei perechi orientate de puncte. Produsul scalar în spaţiul afin[1]) este o operaţie între un vector contravariant şi un vector covariant şi conduce la un număr, care nu depinde decât de cei doi vectori, deci este independent de alegerea sistemului de referinţă.

Privit din punctul de vedere unitar al teoriei geometrice a mărimilor fizice, *Calculul vectorial apare ca teoria vectorului, considerat ca mărime fundamentală a spaţiului afin cu trei dimensiuni.* Alături de vectorii contravarianţi şi covarianţi intervin în acest calcul şi mărimile scalare, precum şi mărimile obţinute din vectori şi scalari prin operaţiile de adunare, amplificare prin scalari, produs scalar şi produs vectorial. Se poate arăta că vectorul covariant se deduce din vectorul contravariant prin operaţiile vectoriale menţionate, astfel încât vectorul contravariant şi scalarii sunt mărimile fundamentale ale Calculului vectorial.

Introducerea noţiunilor de distanţă şi unghi adaptează Calculul vectorial la structura spaţiului metric euclidian cu puţine modificări şi *fără pierderea semnificaţiei juste a mărimilor geometrice, inevitabilă în concepţia clasică a acestui calcul ca un instrument matematic al spaţiului euclidian, raportat la sistemele de coordonate carteziene ortogonale.*

---

[1]) Pentru uşurinţa expunerii vom evita termenul *afin euclidian;* deasemenea vom spune adesea spaţiu *euclidian* în loc de *metric euclidian.*

Scanned with OKEN Scanner

Incadrarea Calculului vectorial în teoria geometrică a mărimilor fizice, bazată pe teoria obiectelor şi mărimilor geometrice, elimină contradicţia dintre cele două feluri de vectori şi scalari, precizându-i cadrul în raport cu Calculul tensorial.

O consecinţă esenţială a încadrării Calculului vectorial în această teorie este că, spre deosebire de majoritatea manualelor de specialitate, *în această lucrare se arată din primul moment că în Calculul vectorial se introduc în mod necesar mărimi, care nu sunt vectoriale,* dar care pot fi reprezentate prin vectori şi scalari în spaţiul euclidian, cu condiţia de a nu pierde din vedere natura lor, deosebită.

Astfel conceput, *Calculul vectorial se prelungeşte în mod natural prin Calculul tensorial, fără a se încorpora complect în acesta, deoarece are un cadru delimitat prin mărimea sa fundamentală — vectorul — şi prin operaţiile vectoriale.* Deşi operaţiile tensoriale permit să se obţină toate mărimile Calculului vectorial, totuşi simbolismul său geometric, precum şi metodele sale independente de folosirea sistemelor de referinţă, fac din acest calcul un puternic instrument matematic în spaţiul cu trei dimensiuni.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL

BAZELE CALCULULUI VECTORIAL

A. BAZELE TEORIEI GEOMETRICE A MARIMILOR FIZICE

§ 1. Mărimile şi măsura lor

Cercetarea fenomenelor naturale arată că proprietăţile corpurilor şi modificările lor de stare sunt exprimate prin anumite *mărimi*, caracteristice pentru aceste fenomene, cu ajutorul relaţiilor ce se stabilesc între ele. Astfel, mişcarea rectilinie uniformă a unei particule materiale este un fenomen care, într'o primă cercetare, rezultând din simpla observaţie, poate fi caracterizat prin modificarea în timp a poziţiei acelei particule în raport cu un punct de reper de pe dreaptă. Această modificare se poate face mai încet sau mai repede, ceea ce se constată comparând spaţiul parcurs cu timpul întrebuinţat.

Pentru a putea face această comparaţie, observăm că putem atribui în general unei particule materiale proprietatea de a se mişca în linie dreaptă, cel puţin într'un interval de timp foarte scurt, mişcarea fiind înregistrată în timp, fiecărei poziţii corespunzându-i un moment. Deci mişcarea rectilinie este o *proprietate comună* mulţimii tuturor particulelor materiale în anumite condiţii.

Calculând raportul dintre spaţiul parcurs şi timpul întrebuinţat la diverse momente, vom constata că pentru unele particule în mişcare acest raport este constant, pe când pentru altele, el depinde de momentele la care este calculat. Vom spune atunci că primele sunt în mişcare *uniformă*, pe când celelalte sunt în mişcare *neuniformă*.

Dacă ne fixăm atenţia exclusiv asupra particulelor în mişcare uniformă, le putem împărţi în *clase*, punând în aceeaşi clasă toate particulele pentru care raportul spaţiului parcurs la timpul întrebuinţat este acelaşi.

Vom numi *viteză*, în mişcarea rectilinie şi uniformă, raportul dintre spaţiul parcurs şi timpul întrebuinţat. O viteză dată *caracterizează* proprietatea comună tuturor particulelor unei clase de a parcurge un anumit spaţiu într'un anumit interval de timp: o anumită viteză aparţine exclusiv particulelor clasei.

Observaţiile făcute pot fi generalizate. Când o mulţime de obiecte materiale au o însuşire comună este posibil uneori să le comparăm între ele în raport cu această însuşire, stabilind în ce condiţii putem substitui un obiect altuia. Vom spune atunci că în acea mulţime de obiecte există *o relaţie de echivalenţă* în raport cu însuşirea considerată.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, toate corpurile de pe pământ au însuşirea comună de a fi atrase de pământ. Cu ajutorul unei balanţe putem compara corpurile, indiferent de forma, culoarea, temperatura lor, etc., în raport cu această însuşire. Două corpuri vor fi echivalente dacă vor echilibra balanţa.

Mulţimea tuturor obiectelor echivalente între ele în raport cu o proprietate comună se numeşte *clasă de echivalenţă*, sau, mai pe scurt, *clasă.*

Când în mulţimea tuturor obiectelor care au o proprietate comună există o relaţie de echivalenţă în raport cu acea proprietate, mulţimea se împarte în clase disjuncte, fiecare obiect aparţinând unei clase şi numai uneia.

Vom spune atunci că aceste clase sunt caracterizate printr'o *mărime*, obiectele echivalente şi numai acestea având asociată aceeaşi mărime. De exemplu, mulţimea tuturor corpurilor materiale dintr'un loc de pe pământ poate fi împărţită în clase prin cântărire. Fiecare dintre aceste clase este caracterizată printr'o mărime pe care o numim greutate. Ea reflectă proprietatea comună a tuturor corpurilor, care echilibrează o pârghie cu braţele egale, sau o balanţă, şi care sunt echivalente din acest punct de vedere.

Toate clasele de corpuri astfel obţinute sunt caracterizate prin greutatea respectivă. Corpurile pot fi comparate între ele după greutate, cele cu aceeaşi greutate făcând parte din aceeaşi clasă. Vom putea deci spune în general: toate corpurile au greutate.

Mulţimea tuturor mărimilor definite printr'o anumită relaţie de echivalenţă se numeşte *specie de mărimi.* Mărimile ce aparţin unei specii date se numesc *aditive,* dacă se poate stabili pentru ele o operaţie de *compunere.*

Relaţiei de echivalenţă a corpurilor din aceeaşi clasă îi corespunde o relaţie de *egalitate* a mărimilor, ce caracterizează clasele. Egalitatea este *reflexivă, simetrică* şi *tranzitivă.* Operaţia de compunere are proprietăţile adunării: *comutativitate* şi *asociativitate.*

Greutăţile corpurilor sunt mărimi aditive, fiindcă pot fi adunate şi adunarea greutăţilor are proprietăţi de asociativitate şi comutativitate.

Dacă suma a două mărimi dintr'o specie este o mărime din aceeaşi specie vom spune că specia considerată este *aditivă.* Vom vedea că unele mărimi pot fi compuse, dar mărimea sumă nu mai face parte din specia iniţială. In acest caz, vom considera o specie mai largă, care va cuprinde şi mărimile primei specii şi care va fi aditivă. Un astfel de exemplu se întâlneşte în statică: forţele aplicate unui corp solid nu pot fi compuse decât dacă sunt concurente sau paralele. In cazul general, ele formează sisteme de forţe, care sunt caracterizate prin mărimi care pot fi compuse, formând o specie aditivă.

Compunerea mărimilor aditive conduce la noţiunea de *măsură.* Astfel, dacă α este o mărime aditivă, pe care o compunem cu ea însăşi de n ori, scriind:

$$\alpha' = \alpha + \alpha \dots + \alpha = n\alpha,$$

numărul întreg n va fi *măsura mărimii* α' *prin mărimea* α.

In general dacă putem *compara* două mărimi aditive β şi α, astfel încât să putem scrie

$$\beta = k\alpha,$$

unde k este un *număr,* vom numi numărul k *măsura* lui β prin α.

Aceasta presupune în primul rând că semnificaţia mărimii $k\alpha$ este cunoscută, după cum semnificaţia mărimii $n\alpha$ este cunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

Măsura trebue să îndeplinească anumite condiţii naturale, cum este cea de *aditivitate*. Dacă

$$\beta = k\alpha \quad \text{şi} \quad \beta' = k'\alpha$$

şi dacă mărimile β şi β' aditive aparţin unei aceleiaşi specii, atunci trebue ca

$$\beta + \beta' = k\alpha + k'\alpha = (k + k')\,\alpha.$$

Aceasta presupune că se cunoaşte semnificaţia mărimii $(k+k')\,\alpha$ şi că egalitatea are loc.

Proprietatea de aditivitate se poate exprima astfel: *măsura sumei a două mărimi* β *şi* β' *prin mărimea* α *este egală cu suma măsurilor lor prin* α.

Facem observaţia că mărimile $k\alpha$ şi $k'\alpha$ nu aparţin în mod obligatoriu speciei lui α, chiar dacă aceasta este aditivă.

Astfel, dacă se consideră mulţimea tuturor segmentelor multipli întregi ai unui segment dat d, această mulţime este formată din mărimi aditive, deoarece cunoaştem semnificaţia operaţiei de compunere.

$$md + nd = (m + n)\,d.$$

Specia considerată este aditivă, fiindcă mărimea $(m+n)\,d$ este deasemenea un multiplu întreg al lui d.

Să presupunem că segmentul d suferă o dilataţie de coeficient k, unde $0 < k < 1$. Segmentul dilatat d_k poate fi comparat cu d şi putem scrie

$$d_k = (1+k)\,d.$$

Măsurile tuturor segmentelor speciei se amplifică prin $1+k$, mărimile $(1+k)\,nd$ sunt aditive şi constitue o specie aditivă, care, însă, *nu este specia iniţială*.

Din acest exemplu se vede că operaţia de comparaţie, care conduce la noţiunea de măsură, exprimată prin relaţia $\beta = k\alpha$, poate pune în evidenţă mărimi, care nu fac parte din specia dată, tot aşa cum adunarea unor mărimi dintr'o specie conduce la mărimi ce nu aparţin acelei specii.

Vom numi *mărime măsurabilă* orice mărime aditivă α, astfel încât $k\alpha$ este deasemenea o mărime aditivă pentru orice număr real $k \geqslant 0$.

Cu alte cuvinte o mărime aditivă este măsurabilă, dacă orice multiplu pozitiv sau nul al său are semnificaţia de mărime aditivă. Greutăţile corpurilor, lungimile segmentelor, ariile paralelogramelor sunt mărimi măsurabile. Multiplii mărimilor măsurabile pot aparţine altor specii decât celei iniţiale.

Vom numi *specie măsurabilă* orice specie aditivă de mărimi măsurabile, care conţine odată cu o mărime α toţi multiplii săi $k\alpha$, unde $k \geqslant 0$.

Speciile segmentelor, ariilor, volumelor, greutăţilor sunt măsurabile.

Intr'o specie măsurabilă sunt definite operaţiile de adunare a două mărimi şi de amplificare printr'un număr pozitiv (sau nul) a oricărei mărimi. Vom pune

$$0\alpha = 0$$

pentru orice mărime α, notând cu 0 mărimea care, adunată cu orice altă mărime, o lasă neschimbată.

Scanned with OKEN Scanner

In unele specii măsurabile, putem defini şi multipli negativi ai mărimilor, deci măsuri negative.

Dacă toate mărimile unei specii măsurabile, sau o parte din ele, pot fi exprimate ca multipli $\beta = k\alpha$ ai mărimii α, vom spune că α este o *unitate* în specia considerată.

In unele specii măsurabile de mărimi putem măsura toate mărimile cu o singură unitate, în altele este necesar să folosim două sau mai multe unităţi.

Introducerea noţiunii de măsură a mărimilor ne permite să substituim în unele operaţii fiecărei mărimi măsura sa prin unităţile speciei respective, astfel încât aceste operaţii devin numerice.

Pe corespondenţa dintre mărimile măsurabile şi numere se bazează folosirea metodelor matematice în studiul fenomenelor fizice.

Mărimile considerate în cele ce urmează sunt în general măsurabile şi deci pot fi reprezentate numeric prin măsurile lor. Inafară de operaţia de compunere, ele vor mai admite şi alte operaţii, astfel încât vom putea efectua calcule cu măsurile lor şi vom putea stabili relaţii matematice între ele.

§ 2. Mărimi geometrice

Fenomenele fizice ne pun în faţa unui mare număr de mărimi, care caracterizează proprietăţile materiei în mişcare. Dintre aceste proprietăţi, cele mai simple sunt cele legate de întindere, formă, poziţie, deci de proprietăţile geometrice ale corpurilor [1]).

Pe de altă parte, însăşi mărimile fizice cele mai des întâlnite se reprezintă ca mărimi geometrice. Astfel, reprezentarea unei forţe de tracţiune, familiară oricui, se realizează printr'o săgeată, care indică direcţia, sensul şi intensitatea efortului. Deaceea este necesar să începem prin a cerceta mărimile geometrice odată cu proprietăţile cele mai simple ale materiei.

Geometria, care studiază proprietăţile spaţiale ale materiei, „operează cu noţiuni câştigate din experienţă şi ca rezultat al unei abstractizări a obiectelor din realitate, luându-se în considerare numai anumite proprietăţi ale obiectelor reale“ [2]).

Astfel vom substitui unei particule materiale de dimensiuni extrem de reduse un *punct,* care va marca numai poziţia în spaţiu a acestei particule.

Mulţimea tuturor punctelor geometrice va constitui *spaţiul geometric.*

O mulţime de puncte, caracterizată în spaţiu prin anumite proprietăţi, se va numi *figură geometrică.*

Aceste proprietăţi nu sunt arbitrare, ci ele rezultă dintr'un număr mic de proprietăţi ale obiectelor reale, care sunt la baza proprietăţilor tuturor figurilor. Cele mai simple proprietăţi geometrice ale corpurilor materiale constitue un sistem de relaţii geometrice numite *axiome* şi *postulate.* Ele sunt reunite într'un grup şi constitue un sistem de axiome şi postulate. Vom spune că un sistem de axiome şi postulate caracterizează *structura geometrică a spaţiului*

---

[1]) *F. Engels,* Anti-Dühring ed. 2, Ed. P. M. R., 1952. p. 61 „formele de bază ale oricărei existenţe sunt spaţiul şi timpul, şi o existenţă în afara timpului este o absurditate tot atât de mare ca şi o existenţă în afara spaţiului“.

[2]) *N. V. Efimov,* Geometrie superioară, Bucureşti, Ed. Tehnică 1952, p. 37.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Toate proprietăţile figurilor geometrice decurg in axiome, deci din structura spaţiului.

Vom numi *obiect geometric* mulţimea tuturor figurilor din spaţiu, care au un număr de proprietăţi comune. Astfel, toate dreptele din spaţiu formează un obiect geometric. Puşi în faţa mulţimii tuturor dreptelor, a tuturor cercurilor, a tuturor sferelor, cuburilor, etc., putem separa aceste figuri în categorii prin proprietăţile comune tuturor celor ce aparţin unei categorii. Odată făcută această separare, oricare figură dintr'un obiect geometric poate servi pentru a-l reprezenta, dar pentru a-l concepe ca un tot, facem abstracţie de toate particularităţile fiecărei figuri şi nu reţinem decât o figură abstractă ce are numai proprietăţile comune tuturor, de exemplu comune tuturor dreptelor.

O figură dată poate face parte din mai multe categorii. Astfel, un acelaşi triunghi face parte din categoria figurilor plane, a poligoanelor, a triunghiurilor, etc., deci din mai multe obiecte geometrice.

Vom preciza noţiunea de obiect geometric spunând că *mulţimea tuturor figurilor din spaţiu, care au anumite proprietăţi comune, defineşte prin abstracţie o figură caracterizată prin acele proprietăţi. Această figură se numeşte obiect geometric şi este reprezentată concret prin oricare dintre figurile ce au proprietăţile considerate.*

Noţiunea de obiect geometric este simplă fiindcă se obţine în mod natural prin procesul de abstractizare folosit în matematici şi în particular în geometrie, *luând în considerare numai anumite proprietăţi ale obiectelor reale.*

Pentru uşurinţa exprimării, *vom considera obiectul geometric, fie ca un tot format din mulţimea figurilor ce au un număr de proprietăţi comune, fie ca figura generică definită mai sus.*

Mulţimea figurilor unui obiect geometric poate fi împărţită în clase cu ajutorul unei anumite proprietăţi, astfel încât o figură să facă parte dintr'o clasă şi numai dintr'una.

Prin aceasta se precizează deosebirea dintre *categoriile* de figuri considerate mai sus pentru a ajunge la noţiunea de obiect geometric şi *clasele* de figuri ale unui anumit obiect.

Astfel, dacă din obiectul geometric numit triunghi alegem un anumit triunghi, putem reuni într'o mulţime toate triunghiurile egale cu el. Din mulţimea celor rămase putem alege apoi un alt triunghi şi reuni deasemenea într'o mulţime toate triunghiurile egale cu el. Bine înţeles că niciunul din triunghiurile din prima mulţime nu poate să intre în cea de a doua, după cum rezultă din însuşi procedeul de formare a acestor mulţimi.

Continuând în acelaşi mod, mulţimea tuturor triunghiurilor se împarte în clase *disjuncte*, adică fără niciun element comun.

Vom spune că toate triunghiurile din aceeaşi clasă sunt *echivalente* între ele, sau că între triunghiurile fiecărei clase există o relaţie de echivalenţă.

In general, dacă un obiect geometric a fost împărţit în clase de figuri disjuncte cu ajutorul unei proprietăţi comune, vom spune că în acel obiect am introdus o *relaţie de echivalenţă.*

Relaţia de echivalenţă are proprietăţile egalităţii, deci este simetrică reflexivă şi transitivă.

Intr'adevăr, notând echivalenţa prin semnul $\equiv$,

dacă $A \equiv B$, atunci şi $B \equiv A$ *(simetrie)*,

Scanned with OKEN Scanner

ceeace înseamnă: dacă A este în aceeaşi clasă cu B, atunci şi B este în aceeaşi clasă cu A.

Deasemenea

$$A \equiv A \quad (\textit{reflexivitate}),$$

adică A este în aceeaşi clasă cu A.

In sfârşit

dacă $A \equiv B$ şi $B \equiv C$, atunci $A \equiv C$ (*transitivitate*),

ceeace înseamnă: dacă A şi B, pe de o parte, şi B şi C pe de altă parte, sunt în aceeaşi clasă, atunci A şi C vor fi în aceeaşi clasă.

Considerând fiecare clasă ca un tot, cum am procedat pentru obiectul geometric, o vom putea caracteriza în raport cu relaţia de echivalenţă printr'o noţiune abstractă pe care o vom numi *mărime geometrică.*

Proprietatea esenţială a mărimilor este aceea de a putea fi comparate. In adevăr, dacă notăm cu α şi β mărimile ce caracterizează clasele $C(A)$ şi $C(B)$, vom spune că

$$\alpha = \beta,$$

dacă, şi numai dacă,

$$A \equiv B, \text{ deci } C(A) = C(B).$$

Prin urmare, *relaţia de echivalenţă a figurilor unui obiect geometric se înlocueşte prin relaţia de egalitate a mărimilor ce caracterizează clasele respective.*

Astfel, considerând toate segmentele AB din spaţiu, obţinem un obiect geometric. Să numim echivalente două segmente AB şi $A'B'$ care pot fi suprapuse printr'o deplasare în spaţiu. Mulţimea tuturor segmentelor se împarte în clase, fiecare clasă fiind caracterizată printr'o mărime, pe care o numim *lungimea* segmentului.

Dacă două segmente sunt echivalente, clasele lor se contopesc într'una singură, iar lungimile lor sunt egale, deci vom putea caracteriza echivalenţa segmentelor prin egalitatea lungimilor lor.

Când un obiect geometric a fost împărţit în clase cu ajutorul unei relaţii de echivalenţă, spunem că am *asociat* acelui obiect o mărime geometrică.

A asocia o mărime geometrică unui obiect geometric înseamnă a caracteriza fiecare din clasele sale prin mărimea corespunzătoare.

Această operaţie de asociere ne permite să înlocuim până la un punct clasele de figuri prin mărimile corespunzătoare.

Invers, orice mărime geometrică este *concretizată* prin figurile clasei pe care o *caracterizează.*

Mulţimea tuturor mărimilor geometrice definite printr'o relaţie de echivalenţă introdusă într'un obiect geometric, constitue *o specie de mărimi geometrice.*

O specie de mărimi geometrice aditive este *aditivă* dacă putem defini compunerea sau adunarea mărimilor sale conform cu structura spaţiului şi dacă suma a două mărimi este o mărime ce aparţine speciei.

Pentru a da un exemplu, să considerăm obiectul geometric numit segment, împărţit în clase, căruia i-am asociat ca mărime geometrică lungimea.

Scanned with OKEN Scanner

Orice segment este caracterizat parţial prin lungimea sa, adică este determinat înafară de poziţia sa în spaţiu. Mulţimea tuturor lungimilor formează o specie de mărimi geometrice.

Pentru segmentele coliniare putem defini uşor suma lungimilor lor, aşezându-le cap la cap. Suma a două lungimi de segmente coliniare este o lungime de segment. Vom putea deci spune că lungimile segmentelor de pe o dreaptă dată formează o specie aditivă de mărimi geometrice.

Când segmentele nu sunt coliniare, putem convenţional să le deplasăm şi să le aşezăm pe o dreaptă, asociind sumei lungimilor a două segmente lungimea unui segment. Aşa procedăm, de exemplu, când calculăm perimetrul unui poligon, exprimându-l în unităţi de lungime.

In aplicaţii, operaţia de adunare a mărimilor geometrice nu este suficientă pentru a pune în evidenţă proprietăţile mărimilor unei specii aditive. Ea este complectată cu operaţia de măsură, care dă posibilitatea de a compara mărimile.

Vom numi *specie măsurabilă de mărimi geometrice* orice specie aditivă de mărimi geometrice măsurabile, care conţine, odată cu o mărime geometrică dată, toţi multiplii săi pozitivi.

Specia segmentelor coliniare este aditivă, dar în acelaşi timp fiecare segment este măsurabil, fiindcă este cunoscută semnificaţia oricărui multiplu kd al unui segment dat d, pentru $k > 0$, iar $0d = 0$. Pe de altă parte, dacă d este un segment, atunci şi kd este un segment. In consecinţă, specia segmentelor coliniare este măsurabilă.

Prin orientarea segmentelor de pe o dreaptă, orice segment AB are un segment opus $\overline{BA}$ şi

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Specia tuturor segmentelor orientate de pe o dreaptă este deasemenea măsurabilă. Dacă notăm prin $-d$ opusul unui segment d, un multiplu $k(-d)$ al acestui segment va putea fi pus sub forma

$$k(-d) = (-k)\,d.$$

Dacă alegem segmentul d ca unitate, orice alt segment orientat va fi un multiplu pozitiv sau negativ al lui d. In această specie vor exista deci şi măsuri negative. Această proprietate este generală pentru speciile măsurabile, în care mărimile admit mărimi opuse.

§ 3. Mărimi fizice şi mărimi geometrice

Figurile geometrice constitue numai o abstractizare a corpurilor materiale, în care luăm în consideraţie numai proprietăţile lor de întindere, formă, poziţie, etc.

Dacă trecem la cercetarea fenomenelor fizice, ca deplasarea şi deformarea corpurilor, scurgerea fluidelor, propagarea sunetului, a luminii, a căldurii, etc., trebue să luăm în consideraţie proprietăţile fizice ale materiei.

Considerând un anumit fenomen fizic, de exemplu atracţia corpurilor de pe pământ, vom constata în primul rând o proprietate comună: toate corpurile sunt atrase spre centrul pământului. Pentru a putea compara corpurile în raport

Scanned with OKEN Scanner

cu această proprietate, introducem o relaţie de echivalenţă prin cântărire, împărţindu-le în clase. Fiecare clasă este caracterizată prin mărimea numită greutate. Fiecare din clasele obţinute, de exemplu clasa corpurilor cu greutatea 1 kg, este reprezentată concret prin oricare din aceste corpuri.

Un alt fenomen simplu, deplasarea unui corp de mică întindere, este caracterizat prin schimbarea poziţiei, deci printr'un segment cu originea în punctul de plecare A şi extremitatea în punctul de sosire B, reprezentând spaţiul parcurs. Acestui segment îi asociem o mărime geometrică, lungimea sa, astfel încât putem compara deplasările prin lungimi.

Deplasarea este un fenomen fizic. Ea este caracterizată într'o primă cercetare prin spaţiul parcurs, iar acesta este reprezentat geometric prin lungimea segmentului AB. Dacă numim deplasare spaţiul parcurs în acest fenomen, caracterizăm fenomenul printr'o mărime fizică, iar dacă acestei mărimi îi substituim lungimea segmentului AB, reprezentăm o mărime fizică printr'o mărime geometrică. Putem adânci şi mai mult cercetarea acestui fenomen, comparând spaţiul parcurs cu timpul întrebuinţat, deci calculând distanţa parcursă în unitatea de timp. Fenomenul va fi caracterizat atunci printr'o nouă mărime fizică, viteza, iar aceasta va fi reprezentată deasemenea printr'o mărime geometrică, lungimea segmentului parcurs în unitatea de timp. Deci, din nou vom întâlni o mărime fizică reprezentată printr'o mărime geometrică.

Reprezentarea mărimilor fizice prin mărimi geometrice se extinde la numeroase mărimi fizice simple. Ea ne permite să dăm o imagine acestor mărimi şi relaţiilor dintre ele.

Studiul fenomenelor fizice simple, mai precis, simplificate pentru a putea fi înţelese mai uşor, pune în evidenţă anumite *operaţii cu mărimile fizice*, corespunzătoare unor noi condiţii în care se produc aceste fenomene, sau unei adânciri a lor.

De exemplu, o deplasare din A în B poate fi urmată de o a doua din B în C. Aceste două deplasări pot fi înlocuite cu o singură deplasare din A în C.

Dacă vom caracteriza deplasările prin mărimi fizice care să ţină seamă nu numai de distanţa parcursă, ci şi de direcţia şi de sensul deplasării, aceste mărimi vor putea fi legate printr'o operaţie, care va exprima proprietatea fenomenului deplasării de a putea fi înlocuit cu o deplasare unică în cazul când e repetat. Să presupunem că ştim să reprezentăm mărimile fizice caracteristice deplasării prin anumite mărimi geometrice. In acest caz, operaţiilor cu mărimile fizice caracteristice deplasării le vor corespunde anumite operaţii geometrice.

Reprezentarea geometrică a mărimilor fizice stabileşte o corespondenţă între mărimi fizice şi geometrice, pe de o parte, şi între operaţii cu mărimi fizice şi operaţii cu mărimi geometrice, pe de altă parte.

Această reprezentare este posibilă pentru unele din cele mai importante mărimi fizice, pe care le putem reprezenta prin mărimi geometrice simple, provenind din obiecte geometrice simple.

Din măsura acestor mărimi, corespunzătoare măsurii mărimilor fizice reprezentate geometric, vor rezulta valori numerice, numite *componente* ale mărimii considerate. Fiecare mărime dintr'o anumită specie este unic determinată (în general) prin măsura sa, deci prin componentele sale în raport cu un sistem de unităţi dat.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, viteza este unic determinată printr'un număr, când se alege un anumit sistem de unități pentru spațiu și timp, de exemplu metrul și secunda.

Operațiilor cu mărimi geometrice le vor corespunde operații asupra acestor componente, deci operații numerice, iar relațiilor geometrice, corespunzătoare relațiilor dintre mărimile fizice li se vor substitui relații între componente, deci *relații numerice*.

Prin această corespondență între mărimile fizice și cele geometrice, pe de o parte, și între mărimi și componente, pe de altă parte, se deschid perspective largi de desvoltare a teoriilor matematice și se pun în evidență noi instrumente de calcul matematic având un suport fizic solid, deci cu certitudinea de a fi utile și pătrunzătoare.

§ 4. Invarianța mărimilor și legilor fizice

Modul de formare a noțiunii de mărime prin împărțirea unei mulțimi de obiecte în clase pe baza unei relații de echivalență, permite să caracterizăm o porțiune de materie prin mai multe mărimi, corespunzătoare diferitelor sale însușiri.

Dintre aceste mărimi, unele sunt dependente de altele. De exemplu, o particulă materială în mișcare este caracterizată nu numai prin viteza, ci și prin accelerația sa, iar ambele aceste mărimi depind de spațiul parcurs și de timpul întrebuințat; aria paralelogramului depinde de lungimile laturilor și de unghiul dintre ele, etc.

Modul de dependență a mărimilor unele de altele este exprimat prin relațiile dintre ele, corespunzătoare legilor fizice. Aceste relații pot avea din punct de vedere matematic diverse aspecte: pot fi *geometrice*, adică exprimate prin simboluri reprezentative ale mărimilor geometrice, pot fi *simbolice*, adică exprimate prin simboluri reprezentative ale mărimilor fizice însăși, pot fi *numerice*, adică exprimate prin componentele mărimilor măsurate în anumite sisteme de unități, determinate pentru fiecare. Legea fundamentală a dinamicei, exprimată prin cuvintele „forța este egală cu masa înmulțită cu accelerația“, se prezintă sub forma simbolică,

$$F=ma,$$

unde F este simbolul folosit pentru forță, iar m și a simbolurile folosite pentru masă și accelerație. Produsul dintre m și a simbolizează relația fizică dintre masă și accelerație, legea care leagă forța de aceste două mărimi. Dacă, însă, măsurăm accelerația și masa cu unitățile respective dintr'un sistem de unități fizice, relația simbolică $F=ma$ devine o relație numerică între măsurile celor trei mărimi, măsura forței fiind dependentă de aceea a masei și a accelerației, ca produs al măsurilor lor.

Oricare ar fi modul inițial de exprimare matematică a unei legi fizice, pentru a putea fi folosită în cercetarea unui fenomen și aplicată în practică, este necesar ca ea să capete un aspect numeric, deci ca mărimile să fie exprimate prin măsurile lor în raport cu un anumit sistem de unități.

In acest caz, schimbarea unităților în speciile de mărimi de care depinde o mărime dată, va produce schimbări în măsurile acestor mărimi, și deci, și schimbarea măsurii mărimii considerate, deci schimbarea componentelor sale.

Scanned with OKEN Scanner

Fenomenele fizice sunt independente de modul în care sunt măsurate mărimile fizice în speciile din care fac parte. Deaceea, relaţiile între mărimile fizice îşi păstrează forma, oricare ar fi sistemele de unităţi folosite pentru măsura acestor mărimi.

Pentru exemplificarea acestor idei fundamentale, să considerăm cazul vitezei în mişcarea rectilinie şi uniformă. Viteza este o mărime dependentă de lungimea intervalului parcurs şi de intervalul de timp întrebuinţat. Vom avea deci simbolic

$$v=\frac{s}{t}.$$

Dacă folosim un sistem de unităţi, această relaţie devine numerică şi are loc între măsurile celor trei mărimi în acel sistem.

Punând în evidenţă unităţile L şi T de lungime şi timp, vom exprima mărimile astfel:

$$s=l[L],\ t=\tau[T]$$

şi vom avea

$$v=\frac{s}{t}=\frac{l}{\tau}[LT^{-1}];\ \omega=\frac{l}{\tau},$$

ω, l şi τ reprezentând măsurile vitezei, spaţiului şi timpului. Unitatea de viteză va fi deci $[LT^{-1}]$, ceeace arată că unitatea de viteză este dependentă de unităţile de spaţiu şi timp.

Schimbând aceste unităţi prin $[L']$ şi $[T']$, vechile unităţi vor fi exprimate ca lungimi, respectiv intervale de timp, în funcţie de noile unităţi şi vom avea

$$[L]=l_0[L'],\ [T]=\tau_0[T'].$$

Deci

$$[LT^{-1}]=\frac{l_0}{\tau_0}[L'T'^{-1}].$$

In noul sistem de unităţi, vom avea deci

$$s=ll_0[L'],\quad t=\tau\tau_0[T'];$$

deci

$$s=l'[L'],\quad t=\tau'[T']$$

cu notaţia

$$l'=ll_0,\quad \tau'=\tau\tau_0.$$

Prin urmare, atât s cât şi t îşi păstrează forma în orice sistem de unităţi, măsurile respective schimbându-se după regulile găsite.

Deasemenea, vom avea pentru viteză, care este o mărime dependentă de s şi t, expresia:

$$v=\frac{l'}{\tau'}[L'T'^{-1}]=\omega'[L'T'^{-1}]$$

cu notaţia

$$\omega'=\frac{l'}{\tau'}=\frac{l}{\tau}\left(\frac{l_0}{\tau_0}\right);\quad \omega'=\left(\frac{l_0}{\tau_0}\right)\omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se vede deci că şi viteza îşi păstrează forma în orice sistem de unităţi folosite pentru măsura spaţiului şi timpului.

Vom putea formula această independenţă a relaţiilor dintre mărimile fizice de modul în care sunt măsurate, astfel:

Relaţiile dintre mărimile fizice sunt invariante faţă de schimbările unităţilor cu care sunt măsurate mărimile ce intervin în ele. Această invarianţă are consecinţe importante asupra relaţiilor dintre măsurile mărimilor. Din exemplul vitezei rezultă că avem

$$l' = l_0 l, \quad \tau' = \tau_0 \tau, \quad \omega' = \frac{l_0}{\tau_0} \omega.$$

Prin urmare, noile componente se exprimă în funcţie de cele vechi şi de l_0, τ_0, care sunt mărimi caracteristice transformării unităţilor. Această proprietate este generală şi constitue *invarianţa mărimilor fizice* faţă de modul de măsură folosit:

Mărimile fizice sunt invariante faţă de schimbările de unităţi. Noile componente se exprimă exclusiv în funcţie de cele vechi şi de componentele mărimilor caracteristice ale transformării unităţilor.

Aplicarea acestor proprietăţi, puse sub forma de principii, ne va permite să recunoaştem dacă un sistem de numere reprezintă sau nu componentele unei mărimi fizice şi chiar să recunoaştem natura acelei mărimi.

§ 5. Mărimi fizice măsurabile cu o unitate

Măsura mărimilor este o operaţie fundamentală din punct de vedere atât experimental, cât şi teoretic. O primă consecinţă este însăşi clasificarea diverselor mărimi fizice după modul în care pot fi măsurate în specia din care fac parte.

Invarianţa mărimilor atrage după sine faptul important că măsurile în două sisteme diferite de unităţi se exprimă unele în funcţie de altele, fără intervenţia altor elemente străine, înafară de componentele mărimilor care intervin în transformarea unităţilor. Cele mai simple specii de mărimi, considerate din punctul de vedere al măsurii, sunt *speciile măsurabile cu o unitate.* In aceste specii, odată aleasă mărimea unitate, toate celelalte mărimi sunt proporţionale cu unitatea.

Fie S astfel de specie de mărimi şi să presupunem că mărimile sale depind de alte mărimi $a_1, a_2, \ldots$ aparţinând altor specii $S_1, S_2, \ldots$ măsurabile cu una sau mai multe unităţi. Să notăm cu a o mărime din specia S şi cu $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots$ unităţile în speciile $S_1, S_2, \ldots$ Unitatea $[\alpha]$ din specia S va fi o funcţie de $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots$, pe care o vom nota

$$[\alpha] = f([\alpha_1], [\alpha_2], \ldots).$$

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ măsurile mărimilor $a_1, a_2, \ldots$ în speciile respective, înţelegând prin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ totalitatea componentelor lor.

Vom folosi ades semnul $\in$ pentu a exprima faptul că o mărime *aparţine* unei specii (sau mai general că un element aparţine unei mulţimi de elemente).

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $a \epsilon S$ este o mărime măsurabilă cu o unitate, vom putea scrie

$$a = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)[\alpha] = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) f([\alpha_1], [\alpha_2], \ldots), \qquad (1,I)$$

unde φ reprezintă măsura lui a prin unitatea $[\alpha]$.

Din cauza invarianţei mărimilor fizice, relaţia dintre unitatea $[\alpha]$ şi unităţile $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, ... va fi invariantă când vom schimba aceste unităţi în speciile $S_1, S_2, \ldots$, deci vom avea

$$[\alpha'] = f([\alpha_1'], [\alpha_2'], \ldots).$$

Cum a este o mărime măsurabilă cu o unitate, în noul sistem de unităţi, vom avea

$$a = \varphi'(\lambda_1', \lambda_2', \ldots)[\alpha'] = \varphi'(\lambda_1', \lambda_2', \ldots) f([\alpha_1'], [\alpha_2'], \ldots).$$

Prin urmare, în noul sistem mărimea $a \epsilon S$ se va exprima la fel ca şi în vechiul sistem, dar noua sa măsură φ' va fi diferită de cea veche φ.

Cum noile componente trebue să se exprime în funcţie de cele vechi şi de parametrii de care depind transformările de unităţi, vom avea

$$\varphi' = F(\varphi, ***), \qquad (2,I)$$

unde stelele * ţin locul parametrilor transformărilor de unităţi. Este instructiv de urmărit aceste consideraţii generale pe exemplul vitezei. Vom avea

$$[\alpha_1] = [L], \quad [\alpha_2] = [T],$$

$$[\alpha] = f([\alpha_1], [\alpha_2]) = [\alpha_1 \alpha_2^{-1}] = [L T^{-1}],$$

$$\lambda_1 = l, \quad \lambda_2 = \tau,$$

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{l}{\tau}, \quad \varphi'(\lambda_1', \lambda_2') = \frac{l'}{\tau'},$$

de unde

$$\varphi' = \frac{l_0}{\tau_0} \varphi', \qquad (3,I)$$

l_0, τ_0 fiind parametrii transformărilor de unităţi. Funcţia F este, în acest caz foarte simplă: φ' se obţine din φ prin amplificare cu un factor.

După cum se vede, măsura nu rămâne neschimbată în general, deşi mărimile sunt invariante. Cazul în care măsura însăşi rămâne neschimbată este particulari dar foarte important. Vom spune că măsura unei mărimi măsurabile cu o unitate este *invariantă*, faţă de schimbarea unităţilor unor mărimi de care depinde, dacă valoarea sa este aceeaşi, atât în primul, cât şi în cel de al doilea sistem.

Condiţia de invarianţă a măsurii este deci:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = \varphi'(\lambda_1', \lambda_2', \ldots), \qquad (4,I)$$

forma funcţiei φ putând să se schimbe, dar valoarea sa rămânând aceeaşi.

Un exemplu de mărime a cărei măsură este invariantă, este unghiul, faţă de schimbarea de unitate de lungime.

Scanned with OKEN Scanner

Un alt exemplu de mărime de măsură invariantă este lungimea unui segment A_1A_2. Din geometria analitică ştim că

$$l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

unde x_1, y_1, z_1 şi x_2, y_2, z_2 sunt coordonatele carteziene ortogonale ale capetelor A_1 şi A_2.

Dacă trecem la un alt sistem de coordonate carteziene ortogonale, vom avea, conform cu formulele cunoscute de transformare:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

deci

$$l'=l.$$

Prin urmare, măsura lungimilor este invariantă faţă de schimbarea sistemelor de referinţă carteziene ortogonale. Ea este invariantă şi pentru schimbări de sisteme de referinţă carteziene oblice, măsura (4) păstrându-şi valoarea, dar schimbându-şi forma.

Dimpotrivă, măsura volumelor paralelipipedelor nu este invariantă fiindcă, după cum vom arăta mai departe, această măsură se înmulţeşte cu un factor.

De altfel, faţă de schimbarea de unităţi de lungime şi de timp, nici măsura vitezei nu este invariantă, după cum se vede din formula (3,I).

Când măsura unei mărimi se amplifică printr'un factor într'o schimbare de unităţi ale mărimilor de care depinde, vom zice că este *pseudo-invariantă*. Este posibil ca o mărime să aibă măsura invariantă faţă de schimbarea unora din mărimile de care depinde şi pseudo-invariantă faţă de schimbarea altora.

§ 6. Teoria geometrică a mărimilor fizice şi Calculul vectorial

Fenomenele fizice sunt descrise matematic prin relaţii între mărimi fizice. Pentru ca aceste relaţii să capete o formă matematică este necesar ca mărimile să fie reprezentate prin simboluri matematice, iar acestea să fie legate prin operaţii de calcul.

Deasemenea, proprietăţile geometrice ale corpurilor materiale sunt descrise prin relaţii între obiectele geometrice, iar obiectelor geometrice li se asociază mărimi geometrice, reprezentate prin simboluri matematice cu care se pot efectua anumite operaţii.

Studiul matematic al unora dintre fenomenele fundamentale, cum este mişcarea corpurilor materiale, a condus la introducerea unor mărimi, care la început erau descrise geometric şi reprezentate numeric.

Acesta este cazul vitezei, acceleraţiei, momentului unei forţe, etc., care au fost măsurate şi exprimate numeric, însă pe cât posibil, legate de o interpretare geometrică.

Pe de altă parte, geometria însăşi, pe măsura desvoltării calculului algebric, a folosit din ce în ce mai mult operaţiile cu mărimi geometrice, cunoscute încă din antichitate, fără însă a putea ajunge la constituirea unui calcul autonom cu mărimi geometrice, înafară de calculul trigonometric.

Desvoltarea fizicei matematice, a condus la necesitatea de a se considera dintr'un punct de vedere unitar mărimile care depind de o direcţie din spaţiu,

Scanned with OKEN Scanner

au un sens pe această direcţie şi o intensitate măsurată numeric, cum sunt vitezele, forţele aplicate solidelor, tensiunile, etc.

Aceste mărimi pot fi reprezentate geometric printr'un segment de dreaptă orientat, care reuneşte cele trei caracteristice: direcţie, sens, intensitate.

Segmentul orientat constitue pentru aceste mărimi o imagine geometrică simplă, prin care pot fi comparate. Pe de altă parte, aceste mărimi pot fi compuse după reguli simple, puse în evidenţă experimental, cum este regula paralelogramului pentru compunerea forţelor.

Din aplicarea acestei reguli a rezultat un calcul cu segmente orientate, care a adus foloase în statică. Alte mărimi mecanice, ca lucrul mecanic sau momentul unei forţe în raport cu un punct, au putut fi exprimate mai târziu ca mărimi ce rezultă din operaţii efectuate asupra segmentelor orientate, care au fost numite *vectori*.

Astfel a luat naştere *Calculul vectorial*, folosit prima dată de Grassmann şi Hamilton, ca un calcul cu mărimi geometrice, având reguli asemănătoare numai în parte cu cele ale calculului algebric.

Desvoltarea, ca şi apariţia sa, au fost condiţionate de lărgirea domeniului de aplicaţie. Rând pe rând, mecanica, geometria, apoi diversele domenii ale fizicei matematice, care au luat recent o extensiune din ce în ce mai mare, ca hidrodinamica, elasticitatea, teoria câmpurilor, etc., au introdus acest instrument de calcul matematic.

O bună parte din mărimile fizice fundamentale au putut fi reprezentate geometric în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni prin vectori, ca şi o bună parte din mărimile geometrice uzuale.

Calculul vectorial dă posibilitatea de a se efectua cu aceste mărimi operaţiile necesare pentru stabilirea relaţiilor folosite în studiul unora dintre fenomenele importante.

El prezintă aceste relaţii sub forma invariantă faţă de schimbarea sistemelor de coordonate, deoarece mărimile exprimate vectorial sunt independente de alegerea acestor sisteme.

Trebue însă pus în evidenţă un fapt important, acela că unele din mărimile reprezentate prin vectori prezintă anumite particularităţi. Astfel, vectorii obţinuţi prin operaţia de produs vectorial, impusă în mod natural de necesitatea de a reprezenta momentele forţelor şi cuplurile, îşi schimbă sensul dacă se schimbă convenţional sensul pozitiv al rotaţiilor în spaţiu. Deasemenea, calculând aria unui paralelogram sau volumul unui paralelipiped se obţin mărimi susceptibile de a fi pozitive sau negative, după cum alegem un sens sau sensul opus pentru rotaţiile pozitive.

Aceste constatări, precum şi necesitatea de a se folosi sisteme de coordonate oblice, au arătat că *nu toate mărimile reprezentate prin vectori au caracter vectorial.* Unele se prezintă ca vectori, numai fiindcă sunt reprezentate vectorial, iar reprezentarea lor vectorială este posibilă numai în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni. Chiar în acest spaţiu, a cărui structură geometrică este corespunzătoare fenomenelor fundamentale clasice, dacă folosim pentru măsura mărimilor coordonate oblice, vom constata că mărimile considerate au alt mod de măsură decât vectorii.

Aceasta arată că *trebue să privim Calculul vectorial ca o metodă de reprezentare matematică a unora dintre mărimile fizice importante,* fără a-l putea considera ca o teorie matematică a acestor mărimi.

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, operaţiile sale algebrice ne conduc la mărimi ce nu mai sunt vectoriale, deci care se încadrează într'o categorie mai largă de mărimi fizice şi geometrice, reprezentabile vectorial, dar cu proprietăţi speciale de care trebue să ţinem seama şi care sunt explicabile imediat în Calculul tensorial.

Acesta constitue o extensiune naturală a Calculului vectorial şi este necesar ca, rămânând în cadrul metodelor vectoriale, să punem acest fapt în evidenţă, pentru a putea da o explicaţie matematică proprietăţilor mărimilor caracteristice fenomenelor studiate prin metode vectoriale.

Legătura dintre Calculul vectorial şi Calculul tensorial precum şi posibilitatea de a se folosi şi alte metode de reprezentare matematică şi de calcul ale mărimilor fizice, pot fi stabilite în mod natural, dacă privim aceste mărimi dintr'un punct de vedere mai general.

Pornim dela faptul că reprezentările matematice ale mărimilor fizice sunt juste, dacă reuşesc să conducă la relaţii, prin care fenomenele sunt descrise matematic cu o aproximaţie satisfăcătoare, confirmată prin verificări experimentale şi aplicaţii practice. Ţinând seamă de aceasta, proprietăţile matematice de bază şi regulile de calcul ale mărimilor, care intervin într'un fenomen, sau într'un grup de fenomene, vor reflecta proprietăţile lor fizice. Deasemenea, clasificarea şi încadrarea acestor mărimi se va face pe baza acestor proprietăţi.

Pe de altă parte, istoria ştiinţei a arătat strânsa legătură între mărimile fizice şi cele geometrice, precum şi între mărimi şi reprezentarea lor numerică prin măsură. Teoriile fizice au folosit şi folosesc interpretarea geometrică urmărind reprezentarea mărimilor fizice prin mărimi geometrice din ce în ce mai complexe. Geometria însăşi s'a desvoltat considerabil şi în direcţii nebănuite altă dată, în lumina problemelor puse de fizica modernă.

Deaceea, o teorie a obiectelor şi mărimilor geometrice, ce caracterizează structura spaţiului (mai general a unui spaţiu) poate aduce ordine şi sistematizare şi în studiul matematic al mărimilor caracteristice fenomenelor fizice.

In adevăr, *dacă pe de o parte putem caracteriza structura spaţiului printr'un număr mic de mărimi geometrice asociate obiectelor geometrice fundamentale, aşa cum rezultă din axiome, iar pe de altă parte putem reprezenta anumite mărimi fizice prin mărimi geometrice, teoria acestor mărimi capătă din punct de vedere matematic un aspect geometric şi poate fi desvoltată sub această formă.*

Pentru a putea determina mărimile geometrice necesare teoriei fizice, trebue să folosim proprietăţile de bază ale mărimilor fizice pe care voim să le reprezentăm geometric. Ele ne vor determina atât mărimile geometrice, cât şi regulile de calcul.

Aplicarea acestui punct de vedere în cercetarea fenomenelor clasice ale mecanicei şi în geometria spaţiului cu trei dimensiuni, conduce la ideea de mărime geometrică asociată unui obiect geometric şi la considerarea vectorilor ca mărimi fundamentale în spaţiul afin. Tot prin acest punct de vedere se ajunge la introducerea operaţiilor de produs scalar şi vectorial, precum şi a mărimilor bivectoriale şi trivectoriale.

Măsura mărimilor stabileşte distincţia dintre vectori şi bivectori şi arată necesitatea de a se extinde cadrul Calculului vectorial, punând în evidenţă faptul că operaţiile de produse de mărimi conduc la tensori.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, *pornind dela necesitatea de a reprezenta geometric şi de a măsura mărimile fizice, deci de a constitui o teorie geometrică a mărimilor fizice, începând cu cele mai simple, suntem conduşi la reprezentarea vectorială şi la anumite reguli de calcul cu vectorii.* Aceste reguli, rezultând din proprietăţile mărimilor fizice vectoriale, se aplică mărimilor geometrice vectoriale şi sunt adoptate ca reguli de Calcul vectorial.

Astfel prezentat, *Calculul vectorial este o metodă a teoriei geometrice a mărimilor fizice,* aplicabilă tuturor mărimilor care se obţin prin operaţiile vectoriale, deci şi mărimilor mai complexe astfel obţinute şi care intervin în diverse fenomene fizice sau în diverse teorii geometrice.

Desvoltarea metodelor vectoriale este justificată prin aplicaţiile lor în fizica matematică, în geometrie, mecanică şi în tehnică şi constitue un exemplu de metodă matematică constituită pe baze geometrico-fizice şi desvoltată în lumina aplicaţiilor sale.

B. BAZELE FIZICE ALE CALCULULUI VECTORIAL. MĂRIMI SCALARE ŞI VECTORIALE

§ 7. Mărimi fizice scalare

Măsura mărimilor fizice şi geometrice celor mai simple, prin compararea unei mărimi date cu o mărime de aceeaşi specie, aleasă ca etalon, se exprimă printr'un număr.

Acest mod de măsură se aplică la numeroase mărimi uzuale, dar nu este general, deoarece există mărimi a căror măsură nu se poate exprima printr'un singur număr.

Conform cu definiţia dată în § 5, o specie de mărimi în care toate mărimile pot fi comparate cu o singură mărime şi deci măsurate printr'un număr, constitue o specie măsurabilă cu o unitate.

O astfel de mărime este reprezentată prin numărul ce exprima măsura sa, cu condiţia de a preciza unitatea utilizată. Dacă de exemplu, în specia greutăţilor, care este măsurabilă cu o unitate, o mărime va fi reprezentată prin măsura sa 5, înţelegem prin aceasta că este egală cu de cinci ori greutatea de un kilogram.

Schimbarea unităţii atrage o schimbare a măsurii, deci a numărului prin care este caracterizată mărimea. Dacă această mărime depinde de alte mărimi, măsura sa depinde de măsura acestora şi în general se schimbă printr'o schimbare a unităţilor lor. Totuşi această măsură poate fi invariantă faţă de schimbările acestor unităţi (a se vedea § 5), cum este în cazul unghiului.

Poziţia corpurilor în spaţiu unele faţă de altele este determinată printr'un sistem de referinţă. Măsurile unor mărimi fizice şi geometrice depind de coordonatele punctelor anumitor corpuri şi, deci, de alegerea sistemului de referinţă.

Vom numi *mărime scalară* orice mărime măsurabilă cu o unitate a cărei măsură este invariantă faţă de schimbarea sistemului de referinţă al spaţiului.

Lungimea unui segment este o mărime geometrică scalară, deoarece este independentă de alegerea sistemului de referinţă.

In general, se consideră ca mărimi scalare toate mărimile determinate printr'un număr. Această definiţie nu este riguroasă, după cum ne putem da

Scanned with OKEN Scanner

seama dacă o aplicăm ariilor plane. In adevăr, fără a deplasa sistemul de coordonate ortogonale, este suficient să schimbăm sensul pozitiv al uneia dintre axe pentru ca ariile să-şi schimbe semnul.

Pentru a ne da seama de caracterul scalar al unei mărimi este necesar să o raportăm la spaţiu, deci să stabilim relaţiile ce există între unitatea sa de măsură şi sistemul de referinţă al spaţiului.

Mărimile scalare sunt mărimi raportate la spaţiu, măsurabile cu o unitate şi de măsură independentă de alegerea sistemului de referinţă.

Alături de mărimile scalare vor interveni în aplicaţii mărimi fizice sau geometrice, măsurabile deasemenea cu o unitate, dar a căror măsură nu este invariantă faţă de schimbarea sistemelor de referinţă ale spaţiului.

Vom numi *mărime pseudo-scalară* orice mărime măsurabilă cu o unitate, a cărei mărime este pseudo-invariantă, faţă de schimbarea sistemului de referinţă al spaţiului. Cu alte cuvinte, această măsură se amplifică printr'un factor în urma unei schimbări a sistemului de referinţă. Un exemplu de mărime pseudo-scalară este aria unui paralelogram dintr'un plan pentru schimbările de axe de coordonate în acel plan.

Cum la început nu vom folosi măsura mărimilor ca mijloc de reprezentare, ci simbolurile geometrice respective, nu vom face distincţie deocamdată între mărimi scalare şi pseudo-scalare, deoarece regulile de calcul sunt valabile pentru toate mărimile măsurabile cu o unitate.

Vom lămuri noţiunea de mărime scalară, cu această rezervă, prin câteva exemple.

Presiunea atmosferică într'un punct de pe pământ sau din aer este o mărime fizică scalară; ea se măsoară, de exemplu, în milimetri coloană de mercur, unitatea practică de presiune, *atmosfera*, corespunzând înălţimii de 760 mm a unei coloane de mercur (în tehnică, presiunea se măsoară în kilograme pe centimetru pătrat).

Dacă notăm prescurtat cu Atm unitatea practică de presiune fizică şi cu at unitatea de presiune tehnică, avem relaţiile:

$$1\ \text{Atm} = 760\ \text{mm col Hg} = 1{,}033\ \text{at},$$
$$1\ \text{at} = 1\ \text{kg/cm}^2 = 735{,}5\ \text{mm col. Hg},$$

care exprimă măsurile celor două unităţi în mm col. Hg şi a primei prin a doua.

O altă mărime fizică scalară este cantitatea de căldură, care se măsoară prin unitatea sa kilocaloria, — cantitatea de căldură ce ridică temperatura unui kg apă chimic pură dela 14,5°C la 15,5°C, la presiunea atmosferică normală.

La rândul său Geometria oferă un număr mare de mărimi geometrice scalare şi pseudo-scalare, începând cu lungimea unui segment, aria unui poligon, volumul poliedrelor, etc. Numerele care caracterizează mărimile scalare, raportate la anumite unităţi, se numesc *scalari*.

In formulele matematice, mărimile scalare sunt reprezentate de scalarii respectivi. Calculul cu scalari urmează regulile calculului cu numere. Folosind convenţii specifice fiecărui caz în parte, se introduc şi scalari negativi, astfel încât toate operaţiile algebrice sunt posibile.

Pentru a da un exemplu, este suficient să considerăm diferenţele de temperaturi, care se adună şi se scad ca numerele reale. Odată fixată, în mod *convenţional*, temperatura egală cu zero (temperatura de topire a gheţei), există temperaturi pozitive şi negative, corespunzând unor fenomene bine determinate, ca punctele de topire sau de fierbere ale diferitelor substanţe.

Scanned with OKEN Scanner

§ 8. Mărimi fizice orientate

Intervenţia unei mărimi fizice într'un fenomen se face simţită prin modificările de stare pe care le produce. Astfel, o cantitate de căldură produce o anumită temperatură în condiţii determinate, iar variaţia temperaturii modifică la rândul său înălţimea coloanei termometrice.

Există mărimi fizice, a căror prezenţă într'un fenomen se caracterizează prin efecte ce se manifestă într'o anumită direcţie a spaţiului.

O forţă atractivă, de exemplu o atracţie electrică, deplasează punctele materiale electrizate în direcţia centrului de atracţie, dacă acestea se găsesc în repaus. Viteza se manifestă printr'o deplasare în direcţia tangentei la traiectorie, iar acceleraţia modifică această direcţie producând, în general traectorii curbe.

Astfel de mărimi fizice nu pot fi caracterizate printr'un singur număr, deoarece acesta nu conţine nicio indicaţie spaţială. Determinarea lor necesită o reprezentare geometrică, astfel încât pe lângă intensitatea efectului trebue să fie puse în evidenţă direcţia şi sensul în care se manifestă. Vom numi mărimi *fizice orientate*, mărimile caracterizate printr'o mărime geometrică orientată a spaţiului: o direcţie, sau un element plan, etc.

Viteza, acceleraţia, forţele, tensiunile superficiale, tensiunile interioare în corpurile elastice, câmpul electric, câmpul magnetic sunt exemple de mărimi orientate.

Translaţia. Segmentul orientat. Un fenomen simplu, care scoate în evidenţă o mărime orientată este translaţia. Se numeşte translaţie o mişcare a unui corp solid în care toate punctele descriu segmente paralele şi egale.

Din punct de vedere geometric, translaţia poate fi considerată ca o deplasare a întregului spaţiu în el însuşi, în care orice segment de dreaptă AB se transformă într'un segment de dreaptă paralel şi egal A_1B_1 (fig. 1).

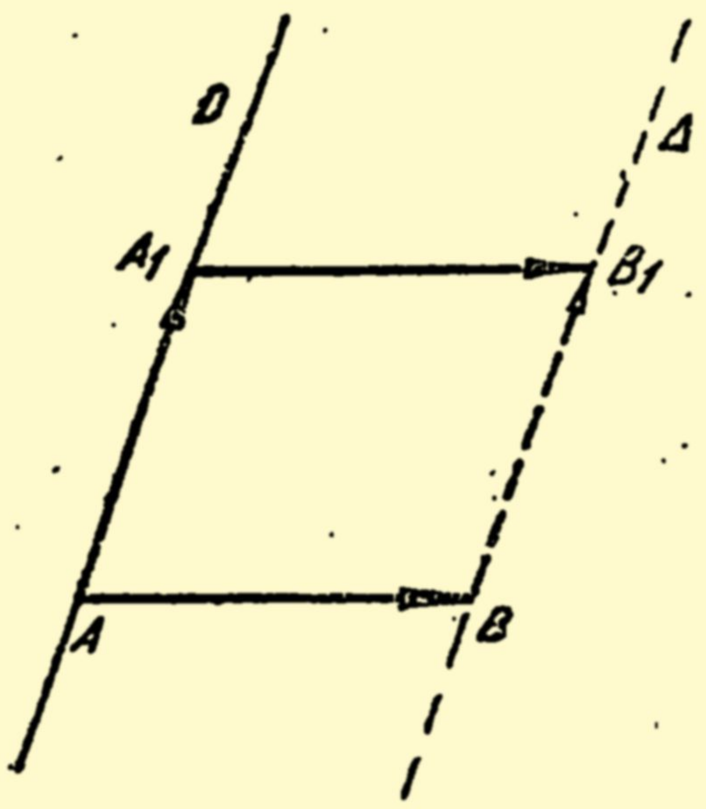


Fig. 1

Se vede imediat că pentru a cunoaşte poziţia A_1 a unui punct oarecare A după deplasare, este suficient să cunoaştem segmentul AA_1 având originea în A şi extremitatea în A_1. Un segment în care se specifică originea A şi extremitatea A_1, deci un sens de parcurs, se numeşte *segment orientat* şi se notează $\overline{AA_1}$.

Un astfel de segment mărgineşte o porţiune dintr'o dreaptă D, care este perfect determinată în spaţiu când este dat segmentul $\overline{AA_1}$. Invers, fiind dată dreapta D, segmentul este determinat dacă se dă originea sa A, lungimea segmentului şi sensul în care este parcurs.

Segmentul $\overline{AA_1}$ este tot atât de bine determinat dacă se cunoaşte originea sa A, direcţia dreptei D, lungimea AA_1 şi sensul de parcurs.

Cunoscând un singur segment orientat $\overline{AA_1}$, translaţia este perfect determinată, fiindcă putem construi orice alt segment orientat $\overline{BB_1}$, care reprezintă deplasarea unui punct B, ducând prin B o paralelă Δ la D şi luând în acelaşi sens pe Δ un segment BB_1 având lungimea egală cu AA_1. Segmentele orientate

Scanned with OKEN Scanner

se notează ca mai sus cu o bară pusă deasupra celor două litere, care indică originea şi extremitatea: $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$. Două segmente orientate, care au aceeaşi direcţie, aceeaşi lungime şi acelaşi sens, diferind doar prin origine se numesc *echipolente.*

Segmentele $\overline{AA_1}$ şi $\overline{BB_1}$ sunt echipolente, deasemenea segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{A_1B_1}$ sunt echipolente.

Fiind date două segmente orientate echipolente $\overline{AB}$ şi $\overline{A_1B_1}$, ele pot fi suprapuse printr'o translaţie, în care punctele A şi B descriu segmentele echipolente $\overline{AA_1}$ şi $\overline{BB_1}$. Orice alt punct M. din spaţiu va descrie un segment $\overline{MM_1}$, echipolent cu $\overline{AA_1}$.

Folosind noţiunea de echipolenţă, translaţia poate fi definită ca o deplasare în care toate punctele spaţiului descriu segmente orientate echipolente. Cunoaşterea unuia singur dintre aceste segmente determină translaţia.

Segmentul orientat, considerat ca figura formată de două puncte A, B ordonate, este un obiect geometric. In definiţia translaţiei, segmentului orientat i s'au asociat o direcţie, o lungime şi un sens, deci elemente geometrice comparabile prin egalitate, adică mărimi geometrice.

Este important de observat că aceste elemente determină translaţia, deoarece originea segmentului este arbitrară. Prin urmare:

Translaţia este un fenomen fizic, reprezentat geometric printr'o mărime geometrică asociată mulţimii tuturor segmentelor orientate, echipolente cu un segment orientat $\overline{AA_1}$ *dat.*

Este deci necesar să precizăm legătura dintre segmentul orientat şi translaţie, punând în evidenţă mărimea geometrică asociată segmentului orientat. Această mărime, reprezentând geometric un fenomen fizic, reprezintă în acelaşi timp o mărime fizică ce caracterizează fenomenul translaţiei.

§ 9. Vectori. Mărimi vectoriale

Pentru a determina o translaţie, nu este necesar să cunoaştem un *anumit segment orientat,* ci unul *oarecare* din mulţimea tuturor segmentelor orientate, având o direcţie, un sens şi o lungime date.

In mulţimea tuturor segmentelor orientate posibile, care este un obiect geometric, totalitatea celor ce au o anumită direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime formează o clasă, caracterizată prin aceste proprietăţi comune tuturor membrilor ei.

Vom numi *vector liber* clasa tuturor segmentelor orientate având o direcţie, un sens şi o lungime date.

Mai precis, *clasa tuturor segmentelor orientate, care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime, defineşte o mărime geometrică, numită vector liber.*

Vectorul liber este caracterizat prin direcţia, sensul şi lungimea sa, comune tuturor segmentelor clasei. Poziţia sa în spaţiu este arbitrară; el poate fi reprezentat prin oricare din segmentele orientate care aparţin clasei respective. Deaceea, putem substitui mărimii clasa tuturor segmentelor caracterizate prin ea.

Scanned with OKEN Scanner

Translaţia este un fenomen caracterizat printr'un vector liber. Aceasta înseamnă că aplicând în fiecare punct A, B, etc. din spaţiu, segmentul orientat care are direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber asociat translaţiei, obţinem poziţiile A_1, B_1, etc. ale punctelor după deplasare.

Invers, un vector liber este determinat de clasa tuturor segmentelor orientate, care se pot deduce prin translaţia unui segment dat[1]).

Există şi alte mărimi caracterizate şi reprezentabile prin segmente orientate. Astfel o forţă, care acţionează asupra unui corp solid, se caracterizează prin direcţia, sensul şi intensitatea sa, ceea ce se constată experimental prin efectele produse.

Această mărime fizică poate fi reprezentată geometric printr'un segment orientat, având ca lungime intensitatea forţei evaluată după o scară convenţională (1 kg = 1 cm, 1 tonă = 2 cm, etc.). Originea segmentului reprezentativ este în punctul de aplicaţie al forţei, direcţia sa este direcţia de acţiune, iar sensul este sensul în care acţionează forţa.

Statica solidelor ne arată însă, că o forţă poate fi deplasată pe suportul său fără ca efectul asupra corpului solid să fie modificat. Reprezentarea geometrică a forţei poate fi deci făcută prin oricare din segmentele orientate ce au originea într'un punct oarecare pe dreapta suport a forţei şi sunt echipolente cu cel iniţial.

Clasa tuturor segmentelor orientate $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, având ca suport o dreaptă dată D (fig. 2), acelaşi sens şi aceeaşi lungime, defineşte un *vector alunecător*. Acesta este deci o mărime geometrică asociată tuturor segmentelor orientate, având ca suport o dreaptă dată, un sens şi o lungime determinate.

Un vector alunecător este reprezentat prin oricare dintre segmentele orientate $\overline{AB}$ ce îndeplineşte aceste condiţii. O forţă aplicată unui corp solid este caracterizată printr'un vector alunecător.

In sfârşit, există şi mărimi fizice caracterizate printr'un segment orientat complect determinat. Viteza sau acceleraţia unui punct material în mişcare sunt exemple de astfel de mărimi.

Vom numi *vector legat* mărimea geometrică asociată unui segment orientat având originea într'un punct determinat M, o direcţie, un sens şi o lungime MN date. Un *vector legat* având originea în M şi extremitatea în N se notează $\overline{MN}$ (fig. 2).

---

[1]) Acest fel de împărţire abstractă a unor elemente în clase, fiecare clasă fiind perfect caracterizată printr'un reprezentant al său, este caracteristică raţionamentului matematic şi este utilizat în toate ramurile acestei ştiinţe. Să considerăm, de exemplu, mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive, negative sau nule. Referitor la „paritatea" lor faţă de un număr întreg dat, de exemplu faţă de numărul 3, putem împărţi mulţimea tuturor numerelor întregi în trei clase: numerele întregi divizibile cu 3, acelea care împărţite cu 3 ne dau restul 1 şi acelea care împărţite cu 3 ne dau restul 2. Două clase nu au aici un element comun, două numere aflându-se în aceeaşi clasă dacă, şi numai dacă, diferenţa lor este divizibilă cu 3. Notând aceste clase cu 0^*, 1^* şi 2^*, avem următoarele reguli de calcul:

$$0^*+2^*=2^* \qquad 1^*+2^*=0^* \qquad 0^*+1^*=1^*$$
$$2^*+0^*=2^* \qquad 2^*+1^*=0^* \qquad 1^*+0^*=1^*$$
$$2^*+2^*=1^*$$

ceeace revine la a spune de exemplu, că un multiplu de 3, adunat cu un multiplu de 3 plus 2 ne dă un multiplu de 3 plus 2, sau că un multiplu de 3 plus 1, adunat cu un multiplu de 3 plus 2 ne conduce la un multiplu de 3, etc.

Scanned with OKEN Scanner

S'ar părea că noţiunea de vector liber conţine şi pe cele de vector alunecător şi vector legat.

In adevăr, impunând clasei de segmente orientate care defineşte vectorul liber condiţia ca aceste segmente să aibă nu numai direcţia comună, ci un suport comun, obţinem vectorul alunecător, iar prin condiţia ca segmentele să aibă o origine determinată, clasa se reduce la un singur element, vectorul legat. Vom vedea totuşi că această subsumare nu corespunde definiţiei mărimilor măsurabile, deoarece adunarea vectorilor alunecători şi legaţi nu este posibilă pentru doi vectori oarecare.

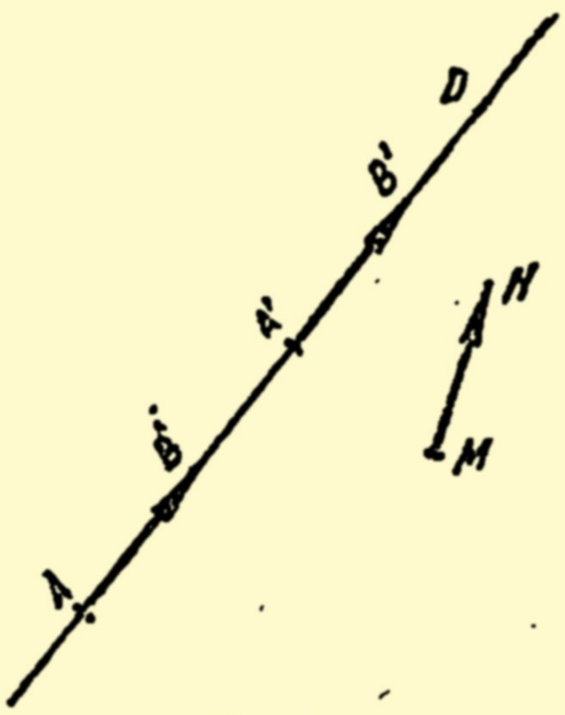


Fig. 2

Mărimile fizice caracterizate printr'o direcţie în spaţiu, printr'un sens şi printr'o măsură, pot fi reprezentate geometric prin vectori.

Vom numi *mărime vectorială* orice mărime reprezentabilă geometric printr'un vector.

Calculul cu mărimi fizice vectoriale, impus de natura fenomenelor în care intervin aceste mărimi, pune în lumină câteva reguli, deduse întâi pe cale experimentală şi traduse apoi matematic. Aceste reguli stau la baza Calculului vectorial şi sunt analoage, dar nu identice, cu regulile calculului algebric.

§ 10. Notaţii şi definiţii vectoriale

Vectorii sunt notaţi cu anumite simboluri pentru a putea fi folosiţi în calcule. O notaţie des întrebuinţată şi care va fi utilizată şi de noi este prin litere supraliniate, de exemplu

$$\overline{V},\ \overline{v},\ \overline{W},\ \overline{w},\quad \overline{\alpha},\ \overline{\beta},\ \overline{\omega},\quad \overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}.$$

Vectorii legaţi sunt notaţi ca segmentele orientate:

$$\overline{AB},\ \overline{OM},\ \overline{PQ},$$

prima literă indicând originea, iar a doua extremitatea. Se mai întrebuinţează şi alte notaţii, de exemplu prin caractere grase.

$$V,\ a,\ b.$$

Această ultimă notaţie atrage atenţia şi deosebeşte vizibil vectorii de scalari, dar are defectul de a nu putea fi utilizată în scrierea pe tablă sau pe caete decât cu eforturi suplimentare. Notaţiile prin caractere gotice sau prin litere supraliniate de săgeţi în loc de bare sunt mai puţin practice.

Este dela sine înţeles că aceste notaţii nu caracterizează vectorii, în sensul că simpla scriere a simbolului nu defineşte vectorul, ci este necesar ca notaţia să fie întovărăşită de indicaţia caracteristicelor respective. Scriind de exemplu $\overline{V}$, vom adăuga direcţia, sensul şi lungimea segmentului orientat care reprezintă vectorul $\overline{V}$. Această indicaţie este dată pentru unii vectori, iar pentru alţii rezultă din expresia lor cu ajutorul unor vectori cunoscuţi.

Scanned with OKEN Scanner

Vom vedea că putem caracteriza şi numeric vectorii, şi aceasta ne va conduce la o aprofundare a noţiunii de vector, necesară calculului cu unele mărimi fizice, a căror reprezentare geometrică prin segmentele orientate nu apare atât de evidentă ca în exemplele considerate.

Chiar din acest moment vom face observaţia că, întrucât vectorii servesc pentru reprezentarea unor mărimi fizice, lungimea unui vector reprezintă, la o scară convenabilă, o valoare numerică asociată mărimii fizice vectoriale respective, cum este intensitatea unei forţe, mărimea unei viteze, etc.

Deaceea vom numi *modul* mărimea scalară reprezentată geometric prin lungimea vectorului, adică printr'un număr pozitiv. Modulul unui vector se notează fie prin aceleaşi litere ca vectorul suprimând bara, fie încadrând simbolul vectorului între două bare

$$\text{mod. } \overline{V} = V = |\overline{V}|.$$

Vectorul liber este deci o mărime care poate fi considerată ca definită prin

1) *modul* (mărime, intensitate, lungime);

2) *direcţie*;

3) *sens*.

Prin adăugarea de noi restricţii ca acelea de a avea un suport sau o origine determinată, obţinem un vector alunecător, respectiv legat. Operaţiile vectoriale se definesc pentru vectorii liberi. In aceste operaţii înţelegem prin vector, fie întreaga clasă care defineşte vectorul liber, fie unul oarecare din membrii acesteia. Ele pot fi adaptate cu anumite restricţii şi vectorilor alunecători sau legaţi, după cum vom vedea.

Egalitatea vectorilor. Două mărimi fizice sunt egale când pot fi înlocuite una prin alta fără ca fenomenul să fie modificat.

Translaţia, fiind definită de oricare dintre segmentele care alcătuesc clasa ce determină vectorul liber prin care ea este determinată, ne arată în ce caz trebue să considerăm ca egali doi vectori liberi.

Vom spune că *vectorul* $\overline{A}$ *este egal cu vectorul* $\overline{B}$, dacă amândoi au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens şi vom nota simbolic egalitatea astfel:

$$\overline{A} = \overline{B}.$$

Egalitatea vectorilor are toate proprietăţile egalităţii algebrice.

1. Este *simetrică*, adică dacă $\overline{A} = \overline{B}$, atunci şi $\overline{B} = \overline{A}$.

2. Este *reflexivă*, adică $\overline{A} = \overline{A}$.

3. Este *transitivă*, adică dacă $\overline{A} = \overline{B}$ şi $\overline{B} = \overline{C}$, atunci $\overline{A} = \overline{C}$.

Egalitatea vectorilor astfel definită înseamnă identitatea claselor de segmente orientate cărora le sunt asociaţi vectorii consideraţi; orice segment dintr'o clasă aparţine şi celeilalte.

Aceste proprietăţi se verifică uşor experimental în cazul vectorului translaţiei sau în cazul forţelor şi se extind şi la celelalte mărimi vectoriale, fie prin verificare cu ajutorul efectelor lor, fie prin deducţie cu ajutorul expresiilor lor, în funcţie de mărimi verificate. Orice mărime vectorială trebue să se bucure de aceste proprietăţi pentru a putea fi introdusă în Calculul vectorial.

Scanned with OKEN Scanner

Pe orice dreaptă se disting două sensuri opuse. Dacă doi vectori diferă numai prin sens, se numesc de *sens contrar* sau *opuși*. Vom spune că $\overline{U}$ este *opusul* lui $\overline{V}$ dacă $\overline{U}$ are aceeași direcție și același modul cu $\overline{V}$, dar sensul contrar și vom scrie:

$$\overline{U} = -\overline{V}.$$

Pentru a scrie că doi vectori nu sunt egali, vom intrebuința același semn ca în algebră: $\overline{A} \neq \overline{B}$.

Facem observația că *pentru a stabili egalitatea sau inegalitatea a două mărimi vectoriale nu este necesar să le calculăm valorile numerice*, ceeace pentru vectori înseamnă că *egalitatea sau inegalitatea nu necesită calculul modulelor:* doi vectori sunt egali dacă printr'o translație coincid și inegali, în caz contrar.

In cazul vectorilor alunecători, translația se face dealungul suportului comun: două forțe aplicate unui solid sunt egale dacă au același suport și pot fi înlocuite una prin cealaltă fără să știm ce intensitate are fiecare din ele. Egalitatea vectorilor alunecători presupune că ei au același suport și că pot fi suprapuși printr'o translație dealungul acestui suport. Doi vectori legați sunt egali, dacă segmentele orientate, cărora le sunt asociați, coincid.

§ 11. Definiția proiectiv-afină a vectorilor

In reprezentarea mărimilor fizice caracterizate prin direcție, sens și măsură cu ajutorul vectorilor, măsurii îi corespunde lungimea segmentului orientat, când comparăm mărimile cu aceași direcție.

Ori, prin măsura acestor mărimi se înțelege numărul ce rezultă din compararea lor cu o mărime de aceeași specie, care are aceeași direcție cu cea măsurată. Nu este obligatoriu că măsurile a două mărimi de direcții diferite să fie comparabile printr'o unitate scalară comună. Așa, de exemplu, putem alege ca unitate de forță pe o direcție dina, iar pe alta, kilogramul.

Reprezentând măsurile prin lungimi de segmente, suntem îndemnați să credem că trebue să putem compara unitățile pe toate direcțiile din spațiu. In realitate, noțiunea de vector nu ne obligă să comparăm între ele lungimile a două segmente oarecare ale spațiului, adoptând o unitate comună de măsură a acestor lungimi, deci o unitate comună de măsură a modulelor vectorilor spațiului. Deaceea, vom da o nouă definiție vectorului, independentă de noțiunea de lungime.

Vom numi *segment orientat* $\overline{AB}$ perechea de puncte ordonate A, B, în care vom specifica originea A și extremitatea B fără a asocia acestei noțiuni mulțimea punctelor cuprinse între A și B pe dreapta AB. Prin aceasta vom face abstracție și de lungimea segmentului AB definit anterior.

Două segmente orientate $\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$ sunt *echipolente* dacă, și numai dacă, mijlocul O al segmentului $\overline{AB'}$ coincide cu mijlocul segmentului $\overline{A'B}$[1]).

[1]) *E. Dubnov*, Calcul vectorial, ed. 2, Moscova-Leningrad, 1950, bazează pe această definiție a egalității segmentelor orientate definiția vectorilor, independent de noțiunile de direcție și lungime, numind vector perechea ordonată de puncte (A, B).

Scanned with OKEN Scanner

In acelaşi timp, vom face observaţia că mijlocul unui segment poate fi definit fără a defini în prealabil noţiunea de lungime. El este conjugatul armonic al punctului dela infinit al dreptei în raport cu capetele segmentului. Prin urmare definiţia echipolenţei este independentă de noţiunea de lungime.

Fiind dat un segment orientat $\overline{AB}$ şi un punct oarecare A' din spaţiu, există un segment orientat $\overline{A'B'}$ şi numai unul echipolent cu $\overline{AB}$.

In adevăr, fie O mijlocul segmentului $\overline{A'B}$ (fig. 3). Pe dreapta AO există un punct B' şi numai unul, astfel încât O să fie mijlocul segmentului $\overline{AB'}$. Deci segmentul $\overline{A'B'}$ există şi este unic determinat.

Construcţia punctului B' pe dreapta AO se face cu ajutorul raportului; anarmonic, care este independent de noţiunea de lungime.

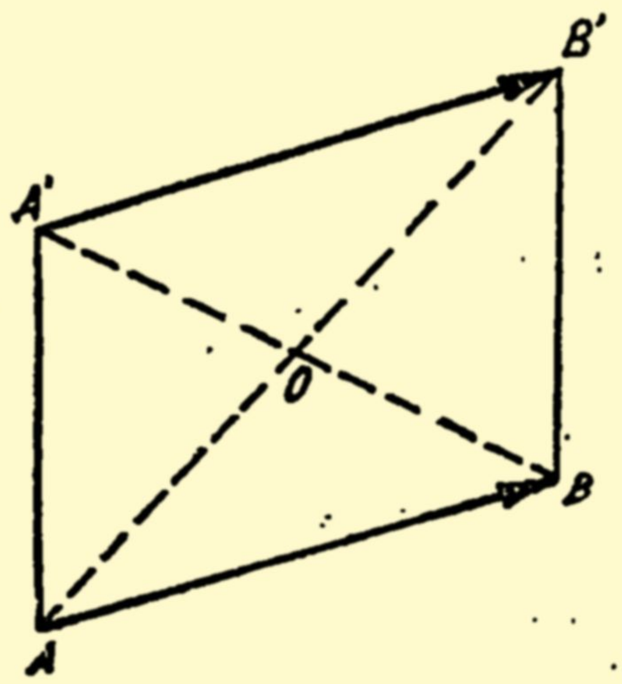


Fig 3

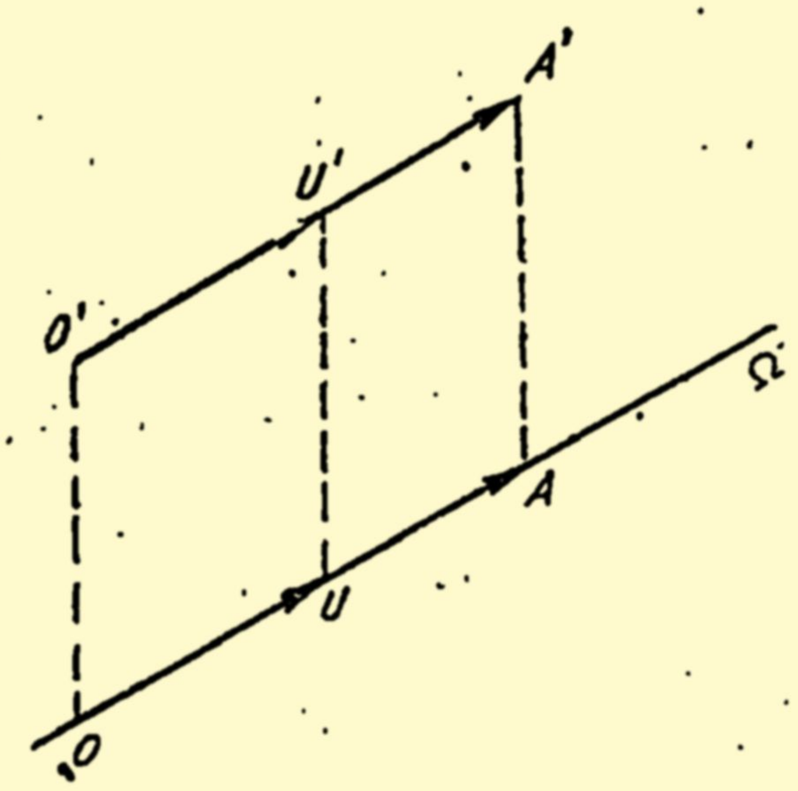


Fig. 4

Mulţimea tuturor segmentelor din spaţiu, echipolente cu un segment $\overline{AB}$, formează o clasă, deoarece echipolenţa definită mai sus are toate proprietăţile egalităţii, cum se poate verifica uşor.

Clasa tuturor segmentelor orientate, echipolente cu un segment dat, se va numi *vector liber*.

Ca şi în definiţia anterioară, vom sublinia că *vectorul liber este mărimea geometrică definită de această clasă* şi reprezentată prin oricare din membrii ei.

Fiind date trei puncte coliniare O, U şi A vom spune că segmentele $\overline{OU}$ şi $\overline{OA}$ sunt *coliniare* (fig. 4).

Notând cu Ω punctul dela infinit al dreptei OA, vom numi *măsura* segmentului $\overline{OA}$ în raport cu segmentul $\overline{OU}$ raportul anarmonic $\lambda=(O,\Omega,U,A)$ al punctelor O, Ω, U şi A.

Este uşor de văzut că dacă introducem noţiunea de lungime, vom putea scrie

$$\lambda=\frac{\overline{OA}}{\overline{OU}},$$

cu semnificaţia cunoscută a raportului de segmente coliniare; deci noua definiţie extinde pe cea anterioară, având în plus calitatea de a fi independentă de noţiunea de lungime.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă măsura segmentului $\overline{OA}$ în raport cu $\overline{OU}$ este λ vom scrie pe scurt

$$\overline{OA} = \lambda \overline{OU}.$$

Măsura oricărui segment $\overline{O'A'}$, echipolent cu $\overline{OA}$, în raport cu segmentul $\overline{O'U'}$, echipolent cu $\overline{OU}$, va fi egală cu λ și reciproc, dacă măsura lui $\overline{O'A'} = \overline{OA}$ în raport cu $\overline{O'U'}$ este λ, atunci $\overline{O'U'} = \overline{OU}$, pe baza proprietăților proiective ale raportului anarmonic.

Deci: *măsura segmentelor este invariantă în raport cu echipolența.*

Vom spune că doi vectori sunt *coliniari* când segmentele respective $\overline{OA}$ și $\overline{OU}$ sunt coliniare. In acest caz, proprietatea precedentă ne permite să definim măsura vectorului $\bar{a} = \overline{OA}$ în raport cu vectorul $\bar{u} = \overline{OU}$ coliniar cu el, ca fiind măsura λ a segmentului $\overline{OA}$ în raport cu segmentul $\overline{OU}$. Vom scrie atunci

$$\bar{a} = \lambda \bar{u}.$$

Vom vedea în cele ce urmează că noua definiție a vectorilor ne permite să stabilim o bună parte dintre proprietățile și operațiile vectoriale.

Corespondența între caracteristicele vectorului liber în cele două definiții este următoarea: *direcția este dată de punctul dela* ∞ *al dreptei, modulul de* $|\lambda|$, *iar sensul de semnul lui* λ. Aceasta presupune că admitem ca sens pozitiv sensul lui $\overline{OU}$, pe care îl considerăm ca unitate pentru toți vectorii coliniari cu el.

Această definiție a vectorului are un caracter *proiectiv*, punctele dela infinit ale dreptelor fiind punctele de intersecție cu planul considerat ca plan dela infinit. Fiecare dreaptă finită, deci care nu este conținută în planul dela infinit, conține un punct la finit și numai unul, respectiv punctul ei de intersecție cu planul dela infinit[1]).

Dacă însă admitem postulatul paralelelor, planul dela infinit nu mai aparține spațiului, și două drepte, care se intersectează într'un punct din acest plan, sunt paralele.

Mijlocul unui segment AB' poate fi obținut construind un paralelogram $ABB'A'$ având pe AB' ca diagonală și considerând acest paralelogram ca un patruunghi complect (fig. 3). Mijlocul O al segmentului AB' va fi intersecția sa cu celelaltă diagonală $A'B$.

Vom putea atunci defini segmentele orientate echipolente astfel: *două segmente orientate* $\overline{AB}$ *și* $\overline{A'B'}$ *sunt echipolente dacă figura* $ABB'A'$ *este un paralelogram în care* AB' *și* BA' *sunt diagonale.*

Este clar că printr'un punct A' se poate duce un segment $\overline{A'B'}$ echipolent cu un segment dat $\overline{AB}$ și numai unul.

In adevăr, unind pe A cu A', din punctul A' se poate duce o paralelă și numai una la $\overline{AB}$, iar din B o paralelă și numai una la $\overline{AA'}$. Acestea sunt concurente, deoarece în caz contrar s'ar putea duce din B două paralele $\overline{BA}$ și $\overline{BB'}$ la $\overline{A'B'}$. Vom numi *translație* transformarea spațiului în care

[1]) *N. V. Efimov*, Op. cit., p. 330.

Scanned with OKEN Scanner

orice punct M se transformă într'un punct M', astfel încât segmentul $\overline{MM'}$ este echipolent cu un segment orientat dat $\overline{AA'}$.

Vom putea adapta şi definiţia măsurii segmentelor $\overline{OA}$ cu ajutorul unei unităţi coliniare $\overline{OU}$ la cazul considerat, în care punctele dela infinit nu aparţin spaţiului.

Cum toate definiţiile şi proprietăţile introduse sunt bazate pe echipolenţă, aşa cum a fost definită mai sus, orice transformare geometrică a spaţiului care transformă vectorii echipolenţi în vectori echipolenţi, va lăsa invariante aceste definiţii.

Deoarece însă aceste transformări se numesc *afine*, vom numi deasemenea *afină* definiţia dată vectorilor şi măsurii lor, semnificaţia acestui termen urmând să fie precizată şi adâncită în mai departe.

§ 12. Adunarea vectorială

Două translaţii aplicate succesiv spaţiului au ca rezultat tot o translaţie. Imaginea geometrică a translaţiei fiind un vector liber, compunerea translaţiilor se reprezintă prin compunerea vectorilor. Luând într'un punct O vectorul $\overline{v}_1=\overline{OA_1}$ şi în A_1 vectorul $\overline{v}_2=\overline{A_1A}$, vom nota $\overline{v}=\overline{OA}$ (fig. 5).

Prin prima translaţie O ajunge în A_1, iar prin a doua, din A_1 ajunge în A. Pe de altă parte, prin translaţia rezultantă de vector $\overline{OA}$, punctul O ajunge deasemenea în A.

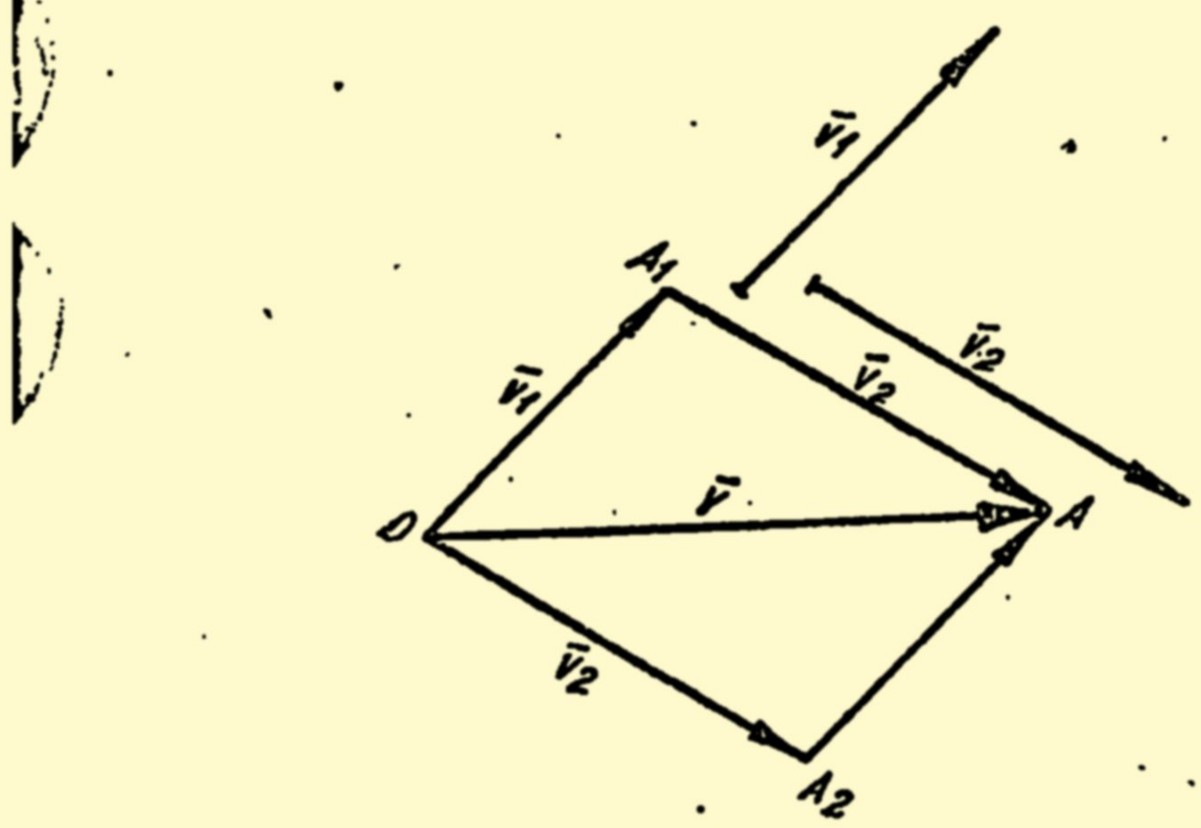


Fig. 5

Deoarece translaţia de vector $\overline{v}$ este rezultanta translaţiilor de vector $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, vom spune că vectorul $\overline{v}$ este *suma* lui $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ scriind, ca în Algebră,

$$\overline{v}=\overline{v}_1+\overline{v}_2. \qquad (5,I)$$

Se vede imediat că efectuând întâi translaţia $\overline{v}_2=\overline{OA_2}$ şi apoi translaţia $\overline{v}_1$ ajungem tot în A, deoarece $\overline{v}_1=\overline{OA_1}=\overline{A_2A}$. Vom putea deci scrie

$$\overline{v}_1+\overline{v}_2=\overline{v}_2+\overline{v}_1. \qquad (6,I)$$

Putem repeta compunerea translaţiilor. Fie $\overline{v}_1=\overline{OA_1}$, $\overline{v}_2=\overline{A_1A_2}$, $\overline{v}_3=\overline{A_2A}$ vectorii corespunzători la trei translaţii succesive, luaţi în punctele O, A_1 şi A_2 (fig. 6). Translaţia $\overline{v}_1+\overline{v}_2$ urmată de translaţia $\overline{v}_3$, constitue o deplasare, care este tot o translaţie $\overline{v}=\overline{OA}$. Vom scrie deci:

$$\overline{v}=(\overline{v}_1+\overline{v}_2)+\overline{v}_3$$

Fig. 6 ne arată că efectuând întâi translaţia $\overline{v}_1$ şi apoi translaţia $\overline{v}_2+\overline{v}_3$ ajungem în A tot printr'o translaţie. Vom scrie deci:

$$(\overline{v}_1+\overline{v}_2)+\overline{v}_3=\overline{v}_1+(\overline{v}_2+\overline{v}_3). \qquad (7,I)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste proprietăţi ale translaţiilor ne conduc la definirea unei operaţii vectoriale, aplicabilă tuturor vectorilor, numită *adunare vectorială (sau sumă geometrică, sumă vectorială).*

Suma a doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ este prin definiţie tot un vector $\bar{v}$, obţinut transportând pe $\bar{v}_1$ cu originea într'un punct O, aşezând originea lui $\bar{v}_2$ în extremitatea A_1 a lui $\overline{OA_1}=\bar{v}_1$ şi unind O cu A, deci $v=\overline{OA}$. Operaţia de adunare se notează cu semnul + ca în formula (5,I) (fig. 5).

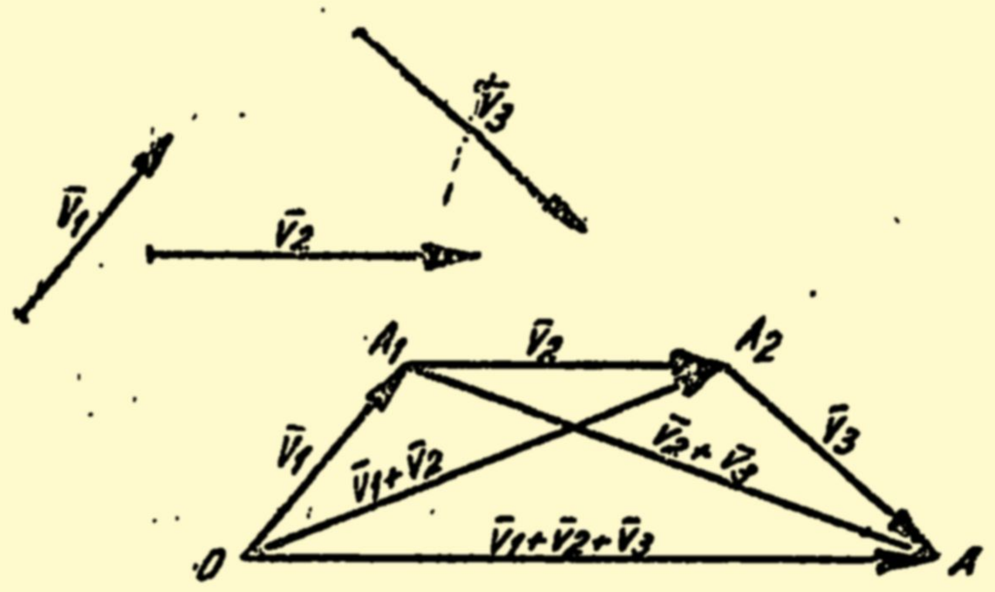


Fig. 6

Adunarea vectorilor este *comutativă* ca în formula (6,I) şi această proprietate conduce la două reguli geometrice:

a) **Regula triunghiului:** suma a doi vectori este vectorul reprezentat prin latura care închide triunghiul format, aşezându-i cap la cap într'o ordine indiferentă.

b) **Regula paralelogramului:** suma a doi vectori este vectorul reprezentat prin diagonala paralelogramului format cu cei doi vectori transportaţi în acelaşi punct.

In regula triunghiului, vectorul sumă are *originea* în originea primului vector şi *extremitatea* în extremitatea celui de al doilea (fig. 5).

In această operaţie, ca şi în toate operaţiile cu vectori liberi folosim, pentru a avea o imagine geometrică, un reprezentant al clasei care defineşte vectorul. Aceasta ne permite de a opera pe elemente determinate, rezultatele fiind valabile pentru oricare dintre ele. In limbaj geometric spunem că *transportăm* un vector într'un anumit punct.

Suma a trei vectori $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, este vectorul sumă a vectorilor $(\bar{v}_1+\bar{v}_2)$ şi $\bar{v}_3$. Regula triunghiului ne arată (fig. 6) că

$$(\bar{v}_1+\bar{v}_2)+\bar{v}_3=\bar{v}_1+(\bar{v}_2+\bar{v}_3),$$

ca în formula (7,I) deci vom spune că adunarea vectorilor este *asociativă*.

Observăm că putem obţine această sumă repetând regula triunghiului, deci aşezând cap la cap pe $\bar{v}_1$ urmat de $\bar{v}_2$ şi apoi de $\bar{v}_3$. Unind originea O cu extremitatea A a conturului poligonal astfel format, obţinem vectorul sumă $\bar{v}$. Aplicând proprietăţile de comutativitate şi asociativitate, vom putea arăta că atât ordinea, cât şi modul în care grupăm cei trei vectori câte doi nu modifică suma lor; de exemplu

$$\bar{v}_1+(\bar{v}_2+\bar{v}_3)=\bar{v}_2+(\bar{v}_1+\bar{v}_3)=(\bar{v}_2+\bar{v}_1)+\bar{v}_3=\bar{v}.$$

Aceasta ne permite să suprimăm parantezele, scriind ca în Algebră,

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3=\bar{v}_1+\bar{v}_3+\bar{v}_2=\bar{v}_3+\bar{v}_1+\bar{v}_2=\text{etc.}, \qquad (8,I)$$

proprietate care nu mai este intuitivă, deoarece conturul poligonal se modifică la fiecare schimbare a ordinei de însumare. Prin aceasta se atrage atenţia

Scanned with OKEN Scanner

asupra posibilităţilor mai largi pe care le oferă un *calcul simbolic* (adică un calcul cu elemente abstracte), în comparaţie cu metodele pur geometrice, cum se poate vedea demonstrând geometric egalităţile (8,I).

Suma $\bar{v}$ a n vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ se defineşte prin recurenţă:

$$\bar{v} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \cdots + \bar{v}_{n-1}) + \bar{v}_n = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \cdots + \bar{v}_n. \qquad (9,I)$$

Ea este asociativă şi comutativă. Putem scrie, de exemplu:

$$\bar{v} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \cdots + \bar{v}_k) + (\bar{v}_{k+1} + \cdots + \bar{v}_n).$$

Această proprietate se exprimă geometric prin *Regula poligonului:* suma a n vectori din spaţiu este vectorul reprezentat prin latura orientată care închide conturul poligonal format prin aşezarea acestor vectori cap la cap într'o ordine oarecare. Acest contur poligonal poate fi redus însumând parţial unii dintre vectori.

In exemplul din fig. 7 vom avea

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 + \bar{v}_5 = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 + (\bar{v}_4 + \bar{v}_5).$$

Conturul poligonal este $OA_1A_2A_3A_4A$ în primul mod de însumare şi se reduce la OA_2A_3A în cel de al doilea.

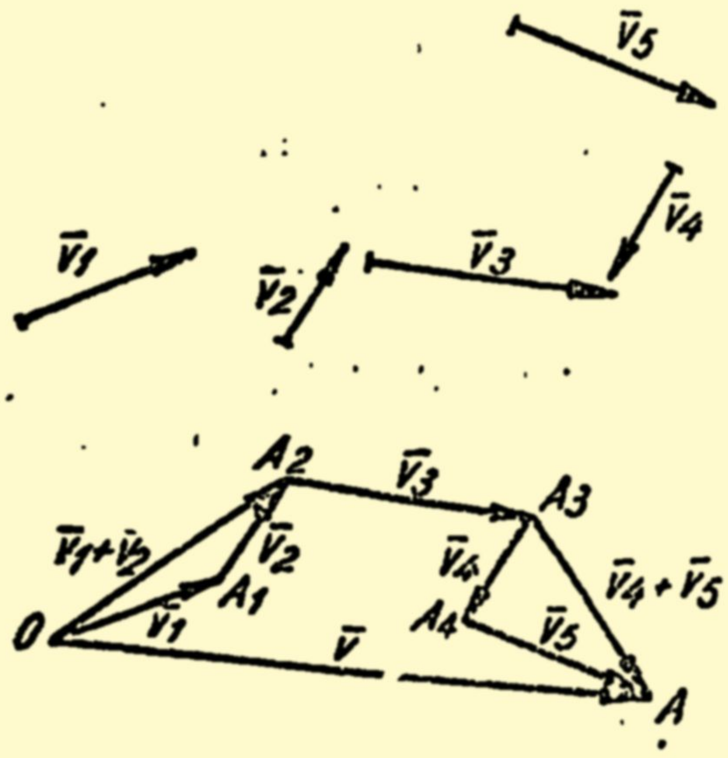


Fig. 7

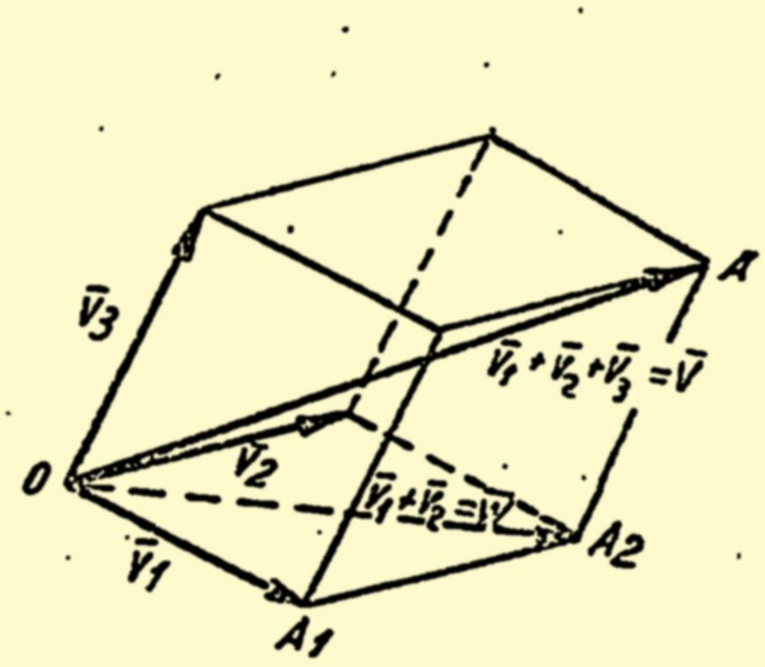


Fig. 8

Suma a trei vectori se poate construi şi prin *regula paralelipipedului*: suma a trei vectori care nu sunt paraleli cu un acelaşi plan este un vector reprezentat prin diagonala paralelipipedului construit pe cei trei vectori daţi.

Fig. 8 arată această construcţie şi echivalenţa sa cu regula poligonului; conturul poligonal al sumei $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ este OA_1A_2A. Se vede deasemenea că

$$\bar{v}_2 + \bar{v}_1 + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{v}.$$

Adunarea vectorilor legaţi se defineşte prin regula paralelogramului, suma a doi vectori legaţi neavând sens decât pentru vectori ce au aceeaşi origine: *regula paralelipipedului se aplică deci şi în cazul vectorilor legaţi având aceeaşi origine O.*

Când un vector $\bar{v}$ este suma mai multor vectori, spunem că aceştia sunt *componente* ale lui $\bar{v}$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin însumări parţiale componentele se pot modifica, suma rămânând aceeaşi. Astfel, dacă în fig. 8 notăm

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{w} = \overline{OA}_2,$$

suma

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$$

se va putea scrie

$$\bar{v} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = \bar{w} + \bar{v}_3;$$

astfel încât $\bar{v}$ are drept componente, fie $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, fie $\bar{w}$, $\bar{v}_3$. Egalitatea vectorială are o proprietate importantă în raport cu adunarea:

Dacă

$$\bar{A} = \bar{B} \quad \text{atunci} \quad \bar{A} + \bar{V} = \bar{B} + \bar{V}; \tag{10,I}$$

deci, *într'o egalitate vectorială se poate aduna în ambii membrii acelaşi vector* $\bar{V}$, *fără ca egalitatea să se schimbe.*

Proprietatea este evidentă, dacă se aplică regula triunghiului, în cazul când vectorul $\bar{B}$ a fost identificat cu $\bar{A}$, dar dacă A şi $\bar{B}$ sunt la rândul lor sume vectoriale, introducerea unei componente suplimentare $\bar{V}$ în sume poate face ca aspectul intuitiv al egalităţilor (10,I) să dispară.

In aplicaţii, această proprietate are un rol important, permiţând, de exemplu, trecerea unui termen dintr'un membru în celălalt.

Vectorul nul. Regula poligonului conduce la introducerea unei noţiuni noi. In adevăr, efectuând adunarea vectorilor prin aşezarea cap la cap se poate ca extremitatea ultimului vector să coincidă cu originea primului.

Astfel, în fig. 9 vectorul $\bar{v}_5$ din suma $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 + \bar{v}_5$ are extremitatea în O. Suma vectorială fiind prin definiţie un vector, pentru a putea menţine operaţia şi în acest caz excepţional, suntem conduşi să interpretăm rezultatul ca un vector a cărui extremitate coincide cu originea.

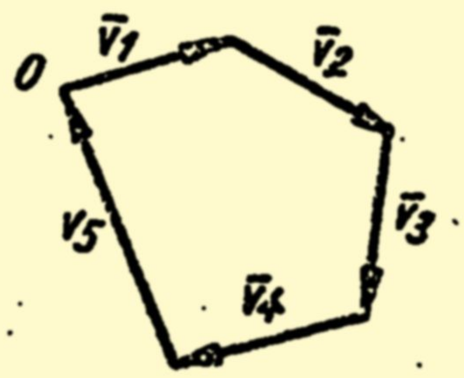


Fig. 9

Un astfel de vector având modulul nul, se va numi *vector nul.* Dacă, în particular, se adună un vector $\bar{v}$ cu opusul său $(-\bar{v})$, se obţine ca sumă un vector nul oricare ar fi vectorul $\bar{v}$ considerat.

Pentru a putea justifica numele de vector nul, trebue să atribuim acestei mărimi o direcţie şi un sens. Acestea vor fi arbitrare, deoarece vectorul nul se obţine din suma $\bar{v} + (-\bar{v})$, oricare ar fi $\bar{v}$.

Vom numi, deci, *vector nul* simbolul vectorial, care reprezintă o mărime vectorială de modul nul şi-l vom interpreta ca un vector de modul nul, având direcţia şi sensul arbitrare.

Vectorul nul este vectorul asociat clasei tuturor perechilor de puncte confundate O şi O', deci $O = O'$.

In calcule vom nota acest vector cu $\bar{0}$ pentru omogenitatea formulelor, suprimând bara când nu se poate face confuzie între vectorul nul şi zero sau un scalar nul.

Vectorul nul are proprietatea importantă legată de adunare de a nu modifica suma geometrică.

$$\bar{A} + \bar{0} = \bar{A}. \tag{11,I}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 13. Scăderea vectorială

Am văzut că adunând un vector cu opusul său suntem conduşi la noţiunea de vector nul. Adunând un vector $\bar{A}$ cu opusul altui vector $\bar{B}$ vom obţine ca sumă tot un vector

$$\bar{C}=\bar{A}+(-\bar{B}).$$

Aplicând regula triunghiului, vectorul $\bar{C}$ se obţine imediat ca în fig. 10, adică reprezentând pe $\bar{A}$ prin $\overline{OM}=\bar{A}$, apoi pe $-\bar{B}$ prin $\overline{MN}=-\bar{B}$ şi făcând suma

$$\bar{C}=\overline{OM}+\overline{MN}=\bar{A}+(-\bar{B}).$$

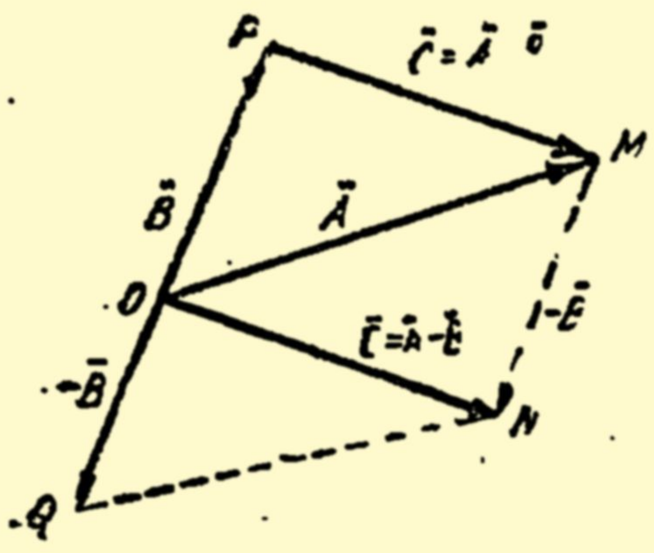


Fig. 10

Vom numi vectorul $\bar{C}$ *diferenţa* vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$.

Diferenţa vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ este vectorul liber reprezentat prin vectorul ce închide triunghiul format de $\bar{A}$ şi $(-\bar{B})$.

Putem deasemenea aplica regula paralelogramului, formând în punctul O paralelogramul vectorilor $\bar{A}=\overline{OM}$ şi $-\bar{B}=\overline{OQ}$, a cărui diagonală este $\bar{A}+(-\bar{B})=\overline{ON}$.

Un alt mod de a obţine grafic diferenţa constă în a aşeza vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ cu originea în O şi a considera ca diferenţă vectorul care uneşte extremitatea P a lui $\bar{B}$ cu extremitatea M a lui $\bar{A}$, deci $\bar{C}=\overline{PM}$.

Operaţia astfel realizată grafic nu diferă de adunare, totuşi având aplicaţii importante o vom numi *scădere vectorială*.

Scăderea poate fi definită şi altfel: operaţia inversă adunării. Fiind daţi doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, se pune întrebarea: *există un vector $\bar{C}$, astfel încât adunat cu $\bar{B}$, suma să fie egală cu $\bar{A}$?*

Dacă în particular $\bar{B}=\bar{A}$, va trebui să găsim un vector $\bar{C}$ care, adunat cu $\bar{A}$, să dea ca sumă tot pe $\bar{A}$. Acest vector este vectorul nul $\bar{O}$ şi introducerea sa ne permite să definim scăderea vectorială şi în acest caz.

Soluţia grafică se obţine aplicând regula triunghiului; vectorul $\bar{C}$ trebue să fie astfel, încât aşezat cu originea în extremitatea lui $\bar{B}$ să aibă extremitatea în extremitatea lui $\bar{A}$. Pe fig. 10 el va fi vectorul ce uneşte P cu M. Vom putea însă obţine o soluţie pe cale de calcul vectorial în modul următor: condiţia impusă este să avem egalitatea

$$\bar{B}+\bar{C}=\bar{A}. \qquad (12,1)$$

Într'o egalitate vectorială putând aduna acelaşi vector în ambii membri, vom căuta să izolăm în primul membru pe $\bar{C}$, adunând vectorul $(-\bar{B})$

$$\bar{B}+\bar{C}+(-\bar{B})=\bar{A}+(-\bar{B}).$$

Dar

$$\bar{B}+\bar{C}+(-\bar{B})=[\bar{B}+(-\bar{B})]+\bar{C}=\bar{O}+\bar{C}=\bar{C},$$

Scanned with OKEN Scanner

fiindcă

$$\overline{B}+(-\overline{B})=\overline{O};$$

deci vom avea

$$\overline{C}=\overline{A}+(-\overline{B})=\overline{A}-\overline{B}.$$

Vectorul căutat este suma lui $\overline{A}$ cu opusul lui $\overline{B}$ şi vom putea spune:

Scăderea unui vector $\overline{B}$ dintr'un vector $\overline{A}$ înseamnă determinarea unui vector $\overline{C}$, care adunat cu $\overline{B}$ să aibă ca sumă pe $\overline{A}$. Proprietăţile egalităţii şi adunării vectoriale ne arată că soluţia obţinută este unică, fără a recurge la imaginea geometrică. Acest mod de a defini scăderea ne dă un prim exemplu de aplicare a unei metode vectoriale. Putem spune că scăderea revine la rezolvarea ecuaţiei vectoriale (12, I), în care necunoscuta este vectorul $\overline{C}$. Această rezolvare se face formal ca în Algebră, rezultatul însă are semnificaţia geometrică pe care am pus-o în evidenţă mai sus.

Operaţiile vectoriale corespund unor operaţii geometrico-fizice, astfel încât rezultatele lor au totdeauna interpretare geometrică sau fizică şi trebue să fie verificate din acest punct de vedere, care stă la baza, atât a noţiunilor, cât şi a regulilor introduse.

§ 14. Amplificarea vectorilor cu un număr

Regulile de adunare şi scădere vectorială se reduc, în cazul când vectorii au aceeaşi direcţie, la regulile de adunare a segmentelor orientate aşezate pe o dreaptă suport. Astfel suma $\overline{v}_1+\overline{v}_2+\cdots+\overline{v}_n$ se obţine luând segmentele $\overline{OA_1}=\overline{v}_1$, $\overline{A_1A_2}=\overline{v}_2$, $\overline{A_2A_3}=\overline{v}_3$ etc. ţinând seama de orientarea respectivă, aşezându-le cap la cap şi însumându-le geometric. Suma va fi un vector $\overline{v}$ având aceeaşi *direcţie* ca şi componentele, reprezentat prin segmentul orientat $\overline{OA_n}=\overline{v}$. Poligonul de însumare degenerează deci într'un şir de segmente coliniare. In cazul când A_n coincide cu O, suma este un vector de modul nul, pe care îl vom numi deasemenea vector nul[1]).

Să considerăm în particular n vectori egali $\overline{u}$ (fig. 11). Suma lor se va putea scrie

$$\overline{v}=\overline{u}+\overline{u}+\cdots+\overline{u}=n\overline{u}.$$

Vectorul $n\overline{u}$ va avea direcţia şi sensul lui $\overline{u}$, iar modulul său va fi de n ori modulul lui $\overline{u}$.

Luând opusul $-\overline{u}$ putem construi suma:

$$(-\overline{u})+(-\overline{u})+\cdots+(-\overline{u})=n(-\overline{u}).$$

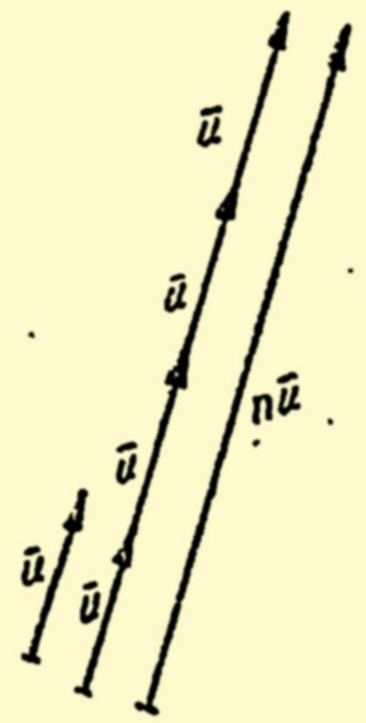


Fig. 11

Vectorul $n(-\overline{u})$ va fi egal cu opusul lui $n\overline{u}$, deci vom putea scrie

$$n(-\overline{u})=-(n\overline{u})=-n\overline{u}=(-n)\,\overline{u},$$

înţelegând prin ultimul simbol $(-n)\,\overline{u}$ opusul vectorului $n\overline{u}$.

---

[1]) Vectorul nul apare ca un simbol vectorial de calcul, a cărui semnificaţie fizică depinde de natura problemei în care se prezintă.

Scanned with OKEN Scanner

Prin aceste consideraţiuni simbolul $p\bar{u}$, unde p este un număr întreg pozitiv sau negativ, capătă o semnificaţie precisă: dacă $p>0$, reprezintă un vector de aceiaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\bar{u}$ având modulul de p ori mai mare; dacă $p<0$ sensul este contrar.

Doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ având aceeaşi direcţie sunt *coliniari*, conform cu definiţia dată mai înainte. Fiind daţi doi vectori coliniari $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, dacă avem egalitatea

$$n\bar{u}=\bar{v}, \tag{13,I}$$

vom scrie

$$\bar{u}=\frac{1}{n}\bar{v}. \tag{14,I}$$

Vectorul $\bar{v}$ având modulul de n ori mai mare decât $\bar{u}$, egalitatea (14,I) exprimă faptul că $\bar{u}$ *are modulul de n ori mai mic decât* $\bar{v}$, dar aceeaşi direcţie şi acelaşi sens sau sensul opus după cum $n>0$ sau $n<0$.

Invers, egalitatea (14,I) va fi echivalentă cu (13,I) în toate operaţiile vectoriale.

Din proprietăţile egalităţii vectoriale deducem:

$$\text{Dacă } \bar{A}=\bar{B}, \text{ atunci şi } n\bar{A}=n\bar{B}, \tag{15,I}$$

deci putem înmulţi ambii membri ai unei egalităţi vectoriale cu un număr întreg.

Geometria pe o dreaptă ne arată că fiind dat un vector $\bar{v}$, există un vector $\bar{u}$ de aceeaşi direcţie având modulul de n ori mai mic, sensul fiind acelaşi sau opus după cum $n>0$ sau $n<0$.

Această proprietate ne permite să arătăm că putem împărţi ambii membri ai unei egalităţi vectoriale cu un număr întreg.

$$\text{Dacă } \bar{A}=\bar{B}, \text{ atunci şi } \frac{1}{n}\bar{A}=\frac{1}{n}\bar{B}. \tag{16,I}$$

Pentru a trece dela (13,I) la (14,I) putem folosi această proprietate.

In rezumat, operaţiile de înmulţire şi împărţire a unui vector cu un număr întreg n au o semnificaţie vectorială precisă: ele revin la construirea unui vector coliniar cu cel dat şi având modulul de n ori mai mare, respectiv mai mic, sensul depinzând de semnul lui n.

Fiind daţi doi vectori coliniari $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, dacă avem egalitatea

$$p\bar{u}=q\bar{v}, \tag{17,I}$$

unde p şi q sunt numere întregi, aplicând proprietatea (16,I) a egalităţii vectoriale, putem scrie

$$\frac{1}{q}(p\bar{u})=\frac{1}{q}(q\bar{v})=\bar{v},$$

de unde

$$\bar{v}=\frac{1}{q}(p\bar{u})=\frac{p}{q}\bar{u}. \tag{18,I}$$

Simbolul $\frac{p}{q}\bar{u}$ este explicat chiar de expresia (18): reprezintă un vector obţinut înmulţind pe $\bar{u}$ cu p şi împărţind apoi vectorul $p\bar{u}$ prin q.

Scanned with OKEN Scanner

Prin aceasta se defineşte *amplificarea* unui vector printr'un număr raţional $\frac{p}{q}$: vectorul $\frac{p}{q}\bar{u}$ este coliniar cu $\bar{u}$, are modulul $\frac{p}{q}|\bar{u}|$, sensul fiind determinat de semnul lui $\frac{p}{q}$.

Printr'un proces de trecere la limită, folosit pentru definirea numerelor reale iraţionale, putem arăta că simbolul

$$\bar{v}=k\bar{u}, \tag{15}$$

unde k este un număr real oarecare, reprezintă un vector coliniar cu $\bar{u}$ având modulul măsurat — la scara adoptată — prin lungimea ku şi sensul determinat de semnul lui k.

Sintetizând, vectorul $k\bar{u}$ are:

1) *direcţia* vectorului $\bar{u}$;
2) *modulul* $=k|u|$;
3) *sensul*: acelaşi cu $\bar{u}$ pentru $k>0$, opus lui $\bar{u}$ pentru $k<0$.

Prin amplificarea cu un număr real k', mărimea vectorială $\bar{u}$ nu îşi schimbă natura[1]), de exemplu o forţă rămâne tot forţă, o viteză tot o viteză, etc.

Această operaţie este *distributivă* faţă de adunare

$$(k_1+k_2)\,\bar{u}=k_1\,\bar{u}+k\bar{u}$$

şi *asociativă*

$$k_1\,(k_2\,\bar{u})=(k_1\,k_2)\,\bar{u}=k_2(k_1\,\bar{u})=k_1\,k_2\,\bar{u}.$$

§ 15. Măsura vectorilor coliniari. Versorul

Fiind date două segmente de lungimi a şi b pe o dreaptă, Geometria ne arată că totdeauna putem măsura unul din ele prin celălalt, deci că putem scrie

$$b=\lambda\,a,$$

unde λ este un număr real şi pozitiv.

Să considerăm doi vectori coliniari $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ de acelaşi sens. Măsurând modulul lui $\bar{v}$ prin modulul lui $\bar{u}$, vom putea scrie $v=ku$, unde k este un număr real pozitiv.

Vectorul $k\bar{u}$ va coincide cu $\bar{v}$, având aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul, deci vom scrie

$$\bar{v}=k\bar{u}, \tag{19, I}$$

Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt de sensuri opuse, vectorul-$\bar{u}$ va avea acelaşi sens cu $\bar{v}$ şi vom putea scrie

$$\bar{v}=k\,(-\bar{u})=-k\bar{u}.$$

Prin urmare, fiind daţi doi vectori *coliniari* oarecare $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ nenuli, între ei există totdeauna relaţia (19, I), deci există un număr real k pozitiv sau negativ, astfel încât $\bar{v}=k\bar{u}$. Vom numi acest număr *măsura* lui $\bar{v}$ prin $\bar{u}$. Această definiţie a măsurii vectorilor coliniari corespunde cu definiţia generală a măsurii mărimilor fizice. In adevăr, considerând vectorii ce au aceeaşi direcţie ca formând

---

[1]) Simbolul $\bar{u}k$ va fi echivalent cu $k\bar{u}$. El poate interveni uneori în scrierea unor expresii vectoriale.

Scanned with OKEN Scanner

o specie, există pentru ei operaţia de compunere, care este adunarea. Când k este un întreg pozitiv, vom putea scrie

$$v=\bar{u}+\bar{u}+\cdots+\bar{u}=k\bar{u},$$

iar numărul k va reprezenta măsura lui $\bar{v}$ prin $\bar{u}$. Trecerea la cazul k real oarecare se face ca pentru definirea înmulţirii unui vector printr'un număr.

Măsura are sensul pozitiv sau negativ, după cum cei doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ au acelaşi sens sau sensuri contrare.

Vom face observaţia că *deşi am folosit în această definiţie a măsurii noţiunea de lungime a segmentelor, ea este independentă de această noţiune.* Este suficient să considerăm vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ aşezaţi cu originea în acelaşi punct O şi să definim măsura ca raportul anarmonic

$$k=(O\Omega AB),$$

unde

$$\bar{u}=\overline{OA},\quad v=\overline{OB},$$

iar Ω este punctul dela infinit al dreptei suport. Această definiţie are un caracter proiectiv.

Pentru definirea măsurii afine a unui vector prin altul nu este deasemenea nevoie de noţiunea de modul al unui vector în spaţiu. Este suficient să definim măsura prin raportul $k=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ al segmentelor coliniare $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ ceeace constituie o operaţie de geometrie afină, dacă folosim translaţia şi echipolenţa.

Totuşi pentru o mai simplă exprimare vom continua să folosim noţiunea de modul.

Măsura reprezintă pentru mărimile vectoriale un mijloc de comparaţie analog cu măsura mărimilor scalare. Să observăm că *această comparaţie se face între mărimi care au aceeaşi direcţie*, deci elementul caracteristic mărimilor vectoriale, direcţia, este comun tuturor mărimilor care sunt comparate.

Acest punct de vedere este impus de semnificaţia fizică a operaţiilor vectoriale. Astfel, două forţe de direcţii diferite, aplicate unui corp solid în acelaşi punct produc deplasări diferite în general nu numai prin mărime, dar şi prin direcţie. Cu ajutorul unui vector $\bar{u}\neq\bar{0}$ putem măsura toţi vectorii coliniari cu el, obţinând ca măsuri toate numerele reale $k\neq 0$.

Măsura sumei a doi vectori coliniari este suma măsurilor lor. In adevăr dacă

$$\bar{v}_1=k_1\bar{u}\quad\text{şi}\quad\bar{v}_2=k_2\bar{u}$$

atunci

$$\bar{v}_1+\bar{v}_2=k_1\bar{u}+k_2\bar{u}=(k_1+k_2)\bar{u}.$$

In particular, dacă $\bar{v}=k\bar{u}$ şi $-\bar{v}=-k\bar{u}$, vom avea

$$\bar{0}=\bar{v}+(-\bar{v})=k\bar{u}-k\bar{u}=(k-k)\bar{u}=0\bar{u}.$$

Suntem deci conduşi să interpretăm acest rezultat spunând că *măsura vectorului nul este zero faţă de orice vector* $\bar{u}$. Măsura lui $\bar{u}$ în raport cu el însuşi este egală cu unitatea.

Scanned with OKEN Scanner

Când măsurăm vectorii ce au o anumită direcţie printr'un vector u, acesta se va numi *vector-unitate.*

Dacă în reprezentarea geometrică facem să corespundă unitatea de lungime modulului vectorului-unitate, modulului vectorului $\bar{v}=k\bar{u}$ îi va corespunde lungimea $|k|$.

Modulul unui vector, măsurat cu o unitate dată, este egal deci cu valoarea absolută a măsurii sale.

Vom numi *versor* al unui vector $\bar{v}$ vectorul-unitate care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\bar{v}$.

In acest caz, măsurând pe $\bar{v}$ prin versorul său $\bar{u}$, măsura va fi chiar modulul lui $\bar{v}$ şi vom putea scrie

$$\bar{v}=\overline{v}\bar{u}, \qquad (20,I)$$

deci un vector $\bar{v}$ este egal cu versorul amplificat cu modulul său.

Deoarece $\overline{v}$ este o măsură, adică un număr, vom putea scrie

$$\bar{u}=\frac{1}{v}\bar{v}, \qquad (21,I)$$

deci, *versorul unui vector este egal cu vectorul împărţit cu modulul său.*

Formulele (20, I) şi (21, I) sunt foarte importante: prima pune în evidenţă atât mărimea, cât şi direcţia vectorului separând factorul numeric de cel geometric, iar a doua exprimă versorul în funcţie de vector şi de modulul său.

Măsura vectorilor coliniari, fiind obţinută printr'un raport de mărimi, este un *număr abstract*, care depinde însă de vectorul-unitate ales.

Prin specificarea unităţii utilizate, măsura exprimată în funcţie de această unitate este *un număr concret*, care reprezintă numeric mărimea vectorială fizică măsurată.

De exemplu, măsura acceleraţiei gravităţii este un număr abstract putând avea valori diferite, după cum este măsurat cu o unitate sau alta. Exprimând această măsură prin formula $g=9{,}81\ m\cdot s^{-2}$, obţinem numărul concret $9{,}81\ m\cdot s^{-2}$ care, înmulţit cu versorul direcţiei verticalei descendente, conduce la expresia vectorială a acceleraţiei gravităţii.

§ 16. Amplificarea vectorilor prin scalari

Din unele mărimi scalare şi vectoriale, care intervin în producerea unor fenomene, se pot forma noi mărimi fizice vectoriale.

Astfel, considerând într'un punct O o sarcină electrică q şi câmpul electrostatic produs de aceasta în spaţiu, dacă se plasează în alt punct M o a doua sarcină q_1, se constată în M apariţia unei forţe de atracţie sau repulsie având direcţia OM.

Prin urmare, din relaţiile între mărimile fizice scalare q şi q_1 şi poziţia mutuală în spaţiu a acestor două sarcini, care este o mărime geometrică reprezentată prin vectorul $\bar{r}=\overline{OM}$, rezultă o nouă mărime vectorială fizică $\overline{F}$, forţa electrică (fig. 12).

Scanned with OKEN Scanner

Legea lui Coulomb dă intensitatea acestei forţe:

$$F=\frac{1}{\varepsilon}\frac{|q|\,|q_1|}{r^2},$$

unde ε este permitivitatea (constantă dielectrică) a mediului fizic în care se petrece fenomenul; $r=OM$, $|q|$, $|q_1|$ — valorile absolute ale sarcinilor.

Fig. 12

Forţa $\bar{F}$ va fi reprezentată printr'un vector având direcţia lui $\bar{r}=\overline{OM}$, modulul egal cu F şi sensul determinat de semnele celor două sarcini.

Dacă acestea sunt de acelaşi semn, forţa este repulsivă şi are deci orientarea lui $\bar{r}$. Notând cu $\bar{u}$ versorul lui $\bar{r}$ (măsurat cu aceeaşi unitate ca şi lungimea r), vom avea

$$\bar{F}=\frac{|q|\,|q_1|}{\varepsilon r^2}\bar{u}=\frac{qq_1}{\varepsilon r^2}\bar{u}, \qquad (22,\text{I})$$

deoarece

$$qq_1>0, \text{ deci } |q|\cdot|q_1|=qq_1.$$

Dacă sarcinile sunt de semn contrar, $\bar{F}$ are sensul opus lui $\bar{r}$ şi va trebui să scriem

$$\bar{F}=\frac{|q|\,|q_1|}{\varepsilon r^2}(-\bar{u})=-\frac{|q|\,|q_1|}{\varepsilon r^2}\bar{u}. \qquad (23,\text{I})$$

Cum însă în acest caz $qq_1<0$, vom avea şi $|q|\,|q_1|=-qq_1$, ceeace ne permite să punem din nou formula (23, I) sub forma (22, I). Mărimile vectoriale $\bar{F}$ şi $\bar{u}$ legate prin această formulă sunt de naturi fizice diferite. *Expresia* $\frac{qq_1}{\varepsilon r^2}$ *nu este măsura lui* $\bar{F}$ *prin* $\bar{u}$, *ci un factor scalar reprezentând o mărime fizică măsurată cu o anumită unitate.*

Scrierea legii lui Coulomb sub formă vectorială ne conduce deci la necesitatea de a da o semnificaţie produsului între un scalar şi un vector. Inlocuind în (22, I) pe $\bar{u}$ prin expresia sa $\bar{u}=\frac{\bar{r}}{r}$, vom putea exprima pe $\bar{F}$ exclusiv în funcţie de q, q_1 şi $\bar{r}$ prin formula

$$\bar{F}=\frac{qq_1}{\varepsilon r^3}\bar{r}. \qquad (24,\text{I})$$

Conduşi de acest exemplu vom putea defini operaţia de amplificare a unui vector printr'un scalar.

Produsul $\lambda\bar{v}$ *dintre un scalar* λ *şi un vector* $\bar{v}$ este un vector coliniar cu $\bar{v}$, având ca modul $|\lambda|v$, sensul său fiind acelaşi sau opus cu $\bar{v}$, după cum $\lambda>0$ sau $\lambda<0$.

Operaţia de amplificare a unui vector printr'un scalar se bucură de toate proprietăţile algebrice ale amplificării cu un număr. Astfel, dacă $\bar{A}=\bar{B}$, atunci şi

$$\lambda\bar{A}=\lambda\bar{B};\quad \frac{1}{\lambda}\bar{A}=\frac{1}{\lambda}\bar{B},$$

$$(\lambda+\mu)\bar{A}=\lambda\bar{A}+\mu\bar{A},$$

$$\lambda(\mu A)=\mu(\lambda\bar{A})=(\lambda\mu)\bar{A}=\bar{A}(\lambda\mu)=\lambda\bar{A}\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Toate aceste proprietăți algebrice sunt însă valabile și din punct de vedere fizic, *numai dacă produsele respective au o semnificație fizică,* deci dacă mărimile $\lambda\bar{A}$, $\mu\bar{A}$, $(\lambda\mu)\bar{A}$ pot fi realizate în desfășurarea fenomenelor studiate.

Înmulțirea unui vector printr'un scalar este imaginea vectorială a relației între mărimile fizice din care rezultă mărimea produsă. Natura fizică a mărimii $\lambda\bar{A}$ diferă de aceea a mărimii $\bar{A}$. Astfel, prin legea fundamentală a Dinamicei din relația dintre masă și accelerație rezultă mărimea forță, care este de altă natură decât accelerația. Din punct de vedere vectorial această relație se scrie

$$\bar{F} = m\bar{\gamma},$$

unde m este masa, iar $\bar{\gamma}$ — vectorul accelerație al punctului material considerat.

Amplificarea unui vector printr'un scalar este o operație vectorială condiționată de existența mărimii vectoriale obținute și care din punct de vedere formal nu diferă de amplificarea printr'un număr, dar diferă de aceasta prin semnificația sa fizică.

§ 17. Vectorul de poziție

Expresia vectorială a legii lui Coulomb pune în evidență vectorul $\bar{r} = \overline{OM}$ care definește poziția punctului M față de punctul O în care este așezată sarcina electrică q. In fenomenele de atracție, ca și în alte fenomene în care materia concentrată în jurul unui anumit punct O produce modificări în starea mediului înconjurător, este natural să raportăm punctele spațiului la punctul O, pentru a putea pune în evidență influența vecinătății acestui punct asupra întregului mediu.

Vom numi *punct de referință* al spațiului un punct O, față de care se determină pozițiile punctelor spațiului.

Fiind dat punctul de referință O, un punct oarecare M este definit în mod unic prin vectorul $\bar{r} = \overline{OM}$, având originea în O și extremitatea în M (fig. 13).

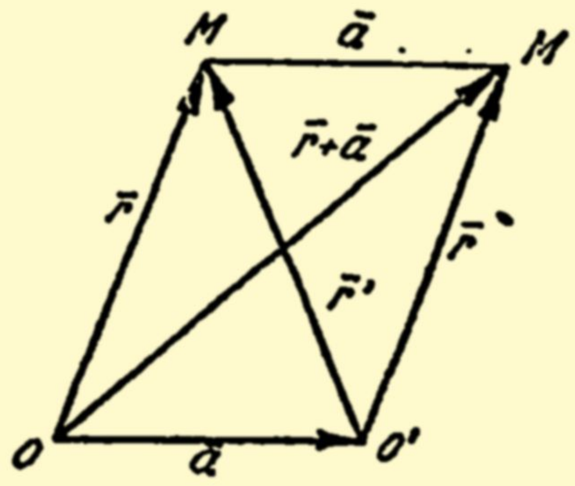


Fig. 13

Vom numi *vector de poziție* al punctului M în raport cu *punctul de referință* sau *de reper* O vectorul $\bar{r} = \overline{OM}$.

Din această definiție rezultă că vectorul de poziție al unui punct M este un *vector legat*. El este definit prin cunoașterea punctului de referință și se schimbă odată cu acesta.

Fie O' un nou punct de referință determinat față de O prin vectorul său de poziție $\overline{OO'} = \bar{a}$ și fie $\bar{r}' = \overline{O'M}$ vectorul de poziție al aceluiași punct M față de O'.

Aplicând regula triunghiului, putem scrie

$$\bar{r}' = \bar{r} - \bar{a} \quad \text{sau} \quad \bar{r} = \bar{r}' + \bar{a}. \qquad (25,I)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste formule definesc schimbarea punctului de reper al spaţiului dând posibilitatea de a exprima noul vector de poziţie în funcţie de cel vechi şi invers.

Să observăm însă că punctul M' al cărui vector de poziţie faţă de O este $\bar{r}+\bar{a}$ are faţă de O' vectorul de poziţie $\overline{O'M'}=\bar{r}$. Aceasta se vede imediat pe fig 13, sau se stabileşte vectorial căutând vectorul de poziţie $\bar{x}$ al unui punct M', astfel încât faţă de noul punct de reper $\bar{x}'=\bar{r}$. Introducând această condiţie în relaţia (25,I), vom scrie

$$\bar{x}'=\bar{r}=\bar{x}-\bar{a}, \quad \text{deci} \quad \bar{x}=\bar{r}+\bar{a}.$$

Din aceasta rezultă că: *vectorul de poziţie al unui punct M rămâne invariant dacă punctul de referinţă O şi punctul M suferă aceeaşi translaţie.*

Cu alte cuvinte, dacă întreg spaţiul se găseşte într'o mişcare de translaţie, punctele sale au mereu acelaşi vector de poziţie[1]).

Aplicaţie. *Baricentrul unui sistem de puncte.* Fie date n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ şi n mărimi scalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ataşate acestor puncte. Luând un punct de referinţă O, să considerăm vectorii de poziţie $\overline{OP_i}=\bar{r}_i$. Vectorii $\alpha_i\bar{r}_i$ definind alte n puncte, vor putea fi interpretaţi tot ca vectori de poziţie. Suma lor va fi un nou vector $\bar{r}$, pe care îl vom putea interpreta ca vectorul de poziţie $\overline{OP}=\bar{r}$ al unuî punct P. Vom pune deci

$$\bar{r}=\alpha_1\bar{r}_1+\alpha_2\bar{r}_2+\cdots+\alpha_n\bar{r}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{r}_i.$$

Evident că această construcţie geometrică ne conduce la un punct P a cărui poziţie depinde de punctul de referinţă O.

In adevăr alegând un alt reper O' şi notând

$$\bar{r}'_i=\overline{O'P_i}, \quad \overline{OO'}=\bar{a}, \quad \bar{\rho}'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{r}'_i,$$

vectorul $\bar{\rho}'$ va defini un punct P', astfel încât

$$\overline{O'P'}=\bar{\rho}'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{r}'_i.$$

Pentru a vedea cărui punct îi corespunde $\bar{\rho}'$, să revenim la vechiul punct de reper O, aplicând formula (25,I).

Vom avea:

$$\bar{\rho}'=\bar{\rho}-\bar{a}, \quad \bar{r}'_i=\bar{r}_i-\bar{a},$$

deci

$$\bar{\rho}-\bar{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\bar{r}_i-\bar{a})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{r}_i-\bar{a}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

de unde

$$\bar{\rho}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{r}_i-\bar{a}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right]=\bar{r}-\bar{a}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right]. \qquad (26,I)$$

Se vede deci că în general $\bar{\rho}\neq\bar{r}$, deci $P'\neq P$. Pentru ca P' să coincidă cu P, este necesar şi suficient ca $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, ceeace se obţine luând

$$\alpha_i=\frac{m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}m_i\neq 0\right), \qquad (27,I)$$

---

[1]) Această proprietate este caracteristică pentru orice deplasare rigidă, deci care nu deformează corpurile.

Scanned with OKEN Scanner

scalarii m_i putând fi pozitivi sau negativi, cu condiția de a avea suma nenulă.

Punctul P definit de vectorul de poziție

$$\bar{r}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{m_1\bar{r}_1+m_2\bar{r}_2+\cdots+m_n\bar{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \qquad (28,1)$$

nu depinde decât de pozițiile mutuale ale punctelor sistemului $P_1, P_2, \ldots, P_n$ și de scalarii $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Acest punct se numește *baricentrul* sistemului și este definit numai de acest sistem și de scalarii m_i legați de el.

Particularizând scalarii m_i, baricentrul capătă numeroase semnificații geometrico-fizice. In cazul când m_i reprezintă masele unor puncte materiale P_i, el este *centrul de greutate al sistemului* $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

§ 18. Combinația liniară vectorială

Numărătorul expresiei (28, I) prin care este definit baricentrul unui sistem de puncte, este o sumă de produse de scalari cu vectori. Această operație rezultă din asocierea celor două operații vectoriale definite: amplificarea cu un scalar și adunarea vectorială într'un caz particular, care poate fi generalizat în modul urmator:

Fiind dați n vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ și n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ expresia

$$\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\cdots+\lambda_n\bar{v}_n=\bar{v}$$

se numește *combinație liniară vectorială* și definește un vector $\bar{v}$.

Pentru ca o combinație liniară vectorială să aibă un sens fizic, trebue ca toți termenii săi $\lambda_i\bar{v}_i$ să reprezinte mărimi vectoriale de aceeași natură.

Folosind o astfel de expresie, vom putea dovedi proprietatea importantă a operației de amplificare a unui vector cu un scalar de a fi *distributivă* față de adunarea vectorială.

$$\lambda(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\lambda\bar{v}_1+\lambda\bar{v}_2. \qquad (29,1)$$

In adevăr, dacă reprezentăm vectorii $\bar{v}_1=\overline{OA}_1$, $\bar{v}_2=\overline{OA}_2$, vom putea construi imediat vectorii $\lambda\bar{v}_1=\overline{OB}_1$, $\lambda\bar{v}_2=\overline{OB}_2$ și suma lor $\lambda\bar{v}_1+\lambda\bar{v}_2=\overline{OD}$ (fig. 14). Luând pe OD punctul C, care împarte acest segment în raportul λ și ducând paralele la cele două direcții $\overline{OB}_2$ și $\overline{OB}_1$, acestea vor întâlni pe $\overline{OB}_1$ și $\overline{OB}_2$ respectiv, chiar în A_1 și A_2. Astfel încât vom avea $\overline{OC}=\bar{v}_1+\bar{v}_2$ și $\overline{OD}=\lambda\overline{OC}=\lambda(\bar{v}_1+\bar{v}_2)$, de unde se deduce relația (29,1).

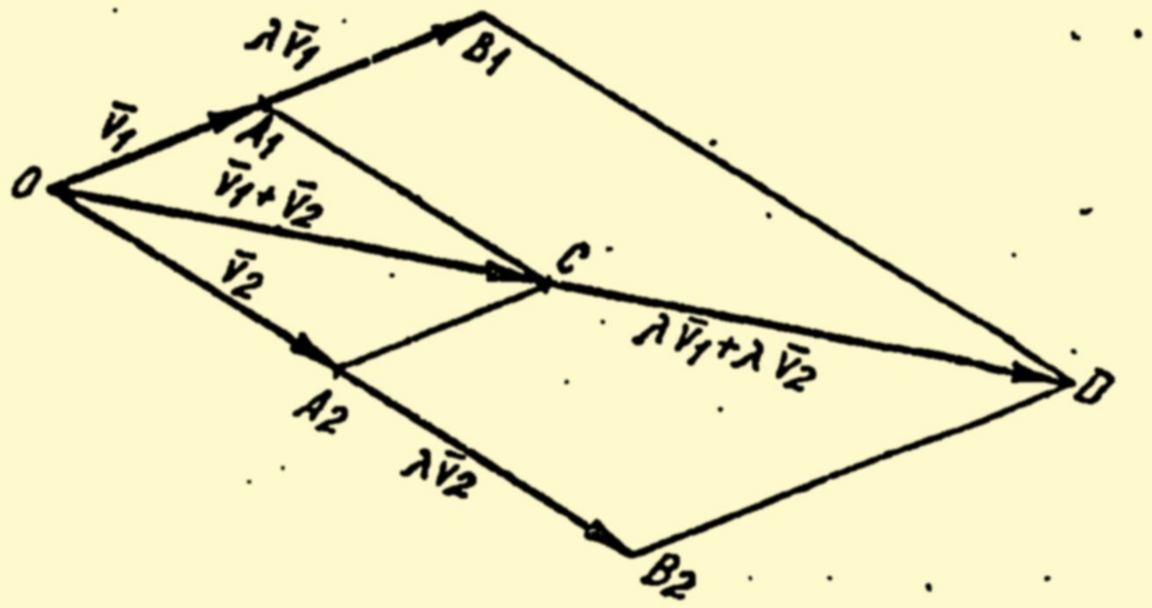


Fig. 14

Scanned with OKEN Scanner

Combinaţia liniară a vectorilor sintetizează rezultatele celor două operaţii vectoriale definite. Astfel cu $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ obţinem suma vectorială $\bar{v}_1+\bar{v}_2+\cdots+\bar{v}_n$; cu $\lambda_1=-\lambda_2=1, \lambda_3=\lambda_4=\cdots\lambda_n=0$ exprimăm diferenţa $\bar{v}_1-\bar{v}_2$, etc.

Orice vector poate fi pus sub forma de combinaţie liniară de alţi vectori, adică poate fi considerat ca latura de închidere a unui contur poligonal cu n laturi. De exemplu, în cazul $n=2$ aceasta revine la construcţia unui triunghi arbitrar având o latură egală cu vectorul $\bar{v}$, problemă care admite o infinitate de soluţii.

Din relaţia

$$\bar{v}=\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2$$

putem exprima, de exemplu, pe $\bar{v}_2$ în funcţie de celelalte elemente presupuse cunoscute:

$$\bar{v}_2=\frac{1}{\lambda_2}(\bar{v}-\lambda_1\bar{v}_1) \qquad (\lambda_2\neq 0).$$

Cum însă λ_1, λ_2 şi $\bar{v}_1$, pot fi alese oricum, $\bar{v}_2$ poate lua o infinitate de valori.

Aplicaţie. *Câmpuri newtoniene produse de distribuţii punctuale.* Prezenţa materiei într'un punct din spatiu şi în vecinătatea acestuia se manifestă prin influenta asupra mediului înconju ător, producând anumite fenomene fizice, ca atracţia gravitaţională, atracţia magnetică, atractia sau repulsia electrică, etc. Mărimile fizice caracteristice acestor fenomene pot fi scalare, vectoriale sau chiar de o structură geometrică mai complexă.

In cazul când mărimea caracteristică este vectorială şi nu depinde decât de poziţia punctului în care se măsoară, se spune că s'a produs un *câmp vectorial*, caracterizat printr'un *vector intensitate* al câmpului.

In cazul sarcinilor electrice, influenţa sarcinii q, plasată în O, asupra sarcinii q_1 din punctul oarecare M se caracterizează prin forţa de atracţie electrică $\bar{F}$. Raportând această forţă la unitatea de sarcină, obţinem mărimea vectorială.

$$\bar{E}=\frac{1}{q_1}\bar{F}=\frac{q}{\varepsilon r^3}\bar{r}, \qquad (30, I)$$

[conform formulei (22, I)], care nu mai depinde de sarcina din M şi caracterizează câmpul în acest punct. Ea se numeşte *vectorul intensitate al câmpului* sau chiar *câmpul electrostatic* în M. Natura sa este diferită de aceea a forţei, de care este legat prin relaţia fizică

$$\bar{F}=q_1\bar{E},$$

tradusă vectorial printr'un produs între un scalar şi un vector.

Acelaşi gen de mărime apare însă şi în alte fenomene, ca de exemplu în atracţia universală, unde două mase materiale punctuale m şi m_1, plasate respectiv în O şi M se atrag cu o forţă

$$\bar{F}=-\frac{fmm_1}{r^3}\bar{r},$$

numită *forţa de atracţie universală.*

Masa m produce deasemenea un câmp măsurat prin vectorul $-\frac{fm}{r^3}\bar{r}$, numit *câmpul gravitaţional.*

Câmpurile de forma $\frac{k}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$, unde k este scalar, iar $\frac{\bar{r}}{r}$ este versorul direcţiei ce uneşte un anumit punct O cu un punct M al spaţiului, având intensitatea invers proporţională cu pătratul distanţei OM, se numesc *câmpuri newtoniene.*

Scanned with OKEN Scanner

Oricare ar fi fenomenul fizic în care se produc aceste mărimi, ele au un număr de proprietăți comune puse în evidență de expresia lor vectorială și pot fi studiate din acest punct de vedere împreună, ceeace constitue o puternică dovadă de utilitatea metodelor matematice în cercetarea fizică și în aplicatiile tehnice Să examinăm cazul unui număr n de sarcini electrice $q_1, q_2, \ldots, q_n$ plasate în punctele fixe $O_1, O_2, \ldots, O_n$.

Fiecare, dacă ar fi singură, ar produce un câmp electrostatic $\overline{E}_i$, definit prin expresia sa

$$\overline{E}_i = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_i}{r_i^3} \overline{r}_i,$$

unde $\overline{r}_i = \overline{O_i M}$ este vectorul de poziție al lui M în raport cu O_i.

Experiența ne arată că fortele electrostatice au caracter vectorial, deci că expresia vectorială a legii lui Coulomb (24, I) are o completă semnificație fizică, ceeace înseamnă că operațiile vectoriale făcute cu vectorul $\overline{F}$ corespund unor operatii fizice. In particular, forțele electrostatice însumându-se vectorial, rezultanta forțelor produse de sarcinile q_i în M va fi

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_n.$$

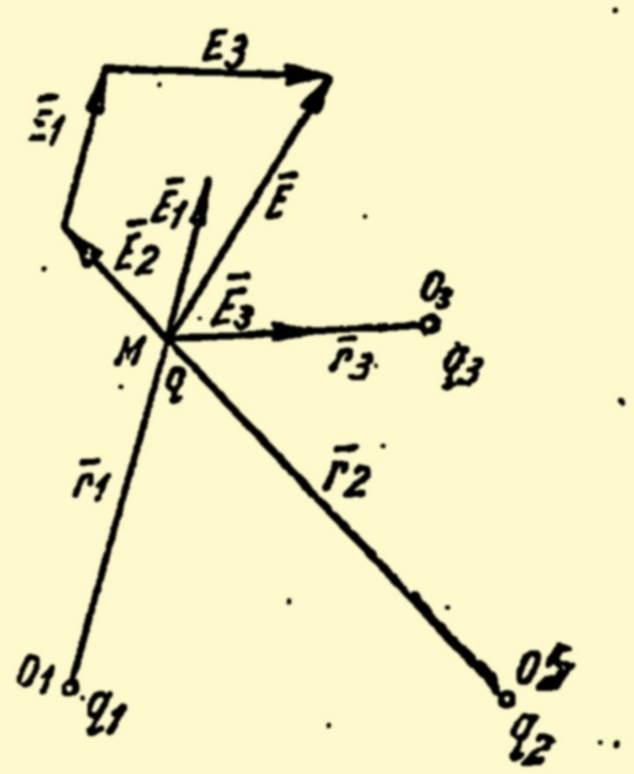


Fig. 15

Notând cu q sarcina din M, vom avea $\overline{F}_i = q\overline{E}_i$, deci

$$\overline{F} = q\overline{E}_1 + q\overline{E}_2 + \cdots + q\overline{E}_n = q(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \cdots + \overline{E}_n)$$

și cum între $\overline{F}$ și câmpul $\overline{E}$ din M există relația $\overline{F} = q\overline{E}$, vom avea și

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \cdots + \overline{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{E}_i,$$

de unde[1])

$$\overline{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_i}{r_i^3} \overline{r}_i. \qquad (31, I)$$

Posibilitatea de însumare vectorială a câmpurilor electrostatice se justifică atât direct, cât și, în special, prin consecințele sale practice și teoretice.

In fig. 15 sarcinile q_1 și q_2 sunt de același semn cu q, iar q_3 este de semn contrar. Câmpul este un vector legat figurat prin $\overline{E}$.

Exemplul tratat ne permite să extindem calculul la orice câmp newtonian. Presupunem că punctelor $O_1, O_2, \ldots, O_n$ li se atașează mărimile scalare $k_1, k_2, \ldots, k_n$ și că în punctul M se produc câmpurile $\overline{E}_i = \frac{k_i}{r_i^3} \overline{r}_i$. Câmpul rezultant va fi

$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{r_i^3} \overline{r}_i$. In cazul gravitațional, $k_i = -fm_i$.

[1]) Este instructiv să se urmărească în raționamentele făcute, pe de o parte, aplicarea regulilor de calcul vectorial introduse și pe de altă parte, corespondența acestora cu proprietățile fizice examinate. Prin aceasta Calculul vectorial capătă justificarea fizică și își demonstrează utilitatea în cercetarea fenomenelor naturale.

Scanned with OKEN Scanner

*) § 19. Vectorul de poziţie şi vectorul legat. Mărimi asociate figurilor geometrice[1])

Mărimile caracterizează proprietăţile comune ale obiectelor unei clase obţinute printr'o relaţie de echivalenţă. Mărimilor fizice simple le corespund mărimi geometrice reprezentative, asociate unor obiecte geometrice, astfel încât putem examina proprietăţile lor cu ajutorul proprietăţilor acestor mărimi geometrice reprezentative. Această corespondenţă uşurează studiul mărimilor fizice şi ne dă o imagine a lor.

Prin definiţie, o mărime geometrică *va caracteriza* o clasă de figuri aparţinând obiectului geometric căruia îi este asociată mărimea. Aceasta înseamnă că, fiind dată mărimea, putem separa clasa corespunzătoare din mulţimea de figuri ce constitue obiectul.

Deasemenea, una sau mai multe specii de mărimi *caracterizează* obiectul căruia le sunt asociate în mulţimea obiectelor geometrice ale spaţiului. Aceasta înseamnă că avem posibilitatea de a separa acest obiect căutând mulţimea tuturor figurilor ce concretizează mărimile considerate.

Din aceste observaţii rezultă că *o anumită figură dintr'o clasă nu poate fi determinată prin mărimea caracteristică,* ci mai este necesar să impunem şi alte condiţii pentru a individualiza o figură.

Vectorul, de exemplu, caracterizează obiectul geometric format de mulţimea tuturor segmentelor orientate din spaţiu, iar un anumit element din specia vectorilor caracterizează o clasă anumită de segmente echipolente.

Pentru a determina un anumit segment $\overline{AB}$ este necesar să ne dăm vectorul asociat clasei sale şi încă o condiţie, de exemplu, punctul de aplicaţie A.

Acest punct este la rândul său determinat prin vectorul său de poziţie $\bar{r}=\overline{OA}$. Astfel, segmentul orientat $\overline{AB}$ este determinat prin două mărimi: vectorul liber $\bar{v}=\overline{AB}$ şi vectorul de poziţie $\bar{r}=\overline{OA}$.

Considerând punctul de aplicaţie A ca determinat, segmentul $\overline{\overline{AB}}$ este caracterizat prin reprezentantul vectorului liber $\bar{u}$, care are originea în A, deci prin vectorul $\bar{v}$ legat de punctul A.

Am văzut că noţiunea de mărime asociată unui obiect geometric ne dă posibilitatea de a stabili între mărimi relaţii ce corespund unor relaţii între figurile geometrice. Deaceea, extinzând semnificaţia ideii de asociere dela un obiect la o anumită figură, vom introduce următoarea definiţie:

A asocia o mărime unei anumite figuri, sau unei mulţimi de figuri ale unui obiect geometric, înseamnă a caracteriza acea figură, sau acea mulţime de figuri prin mărimea considerată.

Vectorul $\bar{v}$ legat de punctul A, caracterizează segmentul orientat $\overline{AB}$, deci este o *mărime asociată acestui segment.*

Ideea de mărime asociată unei anumite figuri este la baza geometriei analitice, a geometriei diferenţiale şi, în general, la baza tuturor metodelor de cercetare a proprietăţilor geometrice cu ajutorul algebrei şi analizei, sau al unui calcul simbolic.

---

[1]) Paragrafele însemnate cu * pot fi lăsate pentru a doua lectură.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul vectorial este deasemenea bazat pe ideea de asociere aplicată întâi obiectelor geometrice și apoi figurilor sau submulțimilor de figuri ale unui obiect. El folosește ca mărime fundamentală vectorul, construind prin operații asupra acestuia mărimi mai complexe, asociate unor figuri esențiale pentru cunoașterea proprietăților spațiului. Prin reprezentarea geometrică a mărimilor fizice, această metodă de asociere se extinde la studiul fenomenelor fizice.

Putem determina o figură geometrică determinându-i punctele din care se compune, deci asociind fiecărui punct o mărime. Ori, un punct oarecare M poate fi determinat prin vectorul său de poziție în raport cu un punct de reper dat O. Deci, conform cu definiția dată, *putem asocia fiecărui punct M din spațiu vectorul său de poziție.* Acest vector este de fapt mărimea asociată figurii formate din punctul M și punctul de reper O, în specie segmentului orientat $\overline{OM}$, prin urmare este *un vector legat de punctul O.*

Introducerea vectorului de poziție ne permite să exprimăm orice vector asociat unui segment orientat $\overline{AB}$ prin vectori de poziție.

In adevăr, avem

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{r}_B - \bar{r}_A.$$

In general: *orice vector legat de un punct A poate fi exprimat ca diferența a doi vectori de poziție.*

Prin aceasta, oricărui segment orientat îi putem asocia doi vectori de poziție $\bar{r}_A$ și $\bar{r}_B$, evitând vectorul legat de punctul A care presupune determinarea acestui punct.

Se vede că *folosirea unui punct de reper O și a vectorilor de poziție permite asocierea de vectori legați exclusiv de punctul de bază tuturor punctelor spațiului și reducerea vectorilor legați la vectori de poziție.*

Unei figuri formate dintr'o mulțime de puncte i se asociază mulțimea vectorilor de poziție ai acestor puncte. Astfel, unui segment $\overline{AB}$ i se asociază vectorii de poziție $\bar{r}_A$ și $\bar{r}_B$.

O mărime formată din reunirea mai multor mărimi se va numi *mărime compusă.*

Vectorul legat asociat segmentului $\overline{AB}$ este o mărime compusă din doi vectori de poziție $(\bar{r}_A, \bar{r}_B)$.

După cum am observat mai sus, segmentul $\overline{AB}$ poate fi determinat și în alt mod, de exemplu prin originea sa A și prin vectorul liber $\bar{v} = \overline{AB}$. Cum punctul A este determinat prin vectorul său de poziție $\bar{r}_A$, putem spune: *vectorul legat, asociat segmentului orientat $\overline{AB}$, este o mărime compusă din vectorul de poziție $\bar{r}_A$ și vectorul liber $\bar{v} = \overline{AB}$.*

Pe de altă parte oricărui vector $\bar{v}$ legat de un punct A îi corespunde în mod unic un punct B, astfel încât

$$\bar{v} = \overline{AB}$$

și prin urmare avem următoarea propoziție importantă:

Orice vector legat este o mărime compusă din doi vectori de poziție sau dintr'un vector de poziție și un vector liber.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile care formează prin reunirea lor o mărime compusă în cadrul calculului vectorial se numesc *coordonate vectoriale* ale acelei mărimi. Notând vectorul legat de punctul A prin $\overline{AB}$ sau $(A, \bar{v})$, un sistem de coordonate vectoriale ale acestei mărimi vor fi $(\bar{r}_A, \bar{r}_B)$, iar un altul $(\bar{r}_A, \bar{v})$.

Putem trece dela un sistem la celălalt prin relaţiile

$$\bar{v}=\bar{r}_B-\bar{r}_A\,;\quad \bar{r}_B=\bar{r}_A+\bar{v},$$

astfel încât cele două sisteme pot fi înlocuite unul prin altul şi determină aceeaşi mărime.

Două sisteme de mărimi, care determină aceeaşi mărime compusă, se vor numi *echivalente*.

Cele două sisteme de coordonate vectoriale ale vectorului legat sunt echivalente.

*) § 20. Sistemele de referinţă şi vectorii de poziţie

Vectorul de poziţie este un vector asociat, fie unui punct M din spaţiu, când este dată baza O, fie segmentului orientat $\overline{OM}$. In orice caz, el este un vector legat de punctul O.

Importanţa sa este considerabilă, deoarece ne permite să asociem în mod foarte simplu o mărime oricărui punct din spaţiu şi să reducem orice vector legat la o mărime compusă. Folosirea sa ca mărime asociată figurilor spaţiului are avantajul de a nu introduce decât un sigur element geometric căruia nu i se mai poate asocia nicio mărime, şi anume punctul de bază O.

Calculul vectorial, fiind o metodă a teoriei geometrice a mărimilor fizice, trebue să fie complect independent de modul în care sunt măsurate aceste mărimi, deci ar trebui să nu fie legat în niciun fel de folosirea unui anumit mod de măsură a mărimilor.

Introducerea punctului de reper O pentru determinarea punctelor spaţiului este considerată ca o slăbiciune a calculului vectorial, care nu reuşeşte să aibă o complectă autonomie.

Ideea de determinare a figurilor geometrice prin asocierea de mărimi geometrice explică însă *necesitatea unui reper geometric în orice metodă de determinare a acestor figuri prin mărimi geometrice.*

In adevăr, mărimea fiind obţinută prin descompunerea obiectului în clase disjuncte de figuri echivalente, este mai abstractă decât fiecare din aceste figuri şi nu poate caracteriza decât proprietăţile generale ale obiectului, fără a individualiza o anumită figură.

Pentru a putea pune în evidenţă o figură determinată dintr'o clasă de figuri, va trebui să facem drumul invers, adăugind obiectului proprietăţi particulare acelei figuri.

Dintre acestea, unele se vor exprima deasemenea prin mărimi, dar pentru determinarea poziţiei punctelor figurilor va fi necesar să luăm anumite elemente geometrice *unic determinate*, deci cărora nu le putem substitui mărimi prin eliminarea unor caractere particulare.

Scanned with OKEN Scanner

Ori, folosirea punctului unic de reper şi introducerea vectorului de poziţie reduce aceste elemente geometrice la unul singur, punctul de reper sau baza, ceeace arată că *în calculul vectorial elementele geometrice necesare reperării figurilor au fost reduse la minim.*

Este important să înţelegem modul de asociere a vectorilor de poziţie punctelor spaţiului. Să considerăm în acest scop un punct de reper O şi mulţimea tuturor punctelor spaţiului, iar pe de altă parte mulţimea tuturor vectorilor de poziţie $\overline{OM}$ ai acestor puncte.

Fiecărui punct M îi va corespunde un vector de poziţie $OM=\bar{r}$, şi numai unul, şi invers. Prin această corespondenţă fiecărui punct M i se asociază şi un vector liber $\bar{r}=\overline{OM}$, punctului O corespunzându-i vectorul nul. Mulţimii tuturor punctelor spaţiului i se asociază mulţimea tuturor vectorilor legaţi de punctul O. Cu alte cuvinte:

Prin raportarea spaţiului la un punct de reper O se asociază obiectului geometric definit de mulţimea punctelor spaţiului specia vectorilor legaţi de punctul O.

Schimbând punctul de reper O cu altul O', vom obţine specia vectorilor legaţi de acest punct. Dar, orice vector legat de un punct O este un reprezentant al unui vector liber. Prin urmare, *specia vectorilor legaţi de un punct O corespunde element cu element speciei vectorilor liberi.*

Putem deci spune că de fapt raportarea este independentă de alegerea punctului O, deoarece mulţimii punctelor spaţiului îi corespunde specia vectorilor liberi.

Prin aceasta, obiecţia făcută Calculului vectorial de a folosi un element geometric, punctul de reper, deşi operaţiile sale trebue să fie independente de orice reper şi efectuate numai cu mărimi, cade, fiindcă acestui punct i se asociază vectorul nul, iar celorlalte puncte, vectorii liberi nenuli.

Vom numi *sistem de referinţă* sau de *reper* al spaţiului orice corespondenţă între mulţimea punctelor sale şi o specie de mărimi geometrice asociate acestor puncte.

Aceasta înseamnă că prin această corespondenţă punctele spaţiului sunt determinate prin mărimile asociate lor

Importanţa sistemelor de referinţă este esenţială, deoarece ele permit reperarea punctelor prin mărimi, deci introducerea unei reprezentări numerice a acestor puncte şi folosirea algebrei şi analizei, precum şi a metodelor de calcul simbolic în studiul proprietăţilor geometrice.

Corespondenţa dintre punctele spaţiului şi mulţimea vectorilor de poziţie, deci între punctele spaţiului şi specia vectorilor liberi constitue un sistem de referinţă al spaţiului.

Vom vedea în capitolul următor că putem chiar caracteriza structura spaţiului prin axiome privitoare la vectori şi la relaţiile dintre vectori şi puncte. Din aceste axiome va rezulta între altele sistemul de referinţă definit prin vectorii de poziţie.

Folosirea sistemelor de referinţă ne dă posibilitatea de a studia proprietăţile geometrice ale spaţiului cu ajutorul mărimilor geometrice, întrebuinţând în acest scop operaţii cu aceste mărimi, deci metode de calcul geometric, în particular metodele vectoriale.

Scanned with OKEN Scanner

*) § 21. Mărimi libere şi mărimi condiţionate

In determinarea mărimilor asociate obiectelor geometrice am presupus că figurile, care constitue un obiect geometric, au anumite proprietăţi comune. Intre aceste proprietăţi pot fi unele privitoare la poziţiile acestor figuri în raport cu alte figuri din spaţiu. Astfel, o proprietate comună tuturor segmentelor orientate, care pleacă dintr'un punct O, este de a avea acest punct comun. Un astfel de obiect geometric este doar o parte din mulţimea tuturor segmentelor orientate, constituind o submulţime de figuri ale acestui obiect.

Am văzut deasemenea că putem determina chiar o anumită figură prin punctele sale, asociind fiecărui punct un vector de poziţie.

Vom face distincţie între obiectele geometrice ale căror figuri nu au o anumită poziţie în spaţiu, deci care pot fi transportate oriunde în spaţiu şi cele care se compun din figuri supuse la anumite restricţii de poziţie.

Un obiect geometric, ale cărui figuri nu sunt supuse niciunei restricţii de poziţie în spaţiu, se va numi *obiect liber,* iar un obiect ale cărui figuri sunt definite şi prin anumite restricţii de poziţie se va numi *obiect condiţionat.*

Astfel, mulţimea tuturor segmentelor orientate din spaţiu constitue un obiect liber, pe când mulţimea tuturor segmentelor orientate care au aceeaşi origine formează un obiect condiţionat. Deasemenea, mulţimea tuturor segmentelor orientate situate pe o dreaptă sau într'un plan constitue obiecte condiţionate.

Noţiunile de obiect liber şi condiţionat sunt relative. Ele presupun înglobarea figurilor geometrice într'un anumit spaţiu. Astfel, considerând dreapta ca un spaţiu independent, ca în geometria pe o dreaptă, segmentele orientate de pe dreaptă formează un obiect liber, pe când dacă dreapta este considerată înglobată în spaţiu, acelaşi obiect este condiţionat. Condiţionarea provine din faptul că însăşi dreapta trebue determinată în spaţiu, adică trebue să i se stabilească poziţia în raport cu un sistem de referinţă.

Mărimile asociate obiectelor libere se numesc *mărimi libere,* iar cele asociate obiectelor condiţionate se numesc *mărimi condiţionate.* Vectorul legat şi vectorul alunecător sunt mărimi condiţionate.

Importanţa mărimilor condiţionate provine din faptul că *mărimile fizice, care intervin în numeroase fenomene, sunt reprezentabile prin mărimi condiţionate.* Astfel, forţele aplicate unei particule materiale sunt reprezentabile prin vectori legaţi, câmpul electric sau câmpul gravitaţional sunt mărimi vectoriale legate, forţele aplicate corpurilor solide sunt mărimi condiţionate.

Mărimile condiţionate sunt mărimi compuse şi se obţin din reunirea mai multor mărimi. Folosirea sistemelor de referinţă, definite printr'o bază O de vectori de poziţie, permite reducerea acestora la mărimi legate de punctul O şi la mărimi libere.

In adevăr, dacă obiectul ar fi liber, i s'ar asocia mărimi libere. Impunând condiţiile restrictive relative la poziţiile figurilor sale, acestea vor putea fi exprimate prin vectori de poziţie în raport cu O şi deci, prin mărimi legate de acest punct. Determinarea obiectului condiţionat va conduce deci la constituirea de mărimi compuse din mărimi libere şi din mărimi legate de punctul O.

De exemplu, în cazul obiectului condiţionat, format de mulţimea segmentelor orientate cu originea într'un punct A, dacă neglijăm această restricţie obţinem obiectul liber al tuturor segmentelor orientate din spaţiu. Acestuia i se

Scanned with OKEN Scanner

asociază specia vectorilor liberi $\bar{v}$. Pentru a reintroduce condiţionarea, vom asocia punctului A vectorul său de poziţie $\bar{r}=\overline{OA}$, obiectul va deveni condiţionat şi mărimea asociată, care îl determină este vectorul legat de punctul O, care este mărimea compusă $(\bar{r}, \bar{v})$.

O problemă fundamentală pusă de introducerea mărimilor condiţionate este aceea a operaţiilor cu aceste mărimi. Să considerăm în primul rând cazul operaţiilor cu vectori legaţi.

Ca şi pentru stabilirea operaţiilor cu vectori liberi, vom examina aspectul matematic al fenomenelor fizice simple în care intervin astfel de vectori. Un astfel de fenomen este compunerea forţelor aplicate unei particule materiale, din care deducem regula paralelogramului şi faptul esenţial *că în compunerea acestor forţe intervin exclusiv forţe aplicate aceluiaşi punct.*

In consecinţă *vom aduna numai vectori legaţi de acelaşi punct şi vom putea extinde la aceştia regula paralelogramului.* Dealtfel, din punct de vedere istoric trebue să observăm că noţiunea de vector legat este anterioară celei de vector liber, fiind mai concretă şi având rădăcina în această operaţie fundamentală de compunere a forţelor.

Vom putea defini adunarea vectorilor legaţi astfel:

Suma a doi vectori $(A, \bar{u})$, $(A, \bar{v})$ *legaţi de un acelaşi punct A este un vector* $(A, \bar{u}+\bar{v})$ *legat de punctul A, egal cu suma* $\bar{u}+\bar{v}$ *a vectorilor liberi* $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$.

Suma a doi vectori legaţi de punctul A fiind o mărime de aceeaşi specie, putem spune:

Mulţimea tuturor vectorilor legaţi de un punct A este o specie măsurabilă.

Considerând vectorii legaţi ca mărimi compuse şi introducând coordonatele lor vectoriale, vom putea scrie

$$(\bar{r}_A, \bar{u}) + (\bar{r}_A, \bar{v}) = (\bar{r}_A, \bar{u}+\bar{v}), \tag{32,I}$$

formulă prin care definim adunarea vectorilor legaţi de un punct A şi consideraţi ca mărimi compuse.

Luând în particular $\bar{v}=\bar{u}$, vom avea

$$(\bar{r}_A, \bar{u})+(\bar{r}_A, \bar{u})=2(\bar{r}_A, \bar{u})=(\bar{r}_A, 2\bar{u})$$

notând ca deobicei prin $2(\bar{r}_A, \bar{u})$ suma a doi termeni egali. Vom avea în general:

$$(\bar{r}_A, \lambda\bar{u})=\lambda(\bar{r}_A, \bar{u}), \tag{32',I}$$

formulă care defineşte amplificarea printr'un scalar.

In rezumat:

Cu vectorii legaţi de un punct dat A se execută aceleaşi operaţii de adunare şi amplificare printr'un scalar ca şi cu vectorii liberi, rezultatul fiind un vector legat de punctul A.

In ceeace priveşte alte mărimi condiţionate, este necesar ca operaţiile să fie definite deasemenea, ţinându-se seama de semnificaţia lor fizică sau geometrică. In orice caz, operaţiile de adunare şi amplificare printr'un scalar, când sunt posibile, se fac separat pentru fiecare dintre mărimile care constitue coordonatele vectoriale, rezultatul fiind o mărime compusă din aceeaşi specie.

Scanned with OKEN Scanner

*) § 22. Sensul segmentelor orientate ca mărime geometrică

Noţiunea de orientare a unui segment este esenţială în definiţia vectorului ca mărime geometrică. Ea decurge din noţiunea de ordine a punctelor unei drepte, care este definită prin axiomele de ordonare liniară ale lui Hilbert. Aceste axiome, fiind introduse în structura spaţiului înainte de axiomele de congruenţă, aparţin şi spaţiului afin, deci nu presupun noţiunea de distanţă între două puncte oarecare din spaţiu.

Vom defini orientarea segmentelor unei drepte ca o proprietate dedusă din noţiunea de ordine şi vom arăta cum se asociază segmentelor orientate o mărime geometrică.

Fiind dată dreapta Δ, vom spune că punctele A şi A' sunt pe această dreaptă de *aceeaşi parte a punctului* O, dacă acest punct nu se găseşte între A şi A'. Dacă punctul O se găseşte între A şi A', vom spune că A şi A' sunt *de o parte şi de alta a punctului* O.

Vom introduce o relaţie de echivalenţă a punctelor dreptei Δ, numind *echivalente* două puncte A şi A' situate de aceeaşi parte a punctului O.

Mulţimea tuturor punctelor dreptei Δ, din care excludem punctul O, constitue un obiect geometrie, proprietatea comună a figurilor acestui obiect fiind de a aparţine lui Δ şi de a fi diferite de O.

Punctul O împarte acest obiect geometric în două clase disjuncte în raport cu relaţia de echivalenţă introdusă, orice punct al dreptei, excluzând pe O, aparţinând uneia din cele două clase.[1])

Fiecare din aceste clase este reprezentată prin câte un punct A, respectiv B şi este determinată de punctul O şi de punctul A, respectiv B. Cu alte cuvinte, fiecare din cele două clase este determinată prin câte un segment OA, OB ale cărui extremităţi joacă roluri deosebite: O determină împărţirea în clase, iar A şi B cele două clase obţinute. Această distincţie ne conduce să numim O *origine* şi A *extremitate* a segmentului OA.

Mulţimea tuturor punctelor dreptei Δ, aparţinând uneia din cele două clase, complectată cu punctul O, se numeşte *semidreaptă* cu originea în O.

Vom numi *orientare* a segmentului OA cu originea în O proprietatea de a avea extremitatea A pe una din cele două semidrepte determinate de O.

Orientarea segmentului OA este determinată prin indicarea originii şi extremităţii sale, deci prin ordonarea perechii de puncte O şi A.

Un segment OA, căruia i se atribue proprietatea de orientare, se numeşte *segment orientat* pe dreapta Δ şi se notează OA.

Fiecărui segment cu originea în O şi cu extremitatea într'un punct oarecare A al dreptei Δ, diferit de O, îi corespunde o orientare, deci orice segment $\overline{OA} \neq O$ este orientat.

Oricărui segment orientat $\overline{OA}$ îi corespunde un punct A al dreptei Δ, diferit de O şi invers. Prin urmare, între mulţimea punctelor dreptei Δ, diferite de O şi mulţimea segmentelor orientate cu originea în O există o corespondenţă biunivocă. *Mulţimea segmentelor orientate cu origina în O defineşte un obiect geometric.* Relaţia de echivalenţă a punctelor dreptei Δ situate de

---

[1]) Vezi *N. V. Efimov.* Op. cit., p. 49.

Scanned with OKEN Scanner

aceeaşi parte a lui O, împarte mulţimea segmentelor orientate cu originea în O în două clase, corespunzătoare celor două semidrepte formate de extremităţile A.

Două segmente $\overline{OA}$ şi $\overline{OA'}$ vor avea *aceeaşi orientare* sau vor fi *echiorientate*, dacă extremităţile lor sunt echivalente, şi *orientări opuse* în cazul contrar. Obţinem astfel două clase disjuncte de segmente orientate echivalente, pentru care vom stabili următoarea proprietate: *Relaţia de echivalenţă a segmentelor orientate este reflexivă, simetrică şi transitivă.*

In adevăr, vom avea

$$\overline{OA} \equiv \overline{OA} \qquad (\textit{reflexivitate}),$$

segmentul $\overline{AA}$ neconţinând punctul O, dacă $A \neq O$. Deasemenea

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \longrightarrow \overline{OB} \equiv \overline{OA} \qquad (\textit{simetrie}),$$

deoarece în ipoteza că O este exterior lui $\overline{AB}$, el va fi exterior şi lui $\overline{BA}$.

In sfârşit

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \text{ şi } \overline{OB} \equiv \overline{OC} \longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \qquad (\textit{transitivitate.})$$

In adevăr, dacă $\overline{OA}$ şi $\overline{OC}$ nu ar fi echivalente, C nu ar aparţine clasei lui A, şi dacă M este un punct oarecare din clasa lui A, punctul O s'ar găsi între C şi M, deci şi între C şi B, fiindcă B face parte din clasa lui A. Ajungem astfel la o contradicţie, ceeace dovedeşte că C aparţine clasei lui A. Este de observat că împărţirea în clase foloseşte şi axioma lui Pasch[1]), deci este necesar ca dreapta Δ să fie considerată într'un plan.

Relaţia de echivalenţă având proprietăţile egalităţii, vom putea caracteriza clasele de segmente orientate cu originea în O printr'o mărime geometrică.

Vom numi *sens* al unui segment orientat $\overline{OA}$ mărimea geometrică prin care este caracterizată clasa acestui segment, în raport cu relaţia de echivalenţă a segmentelor orientate. In cazul când nu se poate produce confuzie de noţiuni vom putea folosi şi termenul de *orientare.*

Mulţimea sensurilor definite prin împărţirea dreptei Δ în clase cu ajutorul punctului O, conţine două elemente, deci este o specie de mărimi formată din două elemente pe care le vom numi *opuse.*

Cum fiecare din cele două semidrepte cu originea în O este determinată de un segment orientat $\overline{OA}$ şi conţine toată clasa acestui segment, *vom atribui sensul segmentului $\overline{OA}$ semidreptei pe care o determină.*

Sensul este mărimea geometrică asociată obiectului geometric format de mulţimea segmentelor orientate cu originea în O situate pe Δ.

In adevăr, fiind dat sensul unui segment $\overline{OA}$, deci fiind dat un reprezentant concret al mărimii geometrice „sens", întreaga clasă de segmente, care au acelaşi sens, este determinată în obiectul geometric considerat.

---

[1]) Vezi *N. V. Eftimov*, Op. cit., p. 45—49.

Axioma lui Pasch are enunţul următor: Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi D o dreaptă din planul A, B, C care nu conţine niciunul din aceste puncte. Dacă dreapta D trece printr'un punct al segmentului AB, ea trece sau printr'un punct al segmentului AC, sau printr'un punct al segmentului BC.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două semidrepte $\overline{OA}$ şi $\overline{OA'}$, determinate de aceste segmente cu originea comună O, constitue un obiect geometric. Proprietatea comună a punctelor lor este aceea că punctul O este exterior oricărui segment $\overline{AB}$ sau $\overline{A'B'}$ conţinut de una din ele.

Relaţia de echivalenţă introdusă împarte acest obiect în două clase având fiecare câte un element, caracterizat prin sensul segmentului reprezentativ $\overline{OA}$, respectiv $\overline{OA'}$. Astfel:

Sensul este mărimea geometrică asociată obiectului format de cele două semidrepte cu originea în O.

Proprietatea de orientare a segmentelor, aşa cum a fost definită, este legată de punctul O, deci fiecărui punct al dreptei îi corespunde o orientare a segmentelor cu originea în acel punct.

Vom spune că prin împărţirea punctelor dreptei în două clase cu ajutorul punctului O şi al relaţiei de echivalenţă *am orientat dreapta* Δ *în punctul O.* Deasemenea am asociat un sens fiecăreia dintre cele două semidrepte cu originea în O. Totuşi nu dispunem de niciun mijloc de a compara orientările dreptei Δ în două puncte diferite O şi O'.

Este important de observat că *relaţia de echivalenţă nu poate fi folosită în acest scop*, deoarece ea presupune originea tuturor segmentelor comună, deci este prea concretă pentru a putea fi transportată în alte puncte ale dreptei Δ.

Clasele în care se împarte mulţimea segmentelor dreptei, având originile în diversele sale puncte, sunt disjuncte şi fiecăreia îi corespunde o mărime, sensul, fără ca aceste sensuri să formeze o specie de mărimi, deoarece nu sunt comparabile decât câte două şi anume cele relative la acelaşi punct.

Vom impune următoare condiţie: *Orientarea segmentului* $\overline{BA}$ *este opusă orientării segmentului* $\overline{AB}$.

In acest mod vom compara orientările a două segmente cu origini diferite $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$. Rezultă că sensul lui $\overline{BA}$ este deasemenea opus sensului lui $\overline{AB}$. Clasa opusului $\overline{AB'}$ a lui $\overline{AB}$ va îngloba şi clasa lui $\overline{BA}$ realizându-se astfel o lărgire a claselor formate.

Vom putea deduce imediat o serie de proprietăţi de transport al orientării segmentelor.

Astfel vom avea propoziţiile următoare:

Dacă $\overline{OA}$ *şi* $\overline{OB}$ *au aceeaşi orientare, iar A se găseşte între O şi B, segmentele* $\overline{OA}$ *şi* $\overline{AB}$ *vor avea aceeaşi orientare şi deci, acelaşi sens.*

In adevăr, alegând A ca origine, segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{AO}$ vor avea orientări opuse, deci sensuri opuse. Dar $\overline{AO}$ are sensul opus lui $\overline{OA}$, deci $\overline{OA}$ va avea sensul lui $\overline{AB}$.

Dacă punctele A, O' şi A' se găsesc pe una din cele două semidrepte determinate de un punct O al dreptei Δ *şi dacă O' se găseşte între O şi A', segmentele* $\overline{OA}$ *şi* $\overline{O'A'}$ *au aceeaşi orientare şi deci, acelaşi sens.*

In adevăr, în baza propoziţiei precedente, segmentele $\overline{OO'}$ şi $\overline{O'A'}$ au aceeaşi orientare, dar $\overline{OO'}$ şi $\overline{OA}$ au deasemenea aceeaşi orientare, deoarece A şi O' sunt pe aceeaşi semidreaptă. In baza transitivităţii echivalenţei, $\overline{OA}$ şi $\overline{O'A'}$ vor avea aceeaşi orientare şi deci li se va asocia acelaşi sens. . . .

Scanned with OKEN Scanner

Această teoremă ne permite să comparăm orientările a două segmente oarecare $\overline{OA}$ şi $\overline{O'A'}$, deci orientările dreptei Δ în două puncte oarecare ale sale.

In acest scop, vom observa că, fiind date patru puncte O, A, O', A' pe o dreaptă Δ, există două dintre ele astfel încât segmentul determinat de acestea să conţină pe celelalte două. Cu această observaţie, vom putea aplica teorema precedentă într'una din cele două extremităţi (Exerciţiu).

Mulţimea tuturor segmentelor orientate, situate pe dreapta Δ, se împarte în două clase disjuncte caracterizate prin sensul segmentelor lor. Fie care semidreaptă cu originea într'un punct arbitrar O al dreptei Δ fiind determinată printr'un segment orientat, aceeaşi proprietate de împărţire în două clase disjuncte aparţine şi obiectului geometric format de mulţimea tuturor semidreptelor orientate ale dreptei Δ.

Cum definiţia orientării este bazată numai pe axiomele de legătură şi de ordonare, observăm că ea poate fi introdusă şi pe dreapta proiectivă din care am îndepărtat un punct oarecare considerat ca punct „la infinit“. [1]).

Dacă introducem postulatul paralelelor, ceeace revine la a da punctului dela infinit semnificaţia de punct de intersecţie al dreptei cu paralelele duse din diversele puncte ale spaţiului la ea, dreapta orientată este afină. Se vede deci că orientarea poate fi introdusă în spaţiul afin înainte de raportul a două segmente coliniare.

Sensul este o mărime nemăsurabilă. In adevăr, pentru a defini adunarea sensurilor, considerate ca mărimi asociate segmentelor orientate, trebue să introducem o compunere a segmentelor coliniare din care vom deduce adunarea sensurilor. Ori, este uşor de văzut că, folosind compunerea admisă în geometrie ca urmare a experienţei practice, nu vom putea obţine o operaţie de adunare a sensurilor.

Să presupunem în adevăr două segmente cu aceeaşi orientare, aşezate cap la cap. Suma lor va fi un segment cu aceeaşi orientare. Dacă însă orientările sunt opuse, vom putea obţine un segment de un sens sau de sensul opus. Prin urmare, la două elemente din mulţimea sensurilor nu corespunde în mod unic un element sumă şi deci, adunarea nu poate fi definită.

Sensul nu este dealtfel singura mărime nemăsurabilă în geometrie. O astfel de mărime este de exemplu şi direcţia. Mărimile nemăsurabile sunt mai greu de definit în termeni precişi; se prezintă însă asociate unor mărimi măsurabile, ceeace uşurează folosirea lor. In definiţia obişnuită a vectorului ca segment care o direcţie, un sens şi o lungime determinate, singura mărime măsurabilă este lungimea. Totuşi vectorul, el însuşi, este o mărime măsurabilă, rezultată din asocierea acestor trei mărimi.

EXERCIŢII

1. Care este condiţia necesară şi suficientă pentru ca trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ să poată forma un triunghi?

R. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.

2. Se dă paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ determinat prin vectorii $\overline{AB}=\bar{m}$, $\overline{AD}=\bar{n}$, $\overline{AA'}=\bar{p}$; să se exprime, cu ajutorul acestor vectori, vectorii $\overline{AC}$, $\overline{D'B'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{A'C}$, $\overline{D'B}$, $\overline{D'B'}$.

3. G fiind punctul de întâlnire al medianelor unui triunghi $A_1A_2A_3$, să se arate că

$$\overline{GA_1}+\overline{GA_2}+\overline{GA_3}=\bar{0}.$$

---

[1]) Vezi *N. V. Efimov*, Op. cit., p. 330.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație Se va ține seama că G împarte medianele în raportul $\frac{1}{2}$.

4. Fiind date patru puncte P, A_1, A_2, A_3 în spațiu, să se arate că

$$\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_3}=3\,\overline{PG}.$$

unde G este punctul de întâlnire al medianelor trunghiului $A_1\ A_2\ A_3$.

Indicație. Se va scrie $\overline{PA_i}=\overline{PG}+\overline{GA_i}$ și se va folosi exercițiul precedent.

5. Se dă o piramidă având vârful V și baza un paralelogram $ABCD$, ale cărui diagonale se taie în O. Să se arate că

$$\overline{VA}+\overline{VB}+\overline{VC}+\overline{VD}=4\,\overline{VO}.$$

Indicație. Se va observa că $\overline{VA}+\overline{VC}=\overline{VB}+\overline{VD}=2\,\overline{VO}$.

6. Să notăm cu $A'B'C'$ mijloacele laturilor unui trunghi ABC. Să se arate că

$$\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=\bar{0}.$$

Interpretare geometrică.

Indicație. $\overline{AA'}=\frac{1}{2}\ (\overline{AB}+\overline{AC})$, etc. Există totdeauna un triunghi având laturile egale și paralele cu medianele unui triunghiu dat.

7. Se dă un triunghiu ABC. Cu medianele sale $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ păstrându-le direcțiile se construește un al doilea triunghiu $A_1B_1C_1$. În mod analog, cu medianele acestui triunghi se construește triunghiul $A_2B_2C_2$. Să se arate că laturile triunghiului $A_2B_2C_2$ sunt paralele cu laturile triunghiului ABC, iar raportul de asemănare al acestor două triunghiuri este $\frac{3}{4}$.

Indicație. Se va folosi exercițiul precedent.

8. P, A, B, C fiind patru puncte în spațiu să se deducă din calculul sumei $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ că medianele unui triunghi ABC sunt concurente.

Indicație. Se va calcula suma în trei feluri deosibite,

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC},\quad \overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PA}\quad \text{și}\quad \overline{PC}+\overline{PA}+\overline{PB}.$$

9. Pe laturile triunghiului ABC se construesc paralelogramele arbitrare $ABB'A''$, $BCC'B''$ $CAA'C''$.

Să se arate că se poate construi un triunghi având laturile egale și paralele cu $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$.

Indicație. Se va scrie $\overline{A'A''}=\overline{A'A}+\overline{AA''}$ etc., de unde

$$\overline{A'A''}+\overline{B'B''}+\overline{C'C''}=\bar{0}.$$

10. Notăm cu M și N mijloacele laturilor AB și AC din triunghiul ABC. Să se arate că segmentul MN este paralel cu BC și egal cu jumătatea sa. Generalizarea pentru cazul când M și N împart $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ în același raport.

Indicație. Se scrie $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{CN}$, $\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AN}$ și se adună aceste două relații. Pentru generalizare se va scrie $\overline{MA}=\lambda\overline{MB}$, $\overline{NA}=\lambda\overline{NC}$.

11. Fie M și N două puncte, care împart în același raport latnrile neparalele ale unui trapez. Să se arate că $\overline{MN}$ este paralel cu bazele.

Indicație. Se procedează ca în problema precedentă.

12. Se dau n puncte echidistante $A_1A_2, \ldots, A_n$, situate în această ordine pe o aceeași dreaptă, și un punct exterior M. Să se arate că

$$\overline{MA_1}+\overline{MA_2}+\cdots+\overline{MA_n}=n\,\overline{MO},$$

O fiind mijlocul segmentului A_1A_n.

Indicație. Se va scrie $\overline{MA_i}=\overline{MO}+\overline{OA_i}$ și se va observa că vectorii $\overline{OA_i}$ se pot grupa în perechi de vectori opuși.

Scanned with OKEN Scanner

13. Pe două drepte din spațiu se consideră câte n puncte echidistante $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Fie P un punct oarecare. Să se arate că

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \ldots + \overline{A_nB_n} = n\overline{OO'},$$

unde O și O' sunt mijloacele segmentelor $\overline{A_1A_n}$ și $\overline{B_1B_n}$.

Indicație. Se va utiliza exercițiul precedent.

14. Fie C_1 și C_2 două cercuri fixe, $A_1A_2A_3A_4$ un dreptunghi înscris în C_1 și $B_1B_2B_3B_4$ un dreptunghi înscris în C_2. Să se demonstreze egalitatea $\sum_{l=1}^{n} \overline{A_lB_l} = \overline{K}$, unde $\overline{K}$ este un vector constant.

15. Fie P și A_0 două puncte fixe și A_1 și A_2 două puncte care se deplasează pe dreapta D. Să se arate că vârful rezultantei $\overline{PR} = \overline{PA_0} + \overline{PA_1} + \overline{PA_2}$ rămâne pe o paralelă la D.

Indicație. Se va observa că R se obține din vârful vectorului $\overline{PA_1} + \overline{PA_2}$ prin translația $\overline{PA_0}$.

16. Fie $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ vectorii de poziție ai punctelor A_1 și A_2. Să se afle vectorul de poziție $\bar{r}$ al mijlocului M al segmentului $\overline{A_1A_2}$.

Indicație. Se va scrie $\bar{r} = \bar{r}_1 + \overline{A_1M}$ și $\bar{r} = \bar{r}_2 + \overline{A_2M}$ și se va ține seama că $\overline{A_1M} + \overline{A_2M} = 0$.

17. Să se afle vectorul de poziție al punctului M care împarte segmentul $\overline{A_1A_2}$ în raportul λ ($\overline{A_1M} = -\lambda\overline{A_2M}$).

Indicație. Se va proceda ca la exercițiul precedent.

18. Se dau n puncte A_l ($l = 1, 2, \ldots, n$) în spațiu. Să se arate că există un punct C, astfel ca

$$\overline{CA_1} + \overline{CA_2} + \ldots + \overline{CA_n} = \bar{0}.$$

Indicație. Se va lua un punct O ca reper și se va scrie $\overline{CA_l} = \overline{CO} + \overline{OA_l}$. Se găsește $\overline{OC} = \frac{1}{n}\sum \overline{OA_l}$. Punctul C se numește centrul distanțelor medii sau baricentrul punctelor A_l cu mase egale.

19. Fiind date n puncte A_l cărora le atașăm câte un scalar λ_l, astfel că $\sum \lambda_l \neq 0$, există un punct G și numai unul singur, astfel ca

$$\sum \lambda_l \overline{GA_l} = 0.$$

Indicație. La fel ca în problema precedentă se va găsi baricentrul sistemului de puncte A_l de mase λ_l.

20. Se dau n puncte A_l situate în același plan P. Fie O un punct fix. Se cere locul geometric al vârfului vectorului $\bar{R} = \sum \overline{OA_l}$, când punctele A_l se mișcă în planul P.

Indicație. Fie C baricentrul punctelor A_l. Scriind $\overline{OA_l} = \overline{OC} + \overline{CA_l}$, se deduce $\bar{R} = n\overline{OC}$. Punctul C fiind obligat să rămână în planul P al punctelor A_l, vârful rezultantei va descrie un plan paralel cu P.

21. Să se generalizeze problema precedentă pentru cazul când $\bar{R} = \sum \lambda_l \overline{OA_l}$, unde $\sum \lambda_l \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

22. Să se arate că într'un tetraedru cele patru segmente care unesc vârfurile cu centrul de greutate al feţelor opuse şi cele trei segmente care unesc mijloacele a două muchii opuse au un punct comun. Acest punct este situat în mijlocul ultimelor trei segmente şi la un sfert din lungimea fiecăruia din primele, începând dela faţa corespunzătoare (fig. 16).

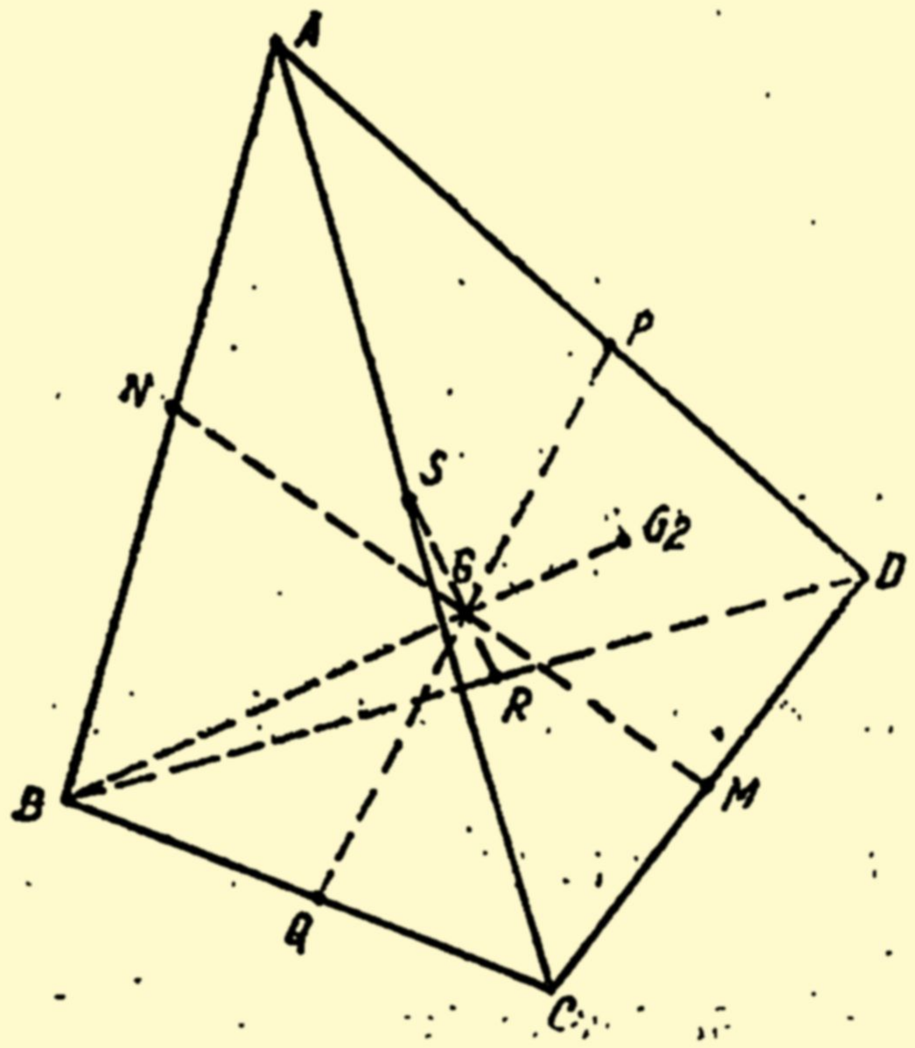


Fig. 16

Indicaţie. Se va utiliza exerciţiul 18. Punctul comun este centrul de greutate al tetraedrului.

23. Se dau cinci puncte în spaţiu.

a) Să se demonstreze că dreptele care unesc fiecare dintre aceste puncte cu centrul de greutate al tetraedrului format de celelalte patru trec prin acelaşi punct O.

b) Dreptele care unesc mijlocul unui segment determinat de două dintre puncte cu centrul de greutate al triunghiului format de celelalte trei trec prin acelaşi punct O.

Indicaţie. Punctul O este baricentrul celor cinci puncte.

24. Să se deducă teoreme analoage celor din exerciţiul precedent pentru şase, şapte şi opt. puncte.

25. Translaţiile formează grup faţă de operaţia de compunere, care face să corespundă translaţiilor determinate de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ translaţia determinată de vectorul $\bar{a}+\bar{b}$.

Indicaţie. Se numeşte grup o mulţime de elemente pentru care este definită o operaţie de compoziţie (produs) cu următoarele proprietăţi:

a) produsul a două elemente din mulţime face parte din mulţime; b) produsul este asociativ; c) există un element identitate (unitate) care, aplicat la dreapta unui element din grup, lasă elementul neschimbat; d) fiecare element are un invers la dreapta care, compus cu elementul respectiv, ne dă unitatea.

In cazul considerat, operaţia de compoziţie este o adunare.

26. Fie C_1 şi C_2 două cercuri fixe şi fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi $B_1, B_2, \ldots, B_m$ vârfurile a două poligoane regulate înscrise respectiv în C_1 şi C_2. Să se demonstreze că suma $\sum_{i,j=1}^{n,m} A_iB_j$ este constantă. (Se va proceda ca în problema 15).

27. Dacă $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, v_n$ sunt n vectori, atunci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{v}_i\right|.$$

Indicaţie. Se va utiliza proprietatea care spune că într'un triunghi lungimea unei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi.

C. BAZELE GEOMETRICE ALE CALCULULUI VECTORIAL

§ 23. Mărimile vectoriale şi structura spaţiului

Reprezentarea prin vectori a mărimilor fizice caracterizate prin direcţie, sens şi măsură pe direcţia respectivă pune în evidenţă strânsa legătură între aceste mărimi, pe care le-am numit vectoriale şi proprietăţile geometrice ale spaţiului.

Scanned with OKEN Scanner

Considerarea celor mai simple proprietăți ale materiei, ca cele de întindere, formă, etc., conduce la o imagine simplificată a spațiului, ca mulțime a tuturor punctelor materiale. La noțiunea de punct se ajunge prin reducerea ir definită a dimensiunilor unei particule materiale, luând în considerație dintre toate proprietățile acesteia, numai pe aceea de întindere.

Diversele înfățișări ale corpurilor materiale sub aspectul formei, întinderii, pozițiilor relative, etc., pun deasemenea în evidență numeroase relații, numite geometrice, între punctele lor, în fenomenele ce se desfășoară. Dintre aceste relații, unele sunt simple și pot servi la exprimarea altora mai complexe, cu ajutorul cărora putem defini proprietățile corpurilor considerate ca alcătuite din puncte. Dintre cele mai simple relații geometrice se poate extrage un sistem, din care apoi se pot deduce toate celelalte.

Aceste relații, care stau la baza Geometriei, se numesc *axiome.* Un sistem de axiome, din care se pot deduce proprietățile geometrice ale spațiului, deci prin care se pot defini rând pe rând configurațiile geometrice de puncte și stabili relațiile geometrice dintre ele, exprimă *structura spațiului.*

Unele proprietăți geometrice nu se bazează decât pe o parte din sistemul de axiome, deci fac să intervină numai o parte din structura spațiului. Așa, de exemplu, în unele fenomene ne mulțumim să stabilim că un punct se mișcă pe o linie dreaptă, fără o face măsurători de unghiuri sau distanțe, deci fără o folosi noțiunea de lungime și, în consecință, axiomele prin care este definită această noțiune fundamentală.

Se poate face o clasificare sistematică a proprietăților figurilor după axiomele pe care sunt bazate. Cu cât numărul de axiome este mai mic, cu atât proprietatea este mai generală; deci aparține unei clase mai largi de figuri.

Dacă lăsăm neutilizată o parte din axiome, spațiul ne va apărea mai sărac în proprietăți și invers, dacă luăm în considerație un număr mai mare de axiome, spațiul va apărea înzestrat cu proprietăți mai numeroase. Cele obținute prin adăugarea de axiome vor fi mai particulare și vor aparține la clase mai restrânse de figuri. Astfel, dacă în Geometria plană nu introducem noțiunile de distanță și de unghi, nu vom putea deosebi cercul de o elipsă sau triunghiul dreptunghi de un triunghi oarecare. Proprietățile speciale ale triunghiurilor dreptunghice nu vor putea fi puse în evidență, deasemenea nu vom putea defini înălțimile unui triunghi oerecare și ne vom mărgini să studiem numai proprietățile generale ale triunghiurilor oarecare, considerate ca figuri ce rezultă din unirea două câte două a trei puncte necoliniare.

Cercetarea fenomenelor fizice ne conduce la necesitatea de a desvolta Geometria pe baza celor mai simple dintre proprietățile geometrice ale figurilor și de a sistematiza studiul Geometriei prin formularea axiomelor și întemeierea demonstrațiilor pe aceste axiome.

In reprezentarea geometrică a desfășurării unor fenomene nu intervin decât o parte din axiomele geometrice, de exemplu nu este necesar să comparăm între ele lungimi măsurate pe două direcții diferite, sau să măsurăm unghiuri. Aceasta ne va permite să folosim proprietăți mai generale ale figurilor și metode de demonstrație aplicabile la clase mai largi de figuri, vom putea stabili analogii cu alte fenomene și vom obține rezultate aplicabile și acestora.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece vectorii sunt mărimi asociate unor figuri geometrice, iar operaţiile vectoriale sunt operaţii geometrice, toate definiţiile şi proprietăţile vectoriale trebue să decurgă din axiomele geometrice. Dacă într'o categorie de fenomene nu este necesar să comparăm măsurile mărimilor vectoriale calculate pe direcţii diferite din spaţiu, în definiţia vectorilor nu vom utiliza noţiunea de modul şi deci în structura spaţiului nu vom ţine seama de noţiunea de distanţă. *Vom vedea că o parte importantă dintre operaţiile vectoriale nu foloseşte noţiunea de modul* şi aceasta ne permite să legăm aceste operaţii de proprietăţi simple şi fundamentale ale dreptei şi planului.

O problemă esenţială în Geometrie, aceea a localizării corpurilor prin reperarea punctelor lor, se pune şi în calculele cu vectori. In adevăr, pentru a compara doi vectori trebue să putem şti dacă sunt echipolenţi sau nu, deci dacă, atunci când au originea comună, extremităţile lor coincid sau sunt distincte. *Va fi deci nevoie să ştim să determinăm un vector în mulţimea tuturor vectorilor, aşa cum ştim să determinăm un număr în mulţimea tuturor numerelor reale.* Ori, cum un vector este definit prin două puncte A şi B din spaţiu, aceasta revine la determinarea poziţiei punctelor spaţiului. Pentru aceasta va trebui să considerăm ca date un număr de puncte şi să determinăm apoi poziţia tuturor celorlalte în raport cu acestea. Aceasta va corespunde la determinarea unui vector oarecare cu ajutorul unui număr de vectori presupuşi cunoscuţi. Pe de altă parte, unele fenomene se desfăşoară, cel puţin într'o primă aproximaţie, dealungul unei drepte sau unei curbe, altele — într'un plan sau pe o suprafaţă. Mărimile vectoriale caracteristice acestor fenomene vor fi reprezentate prin vectori, ce se vor găsi pe dreapta, curba, planul sau suprafaţa respectivă. De exemplu, tensiunile într'un fir flexibil şi inextensibil, întins cu ajutorul unor forţe aplicate la capetele sale, se reprezintă prin vectori situaţi pe dreapta pe care e aşezat firul. Va fi deci necesar să determinăm condiţiile în care un vector se găseşte pe o dreaptă sau într'un plan şi aceste condiţii se vor exprima prin relaţii geometrice.

Aceste consideraţii arată că *operaţiile cu mărimile vectoriale corespund unor operaţii geometrice şi deci decurg din structura spaţiului.* După cum o parte din proprietăţile geometrice ale corpurilor nu sunt bazate decât pe o parte din axiome, tot aşa *o parte din operaţiile vectoriale nu vor folosi decât unele dintre aceste axiome şi aceasta le va da o mai mare generalitate.*

§ 24. Vectori coliniari

Am numit coliniari doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, care au aceeaşi direcţie şi am văzut că în acest caz unul din ei poate fi măsurat prin celălalt, dacă ambii reprezintă mărimi de aceeaşi natură fizică, de exemplu, viteze, acceleraţii, etc. In acest caz, putem scrie $\bar{v}=k\bar{u}$. Dar doi vectori pot avea aceeaşi direcţie, chiar dacă diferă prin natura lor fizică, cum sunt de exemplu forţa electrostatică şi câmpul respectiv: $\bar{F}=q\bar{E}$.

Vom stabili următoarea propoziţie: *Condiţia necesară şi suficientă ca doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ să fie coliniari este ca între ei să existe relaţia*

$$\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}=\bar{0}, \qquad (33,1)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde λ *şi* μ *sunt doi scalari oarecare, dintre care unul cel puţin nu este nul.*

Condiţia este necesară. In adevăr, dacă vectorii sunt coliniari, ei au aceeaşi direcţie, caracterizată printr'un vector-unitate $\bar{a}$. Vom putea deci pune pe $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sub formă:

$$\bar{u}=\alpha\bar{a}; \quad \bar{v}=\beta\bar{a},$$

α şi β fiind măsurile respective faţă de unitatea $\bar{a}$.

Vom avea deci, presupunând vectorul $\bar{u}\neq 0$

$$\bar{a}=\frac{1}{\alpha}\bar{u}, \quad \text{cu} \quad \alpha\neq 0,$$

de unde

$$\bar{v}=\frac{\beta}{\alpha}\bar{u}=\gamma\bar{u}, \quad \gamma=\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (34,\text{I})$$

Scalarul γ putând fi pus şi sub forma $\gamma=-\frac{\lambda}{\mu}$, relaţia (34,I) se transformă imediat în (33,I). Condiţia este şi *suficientă*, fiindcă din (33,I) deducem, aplicând regulile de calcul vectorial stabilite:

$$\bar{v}=-\frac{\lambda}{\mu}\bar{u}=\gamma\bar{u}, \quad (\mu\neq 0).$$

Se vede că vectorii $\bar{v}$ şi $\gamma\bar{u}$ au aceeaşi direcţie, în plus că relaţia caracteristică (33,I) se poate scrie mai simplu sub forma (34,I)

Ori de câte ori între doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ există o combinaţie liniară de forma (33,I), cu coeficienţi scalari λ şi μ care nu sunt nuli deodată, şi care este egală cu vectorul nul, spunem că cei doi vectori sunt *liniar dependenţi.*

Doi vectori liniar dependenţi sunt coliniari şi reciproc.

Fiind daţi doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, pentru ca ei să nu fie coliniari, este necesar şi suficient ca relaţia (33,I) să nu aibă loc, deci să nu existe doi scalari λ şi μ (nenuli în acelaşi timp), astfel încât $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}=\bar{0}$.

Doi vectori pentru care $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}\neq\bar{0}$, oricare ar fi λ şi μ nenuli în acelaşi timp, se numesc *liniar independenţi.*

Doi vectori liniar independenţi au direcţii diferite în spaţiu.

Din cele ce preced, se vede că poziţia relativă a doi vectori *în spaţiu* este caracterizată prin combinaţia liniară vectorială $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}$, în care λ şi μ sunt doi scalari arbitrari: dacă aceştia pot fi aleşi astfel încât $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}=\bar{0}$, vectorii sunt coliniari, în caz contrar ei au direcţii distincte.

Aplicaţie. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca vectorii* $\bar{a}+\bar{b}$ *şi* $\bar{a}-\bar{b}$ *să fie coliniari. este ca* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *să fie coliniari.*

Din punct de vedere geometric, problema se reduce la a arăta că un paralelogram de laturi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ are diagonalele $\bar{a}+\bar{b}$ şi $\bar{a}-\bar{b}$ pe o aceeaşi dreaptă, atunci şi numai atunci când laturile sale sunt pe o aceeaşi dreaptă.

Să folosim, însă, teorema de mai sus. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\bar{a}+\bar{b}$ şi $\bar{a}-\bar{b}$ să fie coliniari este ca între ei să existe relaţia

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})+\mu(\bar{a}-\bar{b})=0,$$

unde λ şi μ nu sunt amândoi nuli, relaţie echivalentă cu

$$(\lambda+\mu)\bar{a}+(\lambda-\mu)\bar{b}=\bar{0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum λ şi μ nu sunt amândoi nuli, nu putem avea deodată $\lambda+\mu=0$ şi $\lambda-\mu=0$. Deci condiţia de coliniaritate a vectorilor $\bar{a}+\bar{b}$ şi $\bar{a}-\bar{b}$ este echivalentă cu condiţia de coliniaritate a vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

§ 25. Vectori coplanari

Geometria ne învaţă că două drepte concurente, de direcţii diferite, determină un plan.

Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar independenţi, combinaţia liniară $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}$ va reprezenta un vector $\bar{w}\neq\bar{0}$:

$$\bar{w}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}. \qquad (35,I)$$

Să considerăm planul definit de vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ duşi într'un punct O (fig. 17). Evident că atât $\overline{OA}=\lambda\bar{u}$, cât şi $\overline{OB}=\mu\bar{v}$ sunt cuprinşi în acest plan, astfel încât paralelogramul $OAMB$ este în acelaşi plan. Ori, M este extremitatea vectorului $\overline{OM}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}=\bar{w}$, deci: *Dacă doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar independenţi, ei definesc un plan, iar vectorul $\bar{w}$ definit de combinaţia liniară $\bar{w}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}$ este paralel cu acest plan (sau cuprins în el).*

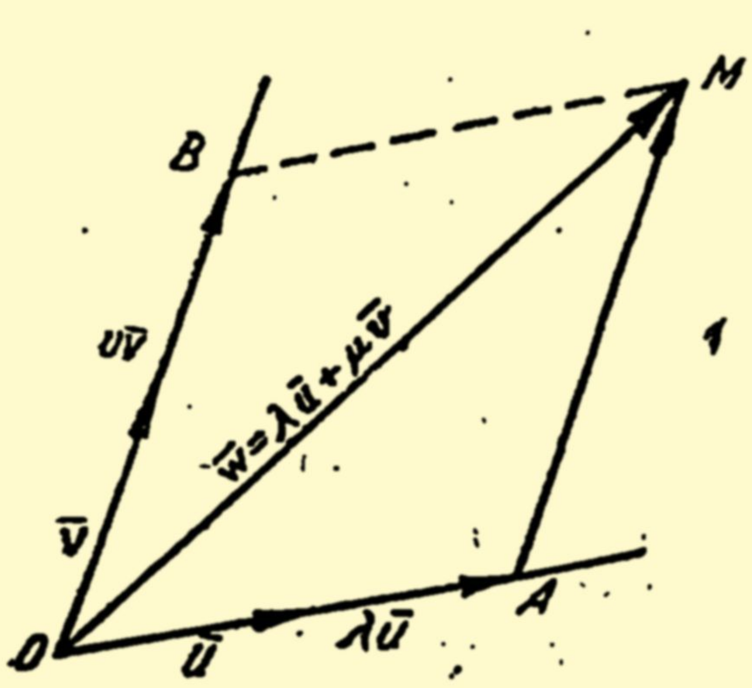


Fig. 17

Trei vectori se numesc *coplanari*, dacă sunt paraleli cu un acelaşi plan, sau sunt chiar situaţi în acest plan.

Vom spune deci că un vector $\bar{w}$ este coplanar cu doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ liniar independenţi, deci necoliniari, dacă este paralel cu planul definit de aceştia. In general trei vectori nu sunt coplanari, decât dacă există între ei o relaţie dată de următoarea propoziţie:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca trei vectori $\bar{u}$, v, $\bar{w}$ să fie coplanari, este ca între ei să existe relaţia:

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}=\bar{0} \qquad (36,I)$$

unde α, β, γ sunt trei scalari nenuli în acelaşi timp.

In adevăr să presupunem că $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt necoliniari. Atunci ei determină un plan ca în fig. 17 şi $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}\neq\bar{0}$ pentru orice α şi β. Fie un vector oarecare $\bar{w}$ din acest plan mutat cu originea în O şi deci reprezentat de segmentul orientat $\overline{OM}=\bar{w}$.

Dacă din punctul M se duce o paralelă MA la direcţia lui $\bar{v}$, aceasta va întâlni suportul lui $\bar{u}$ într'un punct A, deoarece $\bar{v}$ şi $\bar{u}$ nu sunt paraleli.

Vectorul $\overline{OA}$ poate fi măsurat prin $\bar{u}$, iar $\overline{AM}$ prin $\bar{v}$. Vom pune $\overline{OA}=\lambda\bar{u}$, $\overline{AM}=\mu\bar{v}$. Insă

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v},$$

de unde:

$$\bar{w}=\lambda^{u}+\mu\bar{v} \qquad (37,I)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, orice vector din plan are expresia (35,I). Pe de altă parte, combinaţia liniară (35,I) sau (37,I), definind totdeauna un vector din planul determinat de $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, *cei trei vectori* $\bar{u}$, $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ *sunt coplanari dacă, şi numai dacă, între ei există relaţia* (37,I).

In această relaţie putem pune totdeauna pe λ şi μ sub forma

$$\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \mu = -\frac{\beta}{\gamma}, \quad \text{cu } \gamma \neq 0.$$

Introducând aceste expresii în (37,I) obţinem relaţia (36,I) din enunţ, care pune condiţia de coplanaritate a celor trei vectori sub o formă simetrică.

Am examinat cazul când $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar independenţi. Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar dependenţi, deci coliniari, există între ei o relaţie de forma $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}=\bar{0}$ cu α şi β nenuli deodată.

Orice vector, $\bar{w}$ poate fi considerat coplanar cu $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, fiindcă aceştia reprezintă aceeaşi direcţie. In acest caz, relaţia (35,I) se poate scrie:

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+0\bar{w}=\bar{0} \qquad (\gamma=0)$$

şi există în mod necesar.

Evident, dacă o astfel de relaţie există între trei vectori $\bar{u}$, v, $\bar{w}$, din care $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt coliniari, atunci $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}$ are direcţia lui $\bar{u}$ şi este deci de forma $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}=\lambda\bar{u}$, iar relaţia (36,I) se reduce la $\lambda\bar{u}+\gamma\bar{w}=\bar{0}$, ceeace impune ca vectorul $\bar{w}$ să fie coliniar cu $\bar{u}$. Cei trei vectori sunt prin urmare, coliniari şi evident coplanari, deci relaţia (36,I) este şi în acest caz necesară şi suficientă.

Aplicaţie: *Cu vectorii* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, *nesituaţi în acelaşi plan, se construesc vectorii:*

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= \bar{v}_1+2\bar{v}_2-3\bar{v}_3,\\ \bar{u}_2 &= 2\bar{v}_1-3\bar{v}_2+\bar{v}_3,\\ \bar{u}_3 &= 3\bar{v}_1-8\bar{v}_2-5\bar{v}_3.\end{aligned}$$

Să se arate că $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ *sunt coplanari.*

Trebue să arătăm că există trei scalari α, β, γ, nu toţi nuli, astfel ca

$$\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{u}_2+\gamma\bar{u}_3=0.$$

Această relaţie se mai scrie:

$$(\alpha+2\beta+3\gamma)\bar{v}_1+(2\alpha-3\beta-8\gamma)\bar{v}_2+(-3\alpha+\beta+5\gamma)\bar{v}_3=0.$$

Dar $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ nefiind situaţi în acelaşi plan, va trebui să avem:

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0,\\ 2\alpha-3\beta-8\gamma=0,\\ -3\alpha+\beta+5\gamma=0.\end{cases}$$

Determinantul acestui sistem fiind nul, vom avea soluţii unde α, β, γ nu sunt toţi nuli, şi anume:

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta}{-2}=\frac{\gamma}{1}.$$

Descompunerea unui vector după două direcţii. Formula (37,I) ne permite să exprimăm un vector oarecare $\bar{w}$ cu ajutorul a doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ necoliniari, situaţi în acelaşi plan cu $\bar{w}$. Pentru aceasta este suficient să reluăm fig. 17. Ducând direcţiile $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ în punctul O din planul comun celor trei vectori şi

Scanned with OKEN Scanner

luând $\overline{OM}=\bar{w}$, paralelele MA şi MB la $\bar{v}$ şi $\bar{u}$ determină un paralelogram, în care $\overline{OM}$ este diagonala. Măsurând vectorii $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ cu $\bar{u}$, respectiv $\bar{v}$, vom avea $\overline{OA}=\lambda\bar{u}$, $\overline{OB}=\mu\bar{v}$ şi deci

$$\bar{w}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}.$$

Spunem că *am descompus* vectorul $\bar{w}$ după direcţiile $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, obţinând *componentele* $\lambda\bar{u}$ şi $\mu\bar{v}$. Numerele λ şi μ reprezintă măsurile acestor componente în raport cu vectorii-unitate $\bar{u}$ şi $\bar{v}$.

Pentru unităţile $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ nu există deocamdată niciun criteriu de comparaţie, fiind vectori de direcţii diferite. Deaceea, *măsurile celor două componente nu se pot compara între ele.*

Un vector oarecare are totdeauna două componente după direcţiile a doi vectori liniar independenţi, coplanari cu el.

Descompunerea făcută extinde la vectorii coplanari măsura vectorilor coliniari cu ajutorul unui vector-unitate. Ea permite să exprimăm orice vector în funcţie de alţi doi vectori, coplanari cu el şi se bucură de următoarea proprietate esenţială:

Descompunerea unui vector $\bar{w}$ după direcţiile a doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ liniar independenţi şi coplanari cu el se face în mod unic.

Să presupunem contrariul, deci să presupunem că am mai putea avea şi descompunerea:

$$\bar{w}=\lambda'\bar{u}+\mu'\bar{v},$$

unde scalarii λ' şi μ' sunt diferiţi de λ şi μ.

Atunci

$$\bar{w}-\bar{w}=(\lambda-\lambda')\bar{u}+(\mu-\mu')\bar{v}=\bar{0}.$$

Insă, vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ fiind liniar independenţi, aceasta nu este posibil decât dacă $\lambda-\lambda'=0$ şi $\mu-\mu'=0$; de unde $\lambda=\lambda'$ şi $\mu=\mu'$, ceeace arată unicitatea descompunerii.

Această teoremă, împreună cu operaţia de descompunere a unui vector după două direcţii coplanare cu el, pune în lumină importanţa relaţiei $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}=0$, caracteristică pentru trei vectori coplanari.

In adevăr, nu numai că această relaţie permite să recunoaştem în ce caz trei mărimi vectoriale sunt legate de un fenomen ce are loc într'un plan, dar, în acelaşi timp, ea ne conduce la exprimarea tuturor mărimilor geometrice vectoriale ale acelui plan cu ajutorul a două dintre ele.

Aplicaţie. *G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC, să se descompună vectorul $\overline{GA}$ după direcţiile a două din laturile triunghiului.*

Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC. Avem:

$$\overline{GA}=-\frac{2}{3}\overline{AA'},$$

iar

$$\overline{AA'}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}).$$

Deci

$$\overline{GA}=-\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC}).$$

Să notăm:

$$\overline{BC}=\bar{a},\quad \overline{CA}=\bar{b},\quad \overline{AB}=\bar{c}.$$

Cu aceasta,

$$\overline{GA}=-\frac{1}{3}(\bar{c}-\bar{b})=\frac{1}{3}\bar{b}-\frac{1}{3}\bar{c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținând seama că $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$, se obțin imediat și descompunerile vectorului $\overline{GA}$ după celelalte două perechi de laturi:

$$\overline{GA}=-\frac{2}{3}\bar{c}-\frac{1}{3}\bar{a}; \qquad \overline{GA}=\frac{1}{3}\bar{a}+\frac{2}{3}\bar{b}.$$

§ 26. Vectori liniar independenți

Relația $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}=\bar{0}$ stabilește deci între cei trei vectori o dependență, care conduce la localizarea lor într'un anumit plan al spațiului, după cum relația analoagă $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}=\bar{0}$ făcea ca cei doi vectori să fie localizabili pe aceeași dreaptă.

Fiind dați n vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots \bar{v}_n$, vom spune că ei sunt *liniar dependenți* dacă există n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nu toți nuli, astfel încât să avem relația

$$\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\cdots+\lambda_n\bar{v}_n=\bar{0}. \qquad (38,I)$$

Condiția ca $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ să nu fie toți nuli se poate exprima printr'o singură expresie algebrică: $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2\neq 0$, fiindcă o sumă de pătrate nu se poate anula decât dacă toți termenii săi sunt nuli.

Dimpotrivă, dacă relația

$$\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\cdots+\lambda_n\bar{v}_n=\bar{0}$$

atrage după sine relațiile

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=0, \ldots, \quad \lambda_n=0,$$

spunem să cei n vectori sunt *liniar independenți*.

Când n vectori sunt liniar dependenți, conturul poligonal determinat de combinația liniară $\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\lambda_n\bar{v}_n$ se închide, originea coincizând cu extremitatea.

In cazul a trei vectori, acest contur fiind un triunghi, vectorii respectivi vor fi coplanari, fiindcă triunghiul este un poligon plan.

Teoremă. *Dacă n vectori sunt liniar independenți, atunci o parte oarecare dintre ei sunt deasemenea liniar independenți*[1]):

In adevăr, dacă de exemplu $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ ar fi liniar dependenți ($k<n$), între ei ar exista o relație de forma:

$$\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\cdots+\lambda_k\bar{v}_k=\bar{0}, \qquad (39,I)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ nu sunt toți nuli.

Scriind

$$\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_1\bar{v}_2+\cdots+\lambda_k\bar{v}_k+0\bar{v}_{k+1}+\cdots+0\bar{v}_n=\bar{0},$$

obținem o combinație liniară nulă, cu coeficienți nu toți nuli. Ori, aceasta este în contradicție cu condiția impusă ca cei n vectori să fie liniar independenți, deci relația (39,I) nu este posibilă.

---

[1]) Teorema nu afirmă existența a n vectori liniar independenți, ci numai faptul că dacă ei sunt liniar independenți, atunci o parte dintre ei sunt deasemenea liniar independenți.

Scanned with OKEN Scanner

Însemnătatea acestei teoreme este mare. In cazul $n=3$ de exemplu, dacă trei vectori sunt liniar independenţi, ei sunt necoplanari. Din faptul că doi dintre ei sunt deasemenea liniar independenţi, deducem că ei nu pot fi nici doi câte doi coliniari, adică: *Trei vectori necoplanari determină, doi câte doi, câte un plan şi aceste plane sunt concurente într'un punct O.*

Figura formată din trei plane concurente, care nu trec prin aceeaşi dreaptă, se numeşte *triedru:* Trei vectori liniar independenţi determină un triedru.

Putem spune: *Condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori să formeze un triedru este ca ei să fie liniar independenţi, ceace se exprimă scriind*

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 \neq \bar{0}. \qquad (40,I)$$

§ 27. Reprezentarea vectorilor în spaţiu

Condiţia (40,I) caracterizează poziţiile mutuale a trei vectori necoplanari. In general, combinaţia liniară $\bar{\omega}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}+\nu\bar{w}$ caracterizează figura formată de trei vectori. Aceasta este un plan, dacă $\bar{\omega}$ reprezintă vectorul nul, în caz contrar vectorul $\bar{\omega}$ descrie întreg spaţiul când λ, μ, ν variază.

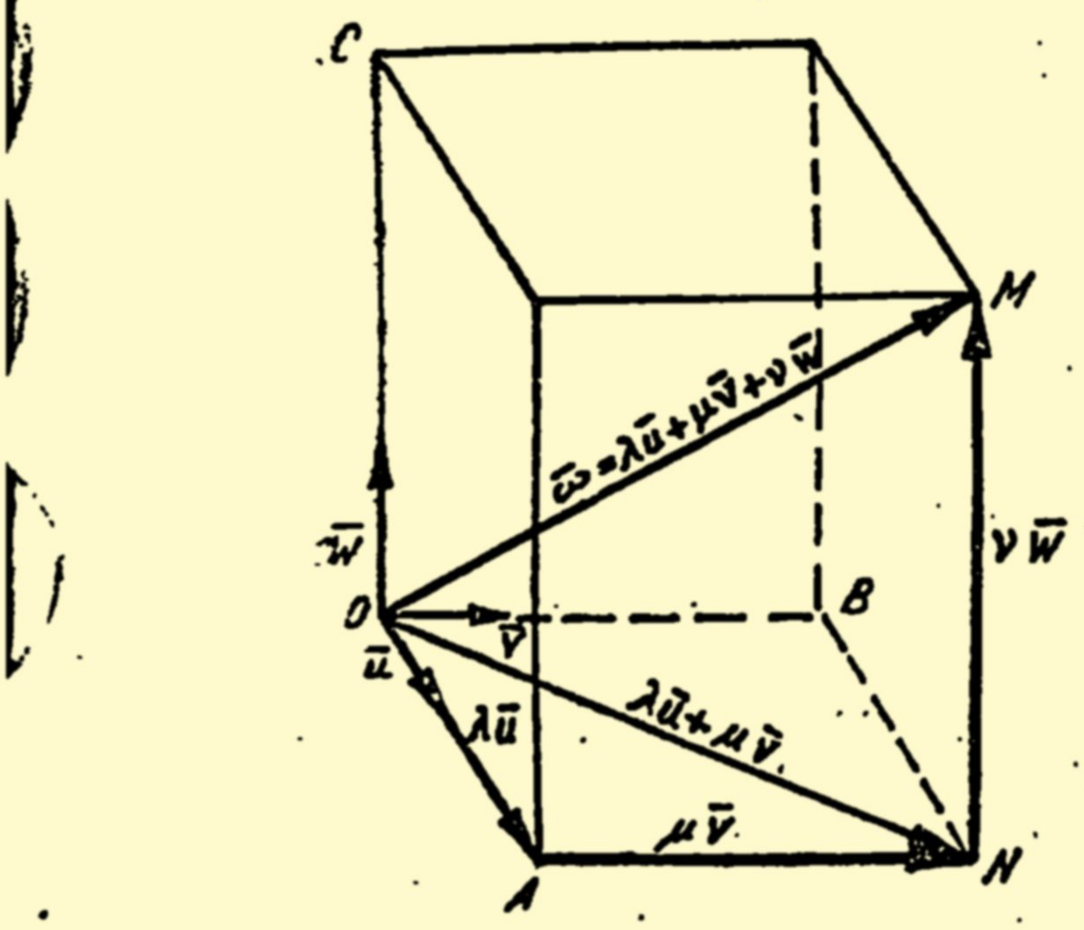


Fig. 18

Luând într'un punct O trei direcţii paralele cu $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ şi un vector oarecare $\overline{OM}=\bar{\omega}$, dacă din M ducem o paralelă la $\bar{w}$, aceasta va întâlni planul format de $\bar{u}$ cu $\bar{v}$, într'un punct N, fiindcă $\bar{w}$ nu este paralel cu acest plan (fig. 18).

Dacă din N ducem o paralelă la $\bar{v}$, aceasta va întâlni deasemenea pe $\bar{u}$, fiindcă $\bar{v}$ nu este paralel cu $\bar{u}$, într'un punct A.

Vom avea

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AN}+\overline{NM}.$$

Măsurând aceşti vectori cu unităţile respective $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, vom pune:

$$\overline{OA}=\lambda\bar{u},\quad \overline{AN}=\overline{OB}=\mu\bar{v},\quad \overline{NM}=\overline{OC}=\nu\bar{w}$$

şi vom putea scrie:

$$\bar{\omega}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}+\nu\bar{w} \qquad (41,I)$$

stabilind următorul rezultat:

Teoremă. *Orice vector $\bar{\omega}$ din spaţiul cu trei dimensiuni se exprimă ca o combinaţie liniară, vectorială, formată cu trei vectori liniar independenţi arbitrari $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.*

Operaţia vectorială prin care un vector oarecare $\bar{\omega}$ se exprimă ca o combinaţie liniară de trei vectori necoplanari, este traducerea vectorială a operaţiei geometrice descrise mai sus, prin care vectorul $\bar{\omega}$ devine suma geometrică a vectorilor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Vom numi această operaţie *descompunerea* vectorului $\bar{\omega}$ după trei direcţii necoplanare.

Scanned with OKEN Scanner

Descompunerea unui vector cu ajutorul a trei vectori necoplanari $\bar{u}$, $\bar{v}$ $\bar{w}$ este unică.

Repetând un raţionament făcut anterior, vom admite o a doua descompunere de forma:

$$\bar{\omega}=\lambda'\bar{u}+\mu'\bar{v}+\nu'\bar{w}. \qquad (42,I)$$

Scăzând (42,I) din (41,I), membru cu membru, avem:

$$(\lambda-\lambda')\bar{u}+(\mu-\mu')\bar{v}+(\nu-\nu')\bar{w}=0,$$

de unde $\lambda=\lambda'$, $\mu=\mu'$, $\nu=\nu'$ ţinând seama de independenţa liniară a lui $\bar{u}$, $\bar{v}$ şi $\bar{w}$.

Vom numi $\lambda\bar{u}$, $\mu\bar{v}$, $\nu\bar{w}$ *componentele lui* $\bar{\omega}$ *după direcţiile* $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Aceste componente sunt unice şi caracterizează vectorul, raportându-l la cele trei unităţi vectoriale $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ liniar independente.

Relaţia (41,I) între patru vectori din spaţiu se poate pune sub o formă simetrică, dacă luăm

$$\lambda=-\frac{\alpha}{\delta},\quad \mu=-\frac{\beta}{\delta},\quad \nu=-\frac{\gamma}{\delta}\quad \text{cu } \delta\neq 0.$$

Vom avea imediat:

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}+\delta\bar{\omega}=0, \qquad (43,I)$$

de unde vom deduce propoziţia:

Patru vectori oarecare din spaţiul cu trei dimensiuni sunt liniar dependenţi.

Formula (43,I) caracterizează deci figura formată cu patru vectori în spaţiu:

Dacă toţi coeficienţii α, β, γ, δ sunt diferiţi de zero şi trei dintre vectori sunt liniar independenţi, putem raporta pe al patrulea la triedrul format de ceilalţi, descompunându-l după direcţiile respective. Dacă unul dintre coeficienţi este nul, cei trei vectori rămaşi în relaţie sunt coplanari. Dacă trei dintre vectori sunt coplanari, atunci şi al patrulea este cuprins în planul lor, etc.

Din punct de vedere fizic, posibilitatea de descompunere a unui vector oarecare cu ajutorul a trei vectori liniar independenţi înseamnă posibilitatea de a determina orice mărime vectorială prin cunoaşterea a trei mărimi unitate, corespunzând la trei direcţii necoplanare din spaţiu, măsurând-o cu aceste trei unităţi şi obţinând cele trei componente $\alpha\bar{u}$, $\beta\bar{v}$ şi $\gamma\bar{w}$. Această proprietate este fundamentală şi constitue legătura cea mai profundă între mărimile fizice vectoriale şi structura geometrică a spaţiului:

Aplicaţie: *Notând cu G centrul de greutate al feţei ABC într'un tetraedru VABC, să se descompună vectorul $\overline{VG}$ după muchiile $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$.*

Se poate scrie imediat

$$\overline{VG}+\overline{GA}=\overline{VA},\quad \overline{VG}+\overline{GB}=\overline{VB},\quad \overline{VG}+\overline{GC}=\overline{VC}.$$

Adunând aceste relaţii, avem

$$3\overline{VG}+(\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC})=\overline{VA}+\overline{VB}+\overline{VC}.$$

Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC, $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\bar{0}$, deci

$$\overline{VG}=\frac{1}{3}(\overline{VA}+\overline{VB}+\overline{VC}).$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 28. Vectorii şi numărul de dimensiuni ale spaţiului

Relaţiile de dependenţă şi independenţă liniară, obţinute prin combinaţia liniară vectorială, au un caracter elementar, dar o semnificaţie profundă.

In adevăr, relaţia (33,I) existând totdeauna între doi vectori coliniari, putem spune că: *Pe o dreaptă doi vectori sunt totdeauna liniar dependenţi.*

Deasemenea, într'un plan vom avea totdeauna între trei vectori relaţia (36,I), deci va trebui să constatăm că: *Intr'un plan, trei vectori sunt totdeauna liniar dependenţi.*

In sfârşit, relaţia (43,I) care există neapărat între patru vectori din spaţiu ne duce la concluzia că:

In spaţiul cu trei dimensiuni, patru vectori sunt totdeauna liniar dependenţi. Este uşor de văzut că cinci, şase, ..., $n \geqq 4$ vectori din spaţiu sunt liniar dependenţi[1]).

Pe de altă parte, există sigur trei vectori liniar independenţi în spaţiu, fiindcă n'avem decât să considerăm doi vectori neparaleli dintr'un plan şi un al treilea vector care nu este în acel plan. Prin urmare putem spune:

Numărul maxim de vectori liniar independenţi în spaţiul cu trei dimensiuni este trei.

O concluzie analoagă se obţine pentru plan:

Numărul maximum de vectori liniar independenţi din plan este doi.

Putem complecta şi cazul dreptei, unde existând vectori nenuli $\bar{u} \neq \bar{0}$, vom spune că:

Numărul maxim de vectori liniar independenţi, pe o dreaptă este unu.

In rezumat, considerând planul ca un spaţiu cu două dimensiuni şi dreapta ca un spaţiu cu o dimensiune, rezultă că:

Numărul maxim de vectori liniar independenţi dintr'un spaţiu este egal cu numărul dimensiunilor acelui spaţiu ($n \leqq 3$).

Consecinţele fizice ale acestei proprietăţi sunt fundamentale, fiindcă *orice vector se exprimă ca o combinaţie liniară de atâţi vectori liniar independenţi, câţi există în spaţiul respectiv*, adică în spaţiu, în plan sau pe dreaptă.

Pentru a putea cerceta un fenomen, este necesar să se cunoască mărimile, care intervin în el. Cunoaşterea acestora înseamnă în primul rând definirea, identificarea şi determinarea, deci măsurarea lor. Măsurarea

---

[1]) Să considerăm, în adevăr, $n \geqq 4$ vectori în spaţiul cu trei dimensiuni $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots, \bar{u}_n$. Dacă nu există 3 dintre ei care să fie liniar independenţi, atunci conform teoremei din § 26 nici cei n vectori nu pot fi liniar independenţi. Dacă există 3 vectori care sunt liniar independenţi, printr'o eventuală renumerotare a celor n vectori putem presupune că primii trei, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ sunt liniar independenţi. Teorema amintită ne arată că orice vector $\bar{u}_k$, $k=4,5,\ldots,n$ se poate exprima sub forma $\bar{u}_k = \alpha_k \bar{u}_1 + \beta_k \bar{u}_2 + \gamma_k \bar{u}_3$, relaţie care se mai poate scrie

$$\alpha_k \bar{u}_1 + \beta_k \bar{u}_2 + \gamma_k \bar{u}_3 + (-1)\bar{u}_k + 0\bar{u}_{k+1} + \cdots + 0\bar{u}_n = \bar{0},$$

unde $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ nu sunt toţi trei nuli. Există deci cel puţin o relaţie de forma $\sum_1^n \lambda_l \bar{u}_l = 0$, unde λ_l nu sunt toţi nuli.

Scanned with OKEN Scanner

înseamnă comparare, prin raportare la mărimi de aceeaşi natură. Din măsurarea unei mărimi scalare rezultă un număr, pe când din măsurarea printr'un procedeu asemănător a unei mărimi vectoriale rezultă pentru fiecare direcţie câte un număr.

S'ar părea că fiecare direcţie are unitatea sa caracteristică pentru o mărime vectorială dată şi că, deci, trebue făcute o infinitate de măsurători pentru a cunoaşte o mărime vectorială. Constatarea că nu pot exista în spaţiu mai mult de trei vectori liniar independenţi şi exprimarea oricărui vector sub forma

$$\bar{\omega}=\lambda\bar{u}++\mu\bar{v}+\nu\bar{w}$$

a unei combinaţii liniare vectoriale are din punct de vedere fizic semnificaţia următoare:

Pentru determinarea unei mărimi vectoriale este necesară şi suficientă măsurarea sa în trei direcţii necoplanare ale spaţiului cu ajutorul a trei mărimi vectoriale de aceeaşi natură, care au acele direcţii.

Această constatare de natură fizică este echivalentă cu aceea că spaţiul are trei dimensiuni, planul două şi dreapta una.

§. 29. Triedrul fundamental

Figura geometrică, formată din trei plane concurente într'un punct O şi care nu trec prin aceeaşi dreaptă, este un triedru. Un triedru are trei feţe — cele trei plane — şi trei muchii, — dreptele de intersecţie ale celor trei feţe. Un triedru împarte spaţiul în opt regiuni numite octante, astfel încât trecerea dintr'un octant în altul este posibilă numai întâlnind triedrul.

Un triedru poate fi determinat prin vârful său O şi prin trei puncte A, B, C situate pe muchiile sale. In fig. 18 este reprezentat un triedru astfel determinat, din care nu este figurat decât un octant. Vom putea defini un triedru $OABC$ prin patru puncte necoplanare, ca figura formată de planele OAB, OBC, OCA.

Oricărui triedru astfel definit i se pot asocia trei vectori liniar independenţi $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ coliniari cu $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ punând:

$$\overline{OA}=\lambda\bar{u},\quad \overline{OB}=\mu\bar{v},\quad \overline{OC}=\nu\bar{w}.$$

Invers, vectorii liniar independenţi $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ determină un triedru, când sunt reprezentaţi prin trei segmente orientate cu aceeaşi origine O. Un astfel de triedru are muchiile orientate, sensurile pozitive fiind determinate de vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Orice vector $\bar{\omega}$ din spaţiu poate fi descompus cu ajutorul vectorilor $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ în trei componente $\lambda\bar{u}$, $\mu\bar{v}$, $\nu\bar{w}$ şi pus sub forma

$$\bar{\omega}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}+\nu\bar{w}. \qquad (44,I)$$

Vom spune că am *raportat* vectorul $\bar{\omega}$ la triedrul $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, asociind aceste mărimi triedrului considerat şi vom numi *triedru fundamental* orice triedru la care sunt raportaţi toţi vectorii din spaţiu. Vom defini acest triedru prin cei trei *vectori de bază* sau *fundamentali*.

Scanned with OKEN Scanner

Dându-se baza $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, triedrul fundamental nu este complect determinat, decât dacă i se cunoaşte şi vârful O, numit origine.

Aceasta ne permite să transportăm triedrul fundamental în orice punct din spaţiu. *Vectorii fundamentali sunt cele trei mărimi vectoriale-unitate, cu care vom exprima orice alt vector al spaţiului.*

Descompunând vectorul $\bar{\omega}$ după direcţiile fundamentale definite de vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, obţinem scalarii λ, μ, ν, care reprezintă măsurile celor trei componente $\lambda\bar{u}$, $\mu\bar{v}$, $\nu\bar{w}$, în raport cu unităţile alese. Ţinând seama de convenţiile făcute relativ la aceste măsuri, λ va fi pozitiv dacă $\lambda\bar{u}$ are sensul lui $\bar{u}$ şi negativ în caz contrar.

Facem observaţia că în cele de mai sus folosim în primul rând muchiile triedrului fundamental şi în al doilea rând feţele sale.

In spaţiile cu mai multe dimensiuni figura ce generalizează triedrul fundamental nu este definită prin feţele sale, ci prin muchiile sale, iar acestea sunt determinate prin n vectori fundamentali. Deaceea, în cele ce urmează vom întrebuinţa termenul „triedrul $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$".

Triedrul astfel definit presupune cei trei vectori de bază liniar independenţi. Dacă ei sunt liniar dependenţi triedrul este *degenerat*, având muchiile coplanare şi feţele reduse la una singură. Este chiar posibil ca cele trei muchii să fie coliniare, în care caz feţele sunt nedeterminate. *Triedrul fundamental este nedegenerat prin definiţie.*

§. 30. Triedrul de referinţă. Coordonate carteziene

Noţiunea de vector, prin care am putut reprezenta geometric o categorie importantă de mărimi fizice, mărimile vectoriale, ne-a permis în acelaşi timp să determinăm poziţiile punctelor spaţiului prin vectorul de poziţie. Pentru aceasta este necesar să distingem un punct din spaţiu ca *punct de reper*.

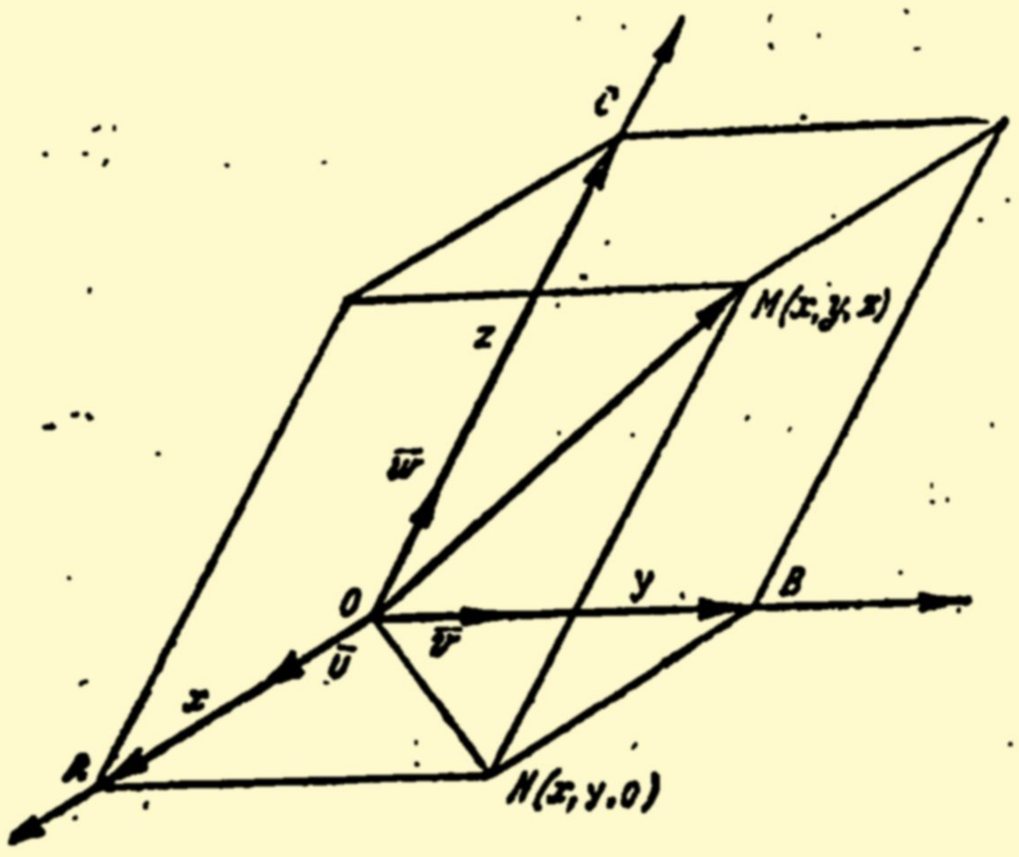


Fig. 19

Noţiunea de triedru fundamental ne dă putinţa de a exprima orice vector cu ajutorul vectorilor fundamentali. Dacă alegem ca origine a sa chiar punctul de reper O, vectorul de poziţie $\bar{r}$ al unui punct oarecare M din spaţiu va putea fi raportat la acest triedru ca orice alt vector. Vom scrie deci,

$$\bar{r} = x\bar{u} + y\bar{v} + z\bar{w}, \qquad (45,1)$$

notând cu x, y, z componentele sale scalare după direcţiile fundamentale (fig. 19). Aceste componente determină perfect punctul M şi reciproc, orice punct M determină trei componente scalare ale vectorului său de poziţie în raport cu triedrul fundamental considerat.

Vom numi *triedru de referinţă* al spaţiului orice triedru fundamental la care raportăm vectorii de poziţie ai punctelor din spaţiu. Componentele scalare x, y, z ale lui $\bar{r}$ faţă de triedrul de referinţă se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului M.

Scanned with OKEN Scanner

Prin introducerea unui triedru de referinţă se stabileşte o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor spaţiului şi mulţimea sistemelor de numere reale (x, y, z), *care constitue coordonatele carteziene.* Această corespondenţă se numeşte *sistem de coordonate carteziene* şi este bine determinată prin alegerea triedrului de referinţă.

Deoarece această alegere se poate face într'o infinitate de moduri, *există o infinitate de sisteme de coordonate carteziene.* Oricare dintre ele poate servi în acelaşi timp la determinarea vectorilor şi la fixarea poziţiei punctelor spaţiului. Prin urmare, din acest punct de vedere, ele sunt toate *echivalente: rezultatele operaţiilor vectoriale nu depind de alegerea particulară a unui sistem de coordonate carteziene.*

Deoarece triedrul de referinţă serveşte şi ca triedru fundamental pentru toţi vectorii din spaţiu, sistemul de coordonate carteziene introduse printr'un astlel de triedru va fi numit *sistem cartezian de referinţă.*

Prin fixarea unui sistem cartezian de referinţă, oricărui vector liber $\bar{\omega}$ din spaţiu îi corespunde un punct M, extremitatea vectorului $\overline{OM}$ obţinut deplasând pe $\bar{\omega}$ cu originea în O. Invers, oricărui punct M îi corespunde un vector liber, vectorul $\bar{\omega}$ egal cu vectorul de poziţie $\overline{OM}$ al lui M (fig. 18).

Deaceea, componentele scalare λ, μ, ν ale unui vector $\bar{\omega} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{v} + \nu\bar{w}$ se mai numesc şi *coordonatele vectorului.* De fapt, cum am menţionat, denumirea de componente scalare este abuzivă şi nu se justifică decât prin simplificarea de limbaj introdusă. Dimpotrivă, aceea de coordonate ale vectorului are justificarea geometrică de mai sus, dar este mai puţin întrebuinţată.

Introducerea sistemelor de referinţă carteziene stabileşte legătura între metoda carteziană şi metoda vectorială de cercetare a proprietăţilor geometrice ale spaţiului.

Reperarea punctelor spaţiului prin coordonate numerice, realizată de Descartes şi pusă la baza Geometriei analitice, a permis sinteza între Geometrie şi Algebră şi, deci, măsurarea mărimilor geometrice şi exprimarea proprietăţilor geometrice prin expresii şi relaţii numerice, *raportate la un sistem de referinţă dat.*

Insă, proprietăţile geometrice având o existenţă independentă de acest sistem, metoda carteziană conţine o contradicţie interioară între fenomenele reprezentate ce au o existenţă obiectivă şi expresiile folosite, dependente de sistemul de referinţă introdus.

Metoda vectorială, independentă de alegerea unui anumit sistem de referinţă, nu introduce decât punctul de reper, astfel încât ea elimină aproape complect contradicţia metodei carteziene. Invarianţa relaţiilor geometrico-fizice, scrise vectorial, faţă de alegerea punctului de reper este în general evidentă.

Din îmbinarea ideilor fundamentale ale ambelor metode, rezultă metoda tensorială care, folosind sistemele de referinţă, scoate totuşi în evidenţă natura invariantă a mărimilor scalare, vectoriale, etc., faţă de alegerea unuia dintre aceste sisteme. In această metodă, mărimile sunt clasificate în scalari, vectori, tensori de diverse ordine, etc., fiind exprimate prin componentele lor faţă de un sistem de referinţă, dar relaţiile obţinute sunt invariante faţă de schimbarea sa prin oricare altul.

Scanned with OKEN Scanner

§. 31. Spaţiul vectorial. Spaţiul afin

In expunerea făcută, pornind dela fenomenele naturale şi dela mărimile prin care acestea sunt caracterizate în desfăşurarea lor, am fost nevoiţi pentru a defini şi preciza noţiunile, să considerăm întâi materia sub aspectele sale cele mai simple: formă, întindere, poziţie în raport cu anumite corpuri, deci sub aspectul geometric.

In această cercetare, elementul de bază este particula materială redusă la punctul geometric, cu ajutorul căruia constituim figurile începând cu cele mai simple. Paralel cu aceasta, apar mărimile prin care se caracterizează proprietăţile fizice, constatându-se strânsa lor legătură cu proprietăţile geometrice ale materiei şi cu noţiunea de număr prin măsura lor.

Aceste mărimi ne conduc la noţiunile de scalar şi vector, în care se îmbină caracterele numerice şi geometrice cele mai simple cu semnificaţia fizică. Este suficient să ne gândim la noţiunea statică de forţă, caracterizată prin efectele sale măsurabile, atât în intensitate, cât şi în direcţie, printr'un vector.

Este evident că, pentru cercetarea fenomenelor fizice, este necesară o cercetare mai profundă a legăturilor dintre mărimile geometrice şi fizice. Aceasta se obţine pornind dela observaţia simplă, făcută mai sus: dacă raportăm, pe de o parte, vectorii la un triedru fundamental format cu trei dintre ei liniar independenţi şi dacă, pe de altă parte, fiecărui punct din spaţiu îi asociem vectorul său de poziţie în raport cu un punct de reper O, este suficient să raportăm acest vector de poziţie la triedrul fundamental ales pentru ca:

1) oricărui punct din spaţiu să-i corespundă un vector şi invers;

2) oricărui punct din spaţiu să-i corespundă trei numere, coordonatele sale, şi invers.

Putem, în acest caz, să considerăm spaţiul că format fie din puncte, fie din vectori liberi şi să-l studiem sub aceste două înfăţişări, pe care le putem reuni în fiecare moment prin fixarea unui triedru de referinţă.

Ce semnificaţie şi ce importanţă are acest paralelism între vectori, puncte şi numere?

Cercetarea spaţiului format din puncte ne conduce la cunoaşterea alcătuirii sale geometrice. Cercetarea spaţiului format din vectori ne conduce la cunoaşterea unei părţi din structura sa geometrico-fizică, respectiv la proprietăţile mărimilor fizice, a căror reprezentare geometrică este vectorială.

1 Punctele spaţiului dau naştere la figuri geometrice. Dintre aceste figuri dreptele şi planele, care sunt fundamentale, sunt determinate în mod simplu şi natural prin vectori. Deci, prin relaţiile vectoriale vom putea exprima proprietăţile geometrice cele mai importante ale dreptelor şi planelor.

Spaţiul conceput ca format din vectori, va fi numit *spaţiu vectorial*. Din cele spuse mai sus, el este echivalent cu spaţiul punctual. Ori, acesta, redus la cea mai simplă expresie, este o mulţime de puncte legate între ele prin un număr de proprietăţi, exprimate prin relaţii extrem de simple, numite *axiome*, a căror evidenţă exclude necesitatea de a le demonstra.

Pentru a defini spaţiul vectorial va trebui să ţinem deasemenea seama de relaţiile cele mai simple dintre vectori, pentru a le pune la baza sa ca relaţii de structură.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta ne vom referi la operațiile și relațiile introduse, pe care însăși cercetarea mărimilor fizice le-a impus, și care se așează în mod natural printre axiomele spațiului vectorial.

Axiomele geometriei afine. Calculul vectorial este un calcul simbolic, în care substituim mărimilor vectoriale diverse simboluri. Pentru ca operațiile vectoriale să se poate desfășura fără contradicții, trebue să fie întemeiate pe reguli deduse din proprietățile de bază ale mărimilor vectoriale, exprimate matematic.

Aceste reguli se vor aplica simbolurilor vectoriale și nu direct mărimilor vectoriale, deci ele vor fi valabile pentru orice simbol, care are proprietățile matematice ale vectorilor.

Observația faptului că *mărimi fizice concrete de diverse naturi,* cum sunt forțele, vitezele, tensiunile, deplasările au *caractere comune,* care le fac reprezentabile prin vectori, deci printr'o *mărime geometrică,* ne permite să facem încă un pas în vederea evidențierii proprietăților generale ale vectorilor.

In adevăr, odată întrodusă noțiunea de vector și operațiile fundamentale, calculele sunt idependente de imaginea geometrică a vectorului ca pereche de puncte orientată și ele se aplică reprezentărilor geometrice ale tuturor mărimilor fizice vectoriale.

Deaceea, vom putea extrage din proprietățile vectorului, pe acelea care sunt independente de reprezentarea sa geometrică, după cum din proprietățile mărimilor fizice am extras pe cele independente de natura particulară a fiecărei mărimi, pentru a ajunge la noțiunea de mărime vectorială, din care am dedus apoi vectorul.

Prin această nouă abstractizare obținem o mărime abstractă, pe care o vom numi tot *vector* și o vom putea reprezenta geometric, pentru a avea un exemplu, printr'o pereche orientată de puncte A, B.

Această lărgire a noțiunii de vector corespunde procesului de axiomatizare prin care, pornind dela observarea realității, extragem caracterele ei cele mai semnificative și mai importante, ajungând la noțiuni abstracte de o mare generalitate, pentru a ne întoarce apoi prin aplicarea proprietăților lor, la cercetarea fenomenelor.

Astfel, operațiile făcute cu vectorul, definit prin axiome, se aplică atât forțelor, cât și vitezelor, câmpurilor electrice, etc., și *relațiile vectoriale exprimă legi generale aplicabile în diverse domenii ale Fizicei sau Geometriei.*

Vom numi *spațiu vectorial* mulțimea elementelor numite *vectori,* care îndeplinesc următoarele axiome:

I. Doi vectori $\bar{u}$ *și* $\bar{v}$ *determină un vector* $\bar{u}+\bar{v}$, *numit suma lor.*

II. Un scalar λ *și un vector* $\bar{u}$ *determină un vector* $\lambda\bar{u}$, *numit produsul scalarului prin vectorul* $\bar{u}$.

III. Operațiile, astfel introduse, și relația de egalitate între vectori sunt legate între ele prin regulile de asociativitate, comutativitate, distributivitate, care vor fi impuse mai jos.

IV. Numărul maxim de vectori liniari independenți este trei.

Această ultimă axiomă se numește *axioma dimensională.*

Pentru a regăsi aspectul punctual al spațiului vom presupune că în afară de vectori mai există și puncte. Intre puncte și vectori există trei relații fundamentale exprimate prin trei axiome:

Scanned with OKEN Scanner

V. Două puncte A şi B determină un vector $\overline{AB}=\bar{u}$.

VI. Fiind dat un punct A şi un vector $\bar{u}$ *există un punct B şi numai unul, astfel încât* $\overline{AB}=\bar{u}$.

VII. Dacă $\overline{AB}=\bar{u}$ *şi* $\overline{BC}=\bar{v}$, *atunci* $\overline{AC}=\bar{u}+\bar{v}$.

Prin aceste ultime axiome, noţiunea de vector, care avea numai un caracter abstract, capătă un aspect geometric: *figura formată de două puncte, luate intr'o anumită ordine, determină un vector.* Spaţiul astfel definit este spaţiul cu trei dimensiuni, în care nu se cunoaşte încă noţiunea de lungime, numit în Geometrie *spaţiul afin cu trei dimensiuni.*

Aplicaţiile mecanice şi fizice impun adesea o extensiune a noţiunii de spaţiu, cunoscută sub numele de *spaţiul cu n dimensiuni.* Acesta nu poate fi definit pornind dela intuiţie, cum am putea fi îndemnaţi să încercăm, ci pe cale pur matematică întroducând elemente geometrice pentru care nu avem imagini intuitive, ci expresii matematice.

Ne găsim imediat în *spaţiul afin cu n dimensiuni,* dacă definim spaţiul prin aceleaşi noţiuni de vector şi punct şi cu aceleaşi axiome ca mai sus, înafară de axioma IV pe care o înlocuim cu

IV'. *Numărul maxim de vectori liniar independenţi este n.*

Prin aceasta înţelegem că toate noţiunile şi relaţiile dintre ele, deduse din aceste axiome, pot fi exprimate în termeni geometrici, astfel încât făcând $n=3$ să regăsim figurile şi teoremele din geometria afină obişnuită.

Prin *Geometrie afină* înţelegem mulţimea tuturor teoremelor pe care le putem stabili, fără a folosi noţiunile de distanţă şi de unghi, pe care nu le-am introdus, pornind dela axiomele date ale spaţiului afin.

Acestea vor trata despre intersecţii, paralelism, puncte în linie dreaptă, drepte concurente, etc., într'un cuvânt despre relaţiile de poziţie mutuală ale figurilor.

Intreaga Geometrie afină poate fi obţinută pe cale vectorială cu ajutorul noţiunilor şi regulilor introduse până în prezent pe baza axiomelor enunţate.

Dacă ne mărginim să utilizăm numai noţiunea de vector şi primele patru axiome I, II, III, IV', avem *spaţiul vectorial cu n dimensiuni* şi *Geometria vectorială liniară,* în care figurile sunt alcătuite din vectori liberi, consideraţi ca elemente geometrice.

De exemplu:

$$\bar{V}=\lambda\bar{v}, \tag{46,I}$$

unde $\bar{v}$ este un vector dat, iar λ este un parametru scalar, defineşte mulţimea tuturor vectorilor coliniari cu $\bar{v}$.

Făcând apel la reprezentarea vectorilor prin segmente orientate din spaţiul cu trei dimensiuni, vom observa că aceşti vectori se pot considera ca având toţi un singur element comun: *direcţia.* Ei formează familia tuturor dreptelor paralele cu această direcţie. Cum în spaţiul vectorial facem abstracţie de noţiunea de punct, ecuaţia (46,I) va defini o direcţie sau *o varietate liniară vectorială cu o dimensiune.*

Introducând şi axiomele V, VI, VII, această varietate poate fi obligată să conţină un anumit punct *A.*

Scanned with OKEN Scanner

Axioma VI exprimă tocmai proprietatea că, fiind dat A şi vectorul $\lambda\bar{v}$, există un punct B şi unul singur, astfel încât $\overline{AB}=\lambda\bar{v}$, prin care definim punctul B. Lăsând pe λ să varieze, punctul B va varia descriind o dreaptă, dacă ne referim la spaţiul cu trei dimensiuni. Prin extensiune, vom zice că am definit o dreaptă a spaţiului cu n dimensiuni.

§ 32. Algebra liniară vectorială

Vectorul, aşa cum a fost introdus prin axiomele spaţiului vectorial, este o noţiune abstractă, care capătă semnificaţii diferite, după natura mărimii vectoriale pe care o reprezintă.

Orice teoremă dedusă din axiome este rezultatul unui şir de operaţii cu această noţiune, care se obţine din aplicarea celor două operaţii fundamentale: *adunarea* şi *amplificarea cu un scalar*.

Proprietăţile acestor operaţii sunt:

Adunarea:

$$\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u} \qquad \textit{(lege de comutativitate)},$$
$$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w}) \qquad \textit{(lege de asociativitate)}.$$

Scăderea: $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ fiind doi vectori oarecare, există un vector $\bar{x}$, şi numai unul care satisface ecuaţia:

$$\bar{u}+\bar{x}=\bar{v} \qquad \textit{(definiţia scăderii)}. \qquad (47,I)$$

In particular, rezultă că există un vector numit *vectorul nul* şi notat $\bar{0}$ (sau 0), astfel încât

$$\bar{u}+\bar{0}=\bar{u} \qquad \textit{(vectorul nul)},$$

oricare ar fi vectorul $\bar{u}$.

Deasemenea, fiind dat vectorul oarecare $\bar{u}$, există un vector numit *opusul* lui $\bar{u}$ şi notat $-\bar{u}$, astfel încât

$$\bar{u}+(-\bar{u})=\bar{0} \qquad \textit{(opusul)}.$$

Se deduce imediat că soluţia ecuaţiei (47,I) se scrie

$$\bar{x}=\bar{v}-\bar{u} \qquad \textit{(diferenţa)}.$$

Se defineşte deasemenea *multiplicarea unui vector* cu un scalar, cu proprietăţile:

$\lambda\bar{u}$ este un vector,

$$(\lambda+\mu)\,\bar{u}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{u} \qquad \textit{(prima lege de distributivitate)},$$
$$\lambda(\bar{u}+\bar{v})=\lambda\bar{u}+\lambda\bar{v} \qquad \textit{(a doua lege de distributivitate)},$$
$$\lambda(\mu\bar{u})=(\lambda\mu)\,\bar{u} \qquad \textit{(lege de asociativitate)},$$
$$1\cdot\bar{u}=\bar{u}.$$

Aceste reguli, aplicate simbolurilor vectoriale şi scalare, ne permit executarea de calcule analoage cu cele din Algebră. Totalitatea relaţiilor între scalari şi vectori, stabilite prin aplicarea acestor operaţii, constitue *Algebra liniară vectorială*.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă dăm vectorilor intrepretarea geometrică, obţinem teoreme de Geometrie liniară vectorială, iar făcând să le corespundă puncte, obţinem teoreme de Geometrie afină.

Dacă ne întoarcem la primele noţiuni introduse, observăm un mers continuu dela concret la abstract: pornind dela exemple concrete de mărimi fizice scalare şi vectoriale. am trecut la imaginile lor geometrice şi apoi la simbolurile lor algebrice. Putem desvolta calcule cu aceste simboluri, fără a ne preocupa de mărimile simbolizate, adică de mărimile concrete, dela care am plecat. Aceasta ne permite să dăm calculelor algebrice diferite semnificaţii, corespunzătoare naturii mărimilor reprezentate simbolic prin vectorii şi scalarii Algebrei liniare vectoriale.

Una dintre aceste semnificaţii este cea geometrică, pe care o putem folosi şi în cazul când mărimea reprezentată este de natură fizică, astfel încât simbolurile utilizate au deodată o semnificaţie geometrico-fizică, prin care cuprindem în acelaşi rezultat al unei operaţii algebrice aspectul geometrico-fizic al unui fenomen.

Acesta este şi scopul utilizării Calculului vectorial în cercetarea matematică a fenomenelor fizice.

Corespondenţa stabilită între mărimile fizice, care au o natură scalară sau vectorială şi anumite simboluri matematice, prin abstracţiuni succesive, pe de o parte şi posibilitatea de a deduce din rezultatele raţionamentelor făcute cu aceste simboluri relaţii şi legi fizice, printr'o revenire la faptele concrete exprimate prin ele, pe de altă parte, arată legătura strânsă între Matematică şi Stiinţele care o utilizează în cercetarea fenomenelor.

Aplicaţia 1. *Relaţia de dependenţă liniară în spaţiul vectorial,*

Am arătat, folosind descompunere unui vector după trei direcţii necoplanare, că între patru vectori din spaţiu există totdeauna o relaţie, deci că patru vectori din spaţiul cu trei dimensiuni sunt liniar dependenţi.

Să presupunem că ni se dau patru vectori oarecare $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$, despre care nu ştim dacă trei dintre ei formează un triedru nedegenerat şi să arătăm că în orice caz aceşti vectori sunt liniar dependenţi, găsind relaţia dintre ei.

In demonstraţia pe care o dăm, aceşti vectori vor pierde orice semnificaţie concretă şi vor fi numai patru elemente abstracte legate prin axiomele Algebrei liniare vectoriale.

In conformitate cu axioma IV, numărul maxim de vectori liniar independenţi este trei în spaţiul vectorial cu trei dimensiuni.

Fie $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *trei vectori liniar independenţi* pe care îi alegem ca vectori fundamentali.

Intre aceşti vectori şi cei daţi există sigur relaţii de dependenţă liniară. Vom putea deci scrie

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \lambda_1 \bar{a} + \mu_1 \bar{b} + \nu_1 \bar{c}, \\
\bar{v}_2 &= \lambda_2 \bar{a} + \mu_2 \bar{b} + \nu_2 \bar{c}, \\
\bar{v}_3 &= \lambda_3 \bar{a} + \mu_3 \bar{b} + \nu_3 \bar{c}, \\
\bar{v}_4 &= \lambda_4 \bar{a} + \mu_4 \bar{b} + \nu_4 \bar{c}.
\end{aligned} \qquad (48,I)$$

Vom presupune că nici unul dintre aceşti vectori nu este nul. Pentru a găsi o relaţie între $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$, va trebui să eliminăm pe $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ între relaţiile (48,I). Pentru aceasta este suficient să observăm că această eliminare se face ca în Algebra obişnuită, adică scoatem valoarea lui $\bar{a}$, de exemplu, dintr'una din relaţii, o introducem în celelalte, etc. Operaţia este posibilă fiindcă revine la aplicarea regulilor introduse.

Scanned with OKEN Scanner

Această observație ne permite să considerăm simbolurile $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ca pe niște necunoscute într'un sistem liniar de patru ecuații. Rezultatul eliminării se poate scrie imediat *simbolic*:

$$\begin{vmatrix} \bar{v}_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \bar{v}_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \bar{v}_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \bar{v}_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \end{vmatrix} = \bar{0}. \qquad (49,I)$$

Expresia din primul membru nu este un adevărat determinant, nefiind un număr, ci o combinație liniară vectorială.

El se scrie desvoltat:

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \end{vmatrix} \bar{v}_1 - \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \end{vmatrix} \bar{v}_2 + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \end{vmatrix} \bar{v}_3 - \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \bar{v}_4 = \bar{0} \qquad (50,I)$$

și reprezintă relația liniară căutată între cei patru vectori, exprimată cu ajutorul componentelor lor față de baza de vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Este interesant de observat că dacă alegem altă bază, formată din alți trei vectori $\bar{a}^*$, $\bar{b}^*$, $\bar{c}^*$, relația (49,I) își păstrează forma exprimându-se cu noile componente λ_1^*, μ_1^*, ν_1^*, etc.

Ea este *independentă* de alegerea vectorilor fundamentali, sau în termeni geometrici de alegerea triedrului fundamental.

In cazul particular când $\bar{v}_2=\bar{a}$, $\bar{v}_3=\bar{b}$, $\bar{v}_4=\bar{c}$, relația (49,I) se reduce la forma:

$$\begin{vmatrix} \bar{v}_1, & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \bar{a} & 1 & 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 & 1 & 0 \\ \bar{c} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{0}.$$

sau, desvoltată conform cu (50,I):

$$\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{a} + \mu_1 \bar{b} + \nu_1 \bar{c},$$

adică la însăși expresia lui $\bar{v}_1$ raportat la triedrul $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Aplicația 2. *Ecuațiile dreptei și planului în spațiul afin.*

In exemplul precedent am considerat vectorii ca simboluri folosind numai primele patru axiome ale Algebrei liniare vectoriale. Am obținut o relație algebrică susceptibilă de interpretare în spațiul vectorial. Introducând și noțiunea de punct și folosind și ultimele trei axiome, vom da vectorilor semnificații geometrice. Astfel, vom stabili ecuațiile vectoriale ale dreptei și planului, determinate prin puncte sau vectori.

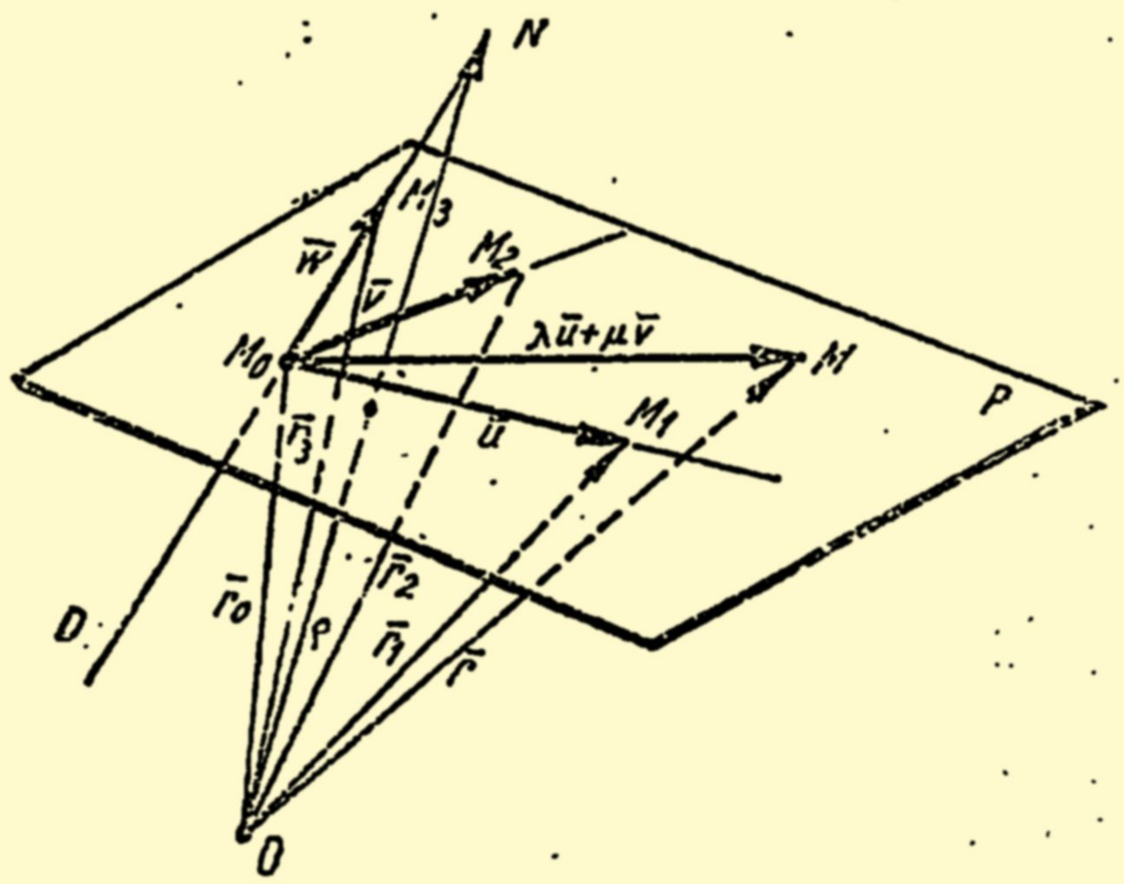


Fig. 20

Fie dreapta D de direcție dată și trecând printr'un punct dat M_0 (fig. 20). Direcția sa poate fi determinată printr'un vector $\overline{w}$ sau prin două puncte M_0 și M_3, care de fapt determină tot un vector $\overline{M_0M_3}=\overline{w}$. Dreapta fiind un loc de puncte, a scrie ecuația sa înseamnă a exprima poziția unui punct oarecare N al său cu ajutorul elementelor care determină dreapta.

Scanned with OKEN Scanner

Va fi necesar să reperăm punctele spațiului, deci vom alege un punct de referință, arbitrar O. Fie $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$, $\bar{\rho} = \overline{ON}$ vectorii de poziție ai punctelor M_0 și N. Vectorul $\overline{M_0N}$ este coliniar cu $\bar{w}$, deci vom avea $\overline{M_0N} = \nu\bar{w}$, unde ν este un parametru.

Aplicând regula triunghiului: $\overline{ON} = \overline{OM_0} + \overline{M_0N}$, obținem relația

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \nu\bar{w}, \tag{51,I}$$

care este ecuația căutată. Lăsând pe ν să varieze, ea constitue o reprezentare a tuturor punctelor dreptei D.

Dacă notăm cu $\bar{r}_3$ vectorul de poziție al lui M_3, vom putea pune $\bar{w} = \bar{r}_3 - \bar{r}_0$ și vom avea ecuația dreptei ce trece prin două puncte

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \nu(\bar{r}_3 - \bar{r}_0). \tag{52,I}$$

In mod analog se ajunge la ecuația planului P, determinat de doi vectori $\bar{u}$ și $\bar{v}$ necoliniari și trecând prin punctul M_0.

Un punct M oarecare din plan este caracterizat vectorial prin vectorul său de poziție $\overline{M_0M}$ în acest plan. Ori, acesta este o combinație liniară între vectorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$, de forma

$$\overline{M_0M} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{v},$$

unde λ și μ sunt doi parametri.

Raportând spațiul la punctul O, vectorul de poziție al lui M va fi $\overline{OM} = \bar{r} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$, de unde

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{u} + \mu\bar{v}. \tag{53,I}$$

Această relație este ecuația planului P determinat de M_0 și de cele două direcții $\bar{u}$ și $\bar{v}$.

Dacă direcțiile sunt la rândul lor definite prin câte două puncte, vom obține ecuația planului determinat de trei puncte necoliniare M_0, M_1, M_2, punând $\overline{M_0M_1} = \bar{u} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$ și $\overline{M_0M_2} = \bar{v} = \bar{r}_2 - \bar{r}_0$. Ecuația (53,I) devine:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) + \mu(\bar{r}_2 - \bar{r}_0). \tag{54,I}$$

Dacă în particular, alegem punctul de reper O chiar în M_0, ecuațiile (51,I) și (53,I) se reduc respectiv la

$$\bar{\rho} = \nu\bar{w} \quad \text{și} \quad \bar{r} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{v},$$

care vor fi ecuațiile dreptei și planului ce trec prin punctul de reper. Pe de altă parte, acestea reprezintă respectiv condițiile ca vectorii $\bar{\rho}$ și $\bar{w}$ să fie coliniari și $\bar{r}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, coplanari.

Prin urmare, *orice relație liniară între doi, respectiv trei vectori, poate fi interpretată geometric ca ecuația unei drepte sau a unui plan, determinate de vectorii respectivi.*

Aplicația 3. *Condițiile de coliniaritate și coplanaritate.*

Din ecuațiile (52,I) și (54,I) vom deduce condițiile ca trei puncte să fie coliniare respectiv ca patru puncte să fie coplanare.

Vom raporta punctele respective la un punct de referință O și vom nota cu $\bar{r}_0$, $\bar{r}_3$, $\bar{r}$ vectorii de poziție respectivi. Condiția necesară și suficientă ca punctele M_0, M_3, N să fie coliniare, este dată de ecuația dreptei (52,I) pe care o vom scrie

$$\bar{\rho} = (1-\nu)\bar{r}_0 + \nu\bar{r}_3.$$

Dacă punem

$$1-\nu = \alpha, \quad \nu = \beta, \quad \alpha+\beta = 1$$

vom putea scrie

$$\rho = \alpha\bar{r}_0 + \beta\bar{r}_3 \quad \text{cu} \quad \alpha+\beta = 1, \tag{55,I}$$

de unde:

Condiția necesară și suficientă ca trei puncte să fie coliniare este ca vectorii lor de poziție să satisfacă relația (55,I) *în care* $\alpha+\beta=1$.

Această relație exprimă în primul rând faptul că cei trei vectori sunt coplanari. Impunând condiția $\alpha+\beta=1$, extremitățile lor devin coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

In mod analog, din ecuația (54,I) deducem:

Condiția necesară și suficientă pentru ca patru puncte (din care trei nu sunt colinlare) să fie coplanare, este ca vectorii lor de poziție să satisfacă relația:

$$\bar{r}=\alpha\bar{r}_0+\beta\bar{r}_1+\gamma\bar{r}_2, \qquad (56,I)$$

în care

$$\alpha+\beta+\gamma=1.$$

Condiția (56,I) este satisfăcută de patru vectori oarecare din spațiul cu trei dimensiuni. Impunând condiția $\alpha+\beta+\gamma=1$ extremitățile lor devin coplanare.

*§ 33. Biplanul

Folosirea axiomelor Algebrei vectoriale și ale Geometriei afine ne permite să recunoaștem în spațiul afin existența unei alte figuri, care îndeplinește aceste axiome și cu care se pot executa operațiile vectoriale fundamentale, înafară de perechea de puncte orientată (A,B), care ne-a condus la noțiunea de vector.

Avem astfel un exemplu de importanța punerii în evidență a axiomelor, prin aceea că *ele ne dau posibilitatea de a recunoaște caracteristicele esențiale ale noțiunilor generale în noțiuni mai particulare cu aspecte diferite.*

Vom considera figura orientată formată de două plane paralele P, Q, în care vom distinge planul inițial P și planul final Q.

Vom numi *biplan* clasa tuturor perechilor orientate de plane (P, Q) deduse prin translație dintr'una dintre ele (P_0, Q_0).

Fig. 21. reprezintă un biplan (P_1, P_2), în care P_1 este planul inițial iar P_2 planul final. Orientarea este pusă în evidență prin săgeata A_1, A_2, desenată intenționat curbă pentru a nu se crede că biplanul conține direcția A_1, A_2 ca element geometric.

Dacă se impune condiția ca (P_1, P_2) să conțină un anumit punct A_1 al spațiului, el este unic determinat prin condiția ca P_1, de exemplu, să treacă prin A_1.

Un biplan, care conține un punct dat O, ales ca punct de reper, este reprezentat printr'un plan și *putem considera orice plan din spațiu ca un biplan al cărui plan inițial trece prin originea O.*

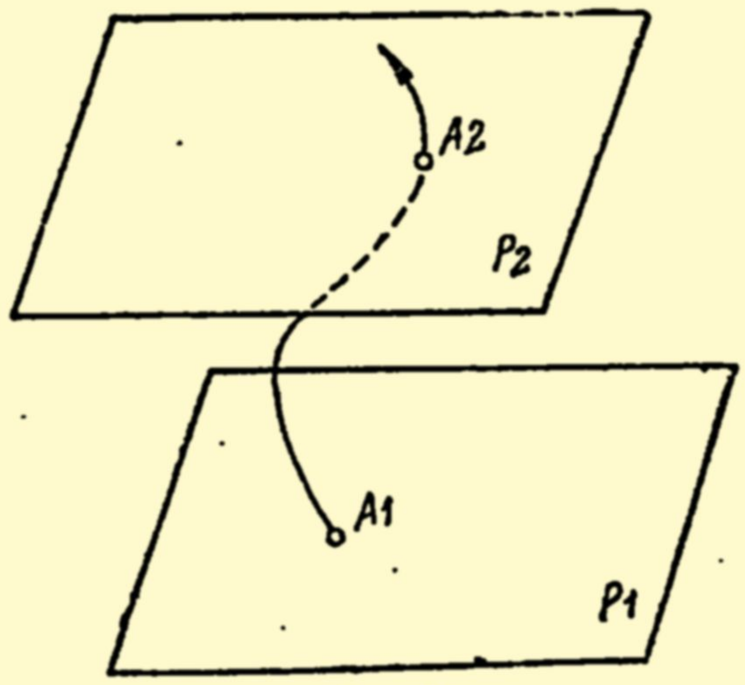


Fig. 21

In Geometrie punctul și planul pot fi considerate ca *figuri duale.* Putem face să corespundă fiecărui punct un plan și invers, de exemplu prin *polaritate,* adică asociind punctului A planul său polar, în raport cu o sferă, sau, mai general, cu o cuadrică.

Biplanul este figura dual ă a bipunctului, deci a vectorului. După cum, impunând vectorului condiția de a avea originea dată, obținem vectorul legat, tot așa biplanul al cărui plan inițial trece printr'un punct dat, va fi *legat.* Vectorul legat, considerat ca vector de poziție, determină un punct al spațiului. *Biplanul legat,* deasemenea, determină un plan din spațiu.

Scanned with OKEN Scanner

Biplanul este o figură căreia i se poate asocia o mărime geometrică în sensul definiției adoptate. deoarece considerând mulțimea tuturor biplanelor putem stabili întâi un mijloc de comparație între două elemente oarecare și apoi o relație de echivalență.

In adevăr, vom alege ca mijloc de comparație translația până când planele inițiale P_1 și Q_1 trec printr'un punct O, Dacă atunci P_1 coincide cu Q_1 și P_2 cu Q_2, cele două biplane vor fi echivalente și vom scrie

$$(P_1,P_2)\equiv(Q_1,Q_2).$$

Aceasta revine la a spune că ele fac parte din aceeași clasă de perechi de plane orientate.

Dacă vom întroduce și o operație de adunare în mulțimea tuturor biplanelor, *vom putea considera biplanul ca reprezentând o mărime geometrică măsurabilă, pe care o vom numi deocamdată tot biplan.*[1]).

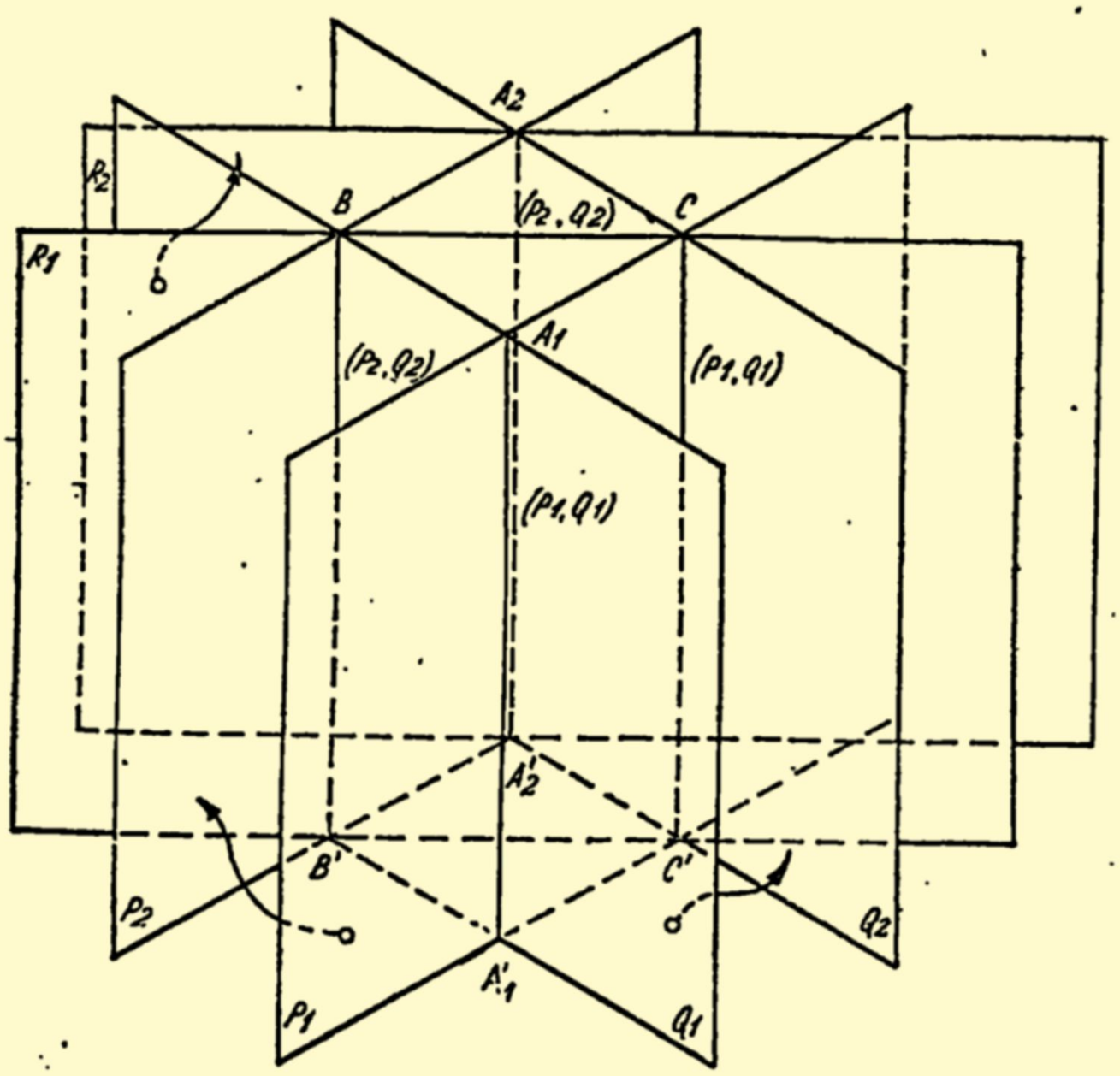


Fig. 22

Vom defini *suma a două biplane* (P_1, P_2) și (Q_1,Q_2) ca un biplan (R_1, R_2), care are ca plan inițial R_1, planul definit de dreptele (P_1, Q_2) și (P_2,Q_1), adică de intersecțiile planului P_1 cu Q_2, pe de o parte, și P_2 cu Q_1, pe de altă parte. (fig. 22). Planul final R_2 va fi planul paralel cu R_1 dus prin dreapta (P_2, Q_2), intersecția lui P_2 cu Q_2.

Evident, biplanul (R_1,R_2) va reprezenta clasa tuturor biplanelor echipolente cu cele descrise mai sus și reprezentat în fig 22. Observăm că putem alege ca plan inițial planul paralel cu R_1, dus prin dreapta (P_1,Q_1), în care caz R_1 ar fi fost plan final.

După cum suma a doi vectori paraleli nu poate fi construită direct prin regula paralelogramului, tot așa nici suma a două biplane paralele (deci de aceeași direcție) nu poate fi construită direct prin regula dată, fiindcă dreptele de intersecție (P_1,Q_2), etc., sunt în acest caz la infinit.[2])

---

[1]) Astfel, vom căuta să stabilim o analogie între biplane și segmente orientate sau bipuncte.

[2]) Iată cum se poate calcula această sumă pentru bipuncte:

Fie (O,A) și (O,B) doi vectori coliniari, figurați ca două bipuncte orientate. Pentru a construi suma lor cu ajutorul proprietăților algebrice ale sumei vectoriale și al regulii paralelogramului, care este o consecință a lor, se consideră într'un plan care trece prin (O,A). două direcții arbitrare diferite de (O,A).

Scanned with OKEN Scanner

Din aceasta regulă deducem însă că un biplan oarecare (R_1,R_2) poate fi considerat ca suma a două biplane (P_1,P_2), (Q_1,Q_2) *de direcţii date* adică paralele cu două plane date, paralele cu o dreaptă din (R_1,R_2). Cu alte cuvinte:

Orice biplan poate fi descompus în mod unic după direcţiile a două plane paralele cu o dreaptă paralelă cu el.

In adevăr, fie în fig. 22 un punct A_2 din planul R_2. Prin acest punct ducem planele P_2 şi Q_2 care vor intersecta pe R_2 după o dreaptă A_2A_2', deoarece P_2 şi Q_2 sunt paralele cu o dreaptă din R_2.

Descompunerea lui (O,B) după cele două direcţii ne dă (fig. 23):

$$(O,B)=(O,B_1)+(O,B_2).$$

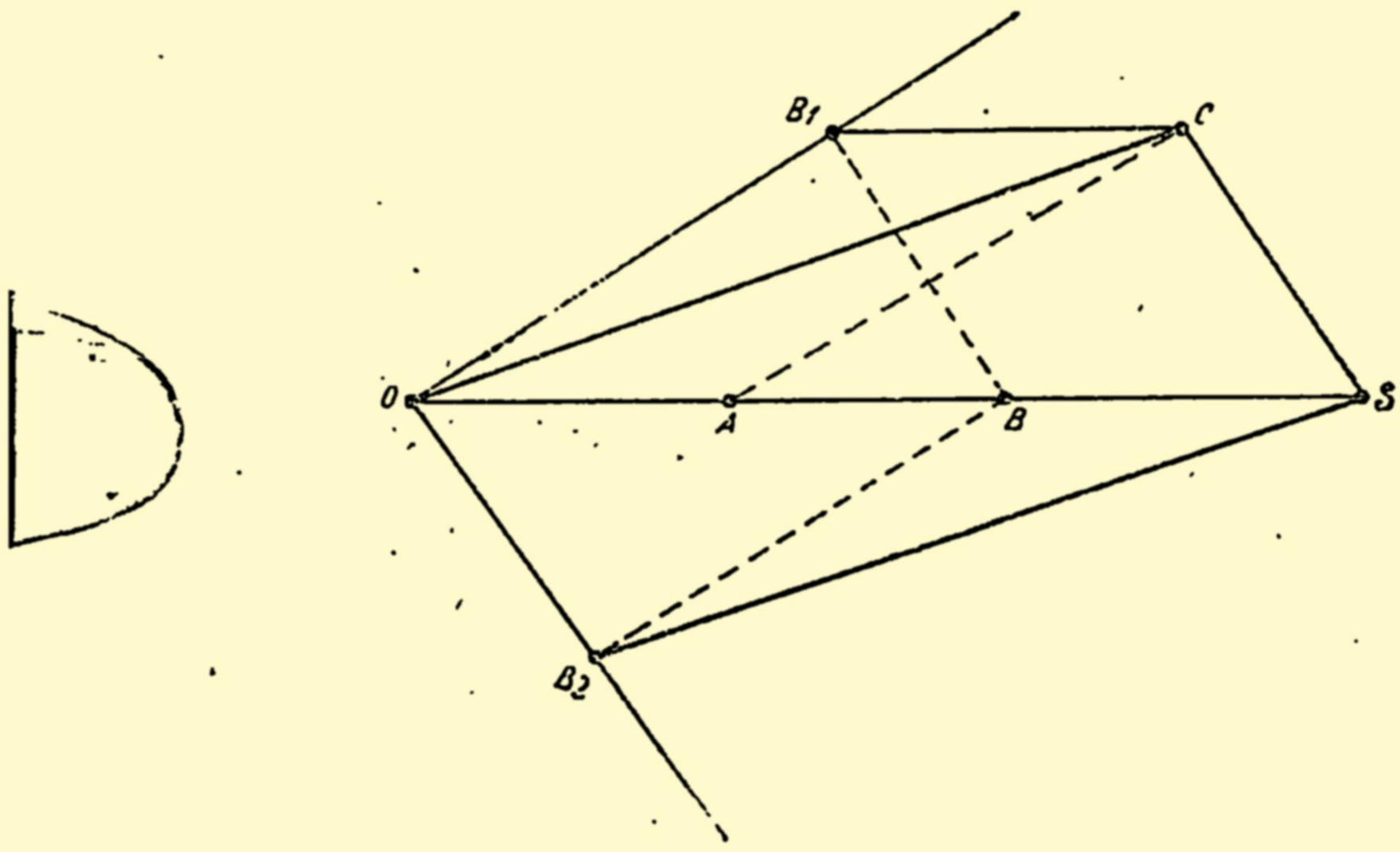


Fig. 23

Avem deci

$$(O,A)+(O,B)=(O,A)+[(O,B_1)+(O,B_2)]=$$
$$=[(O,A)+(O,B_1)]+(O,B_2)=(O,C)+(O,B_2).$$

O paralelă din C, extremitatea sumei $(O,A)+(O,B_1)$, la (O, B_2) taie pe (O,A) în S.

Proprietăţi geometrice simple ne arată că

$$(C,S)=(B_1,B)=(O,B_2)$$

şi deci patrulaterul $OCSB_2$ este un paralelogram, sau

$$(O,S)=(O,C)+(O,B_2)=(O,A)+(O,B).$$

Dacă λ şi μ sunt măsurile vectorilor (O,A) şi (O,B) cu un vector-unitate (O,E) purtat pe (O,A) şi (O,B), avem

$$(O,A)=\lambda(O,E),\quad (O,B)=\mu(O,E)$$

şi deci

$$(O,S)=(\lambda+\mu)\ (O,E).$$

Am folosit în această observaţie notaţia prin bipuncte (O,A), (O,B) etc. pentru a evidenţia analogia cu biplanele (P_1,P_2), (Q_1,Q_2) etc.

Scanned with OKEN Scanner

Prin dreptele BB' şi CC' de intersecţie ale planelor P_2 şi Q_2 cu R_1 vom duce planele P_1 şi Q_1 paralele, respectiv cu P_2 şi Q_2, formând astfel biplanele (P_1,P_2) şi (Q_1,Q_2). Vom avea

$$(R_1,R_2)=(P_1,P_2)+(Q_1,Q_2). \qquad (57,1)$$

Adunarea biplanelor paralele, cu o dreaptă dată este comutativă şi asociativă. Descompunerea unui biplan după două direcţii ne permite să construim geometric *suma a două biplane paralele.* (A se compara cu cazul vectorilor coliniari).

In fig. 24 sunt reprezentate numai secţiunile biplanelor printr'un plan oarecare. Vom alege planul final al biplanelor paralele (P_1,P_2) şi (Q_1,Q_2) comun şi vom descompune biplanul (P_1, P_2) după două direcţii în biplanele (I_1,I_2) şi (J_1,J_2):

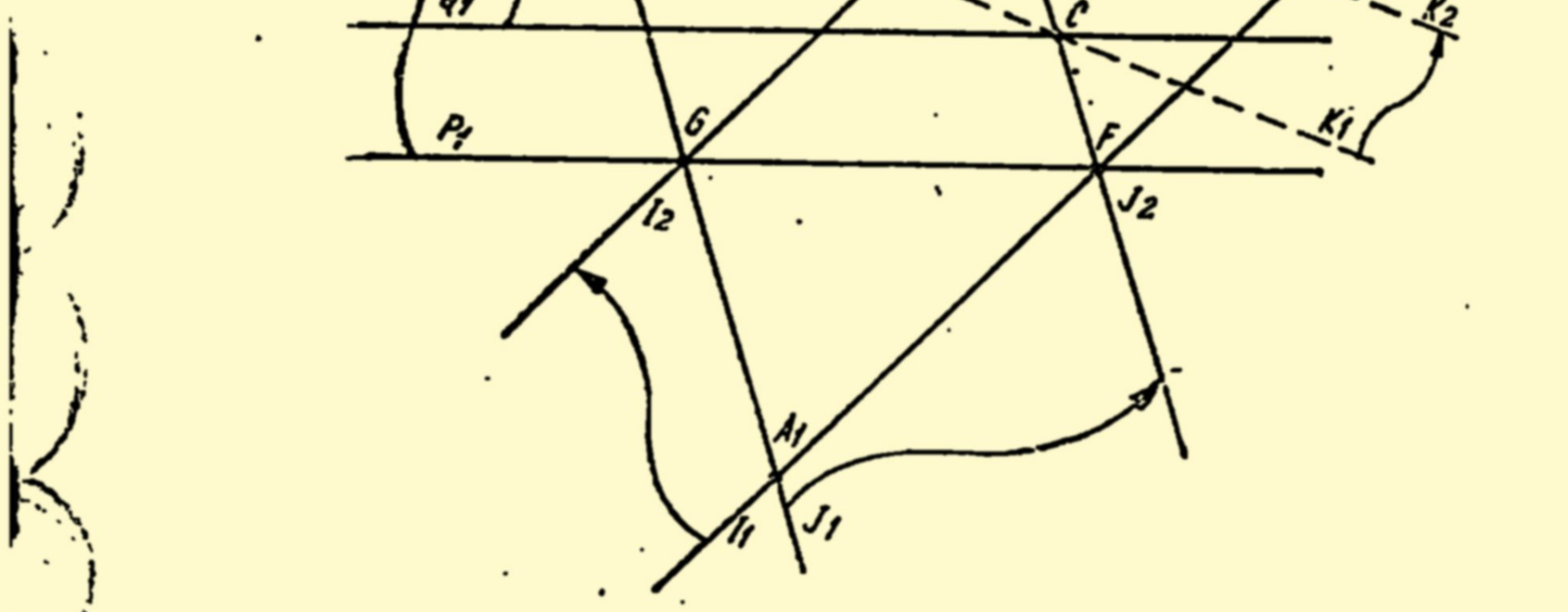


Fig. 24

$$(P_1,P_2)=(I_1,I_2)+(J_1,J_2).$$

Vom scrie

$$(P_1,P_2)+(Q_1,Q_2)=(I_1,I_2)+[(J_1,J_2)+(Q_1,Q_2)]$$

şi vom avea

$$(J_1,J_2)+(Q_1,Q_2)=(K_1,K_2)$$

după regula adoptată; apoi

$$(K_1,K_2)+(I_1,I_2)=(R_1,R_2).$$

Biplanul

$$(R_1,R_2)=(P_1,P_2)+(Q_1,Q_2)$$

este paralel cu (P_1,P_2) şi (Q_1,Q_2) [1])

In particular, dacă $(Q_1,Q_2)=(P_1,P_2)$ dreapta Q_1 se confundă cu P_1 şi punctul C devine F. Prin urmare, D este mijlocul segmentului GA_2. Vom scrie

$$(P_1,P_2)+(P_1,P_2)=(R_1,R_2)=2(P_1,P_2)$$

şi vom observa că segmentul A_2D este jumătatea segmentului A_2G. Vom numi $2(P_1,P_2)$ dublul biplanului (P_1P_2).

Prin urmare; *distanţa măsurată pe o dreaptă oarecare între planele dublului unui biplan este jumătate din distanţa măsurată pe aceeaşi dreaptă între planele acelui biplan.*

---

[1]) Pentru lămurirea construcţiei precizăm că J_1 şi Q_2 se intersectează în B, J_2 şi Q_1 în C, iar J_2 şi Q_2 în A_2. Dreapta BC reprezintă planul K_1, iar paralela dusă prin A_2 la BC planul K_2. Deasemenea I_2 şi K_1 se intersectează în D, iar I_1 şi K_2 în E. Dreapta DE reprezintă planul R_1, iar R_2 este reprezentat prin BA_2, deci se confundă cu P_2 şi Q_2.

Scanned with OKEN Scanner

Putem defini în mod analog un multiplu oarecare $n(P_1,P_2)$ al unui biplan, în care caz distanţa dintre planele lui $n(P_1,P_2)$ va fi $\frac{1}{n}$ din distanţa dintre planele lui (P_1,P_2).

Vom putea deci întroduce o *măsură* λ a biplanelor paralele, analoagă cu măsura vectorilor coliniari: biplanul $\lambda\,(P_1,P_2)$ va fi paralel cu (P_1,P_2) şi distanţa dintre planele sale măsurată pe o dreaptă oarecare va fi $\frac{1}{\lambda}$ din distanţa dintre planele lui (P_1,P_2).

Când orientarea este aceeaşi, $\lambda>0$, iar când orientarea este opusă, $\lambda<0$. *Prin aceasta biplanul devine o mărime măsurabilă cu o măsură bine determinată.* Măsura biplanelor ne conduce la o a doua operaţie de Algebră liniară vectorială: *amplificarea cu un scalar* λ. Produsul unui biplan printr'un scalar λ este biplanul $\lambda(P_1,P_2)$.

In ceeace priveşte scăderea, vom observa că opusul $-(P_1,P_2)$ al unui biplan este biplanul (P_2,P_1) şi putem defini diferenţa a două biplane astfel:

$$(P_1,P_2)-(Q_1,Q_2)=(P_1,P_2)+[-(Q_1,Q_2)]. \qquad (58,I)$$

Biplanul nul (Ω_1,Ω_2), fiind definit prin proprietatea

$$(P_1,P_2)+(\Omega_1,\Omega_2)=(P_1,P_2) \qquad (59,I)$$

din construcţia sumei a două biplane, se vede că unul din planele sale, de exemplu Ω_2 este la infinit. Se vede uşor că direcţia celuilalt plan Ω_1 este arbitrară. (Exerciţiu).

*§ 34. Biplane liniar dependente şi independente. Triedrul fundamental

Două biplane sunt *liniar dependente* dacă există o combinaţie liniară formată cu ele de forma

$$\lambda(P_1,P_2)+\mu(Q_1,Q_2)=(\Omega_1,\Omega_2)=0, \qquad (60,I)$$

λ şi μ nefiind amândoi nuli. Două biplane liniar dependente sunt paralele.

Două biplane *sunt liniar independente* în cazul când relaţia (60,I) nu are loc decât pentru $\lambda=\mu=0$.

In acest caz, biplanele nefiind paralele vor avea o sumă $(R_1,\ R_2)$, care se poate construi conform cu regula (57,I). Biplanul $(R_1,\ R_2)$ este paralel cu intersecţiile biplanelor $(P_1,\ P_2)$ şi $(Q_1,\ Q_2)$, care sunt drepte.

Trei biplane $(P_1,\ P_2)$, $(Q_1,\ Q_2)$, $(R_1,\ R_2)$ sunt liniar dependente dacă există o combinaţie liniară nulă

$$\lambda\,(P_1,\ P_2)+\mu\,(Q_1,\ Q_2)+\nu\,(R_1,\ R_2)=(\Omega_1,\Omega_2)=0 \qquad (61,I)$$

cu λ, μ, ν nu toţi nuli. In acest caz, biplanul $\nu\,(R_1,\ R_2)$ poate fi scris:

$$\nu\,(R_1,R_2)=-\lambda\,(P_1,P_2)-\mu\,(Q_1,Q_2),$$

deci este paralel cu intersecţiile lui $(P_1,\ P_2)$ şi $(Q_1,\ Q_2)$.

Condiţia necesară şi suficientă ca trei biplane să fie liniar dependente, este ca ele să fie paralele cu o aceeaşi dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

Descompunerea unui biplan după două direcţii de biplane paralele cu o dreaptă din acest biplan ne conduce la trei bipl..ne liniar dependente. Această descompunere se poate face într'o infinitate de moduri. In adevăr, relaţia (57,l) arată că (P_1, P_2), (Q_1, Q_2) şi (R_1, R_2) sunt liniar dependente.

Se vede deci, că biplanele se comportă în operaţiile de Algebră liniară vectorială la fel cu vectorii.

Vom putea descompune un biplan după trei direcţii de biplane liniar independente într'un mod analog cu cel întrebuinţat pentru descompunerea vectorilor.

Pentru aceasta, vom observa întâi că planele P_1, Q_1, R_1 a trei biplane (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2) liniar independente formează un triedru nedegenerat (P_1, Q_1, R_1). Vom considera planele iniţiale concurente într'un punct O, ceeace ne va permite să operăm numai cu planele finale. Planul final S_2, al biplanului (S_1, S_2) pe care voim să-l descompunem, va intersecta muchiile triedului (P_1, Q_1, R_1) în trei puncte A, B, C şi P_1 va fi figurat prin OB, OC, apoi Q_1 prin OC, OA şi R_1 prin OA, OB (fig. 25).

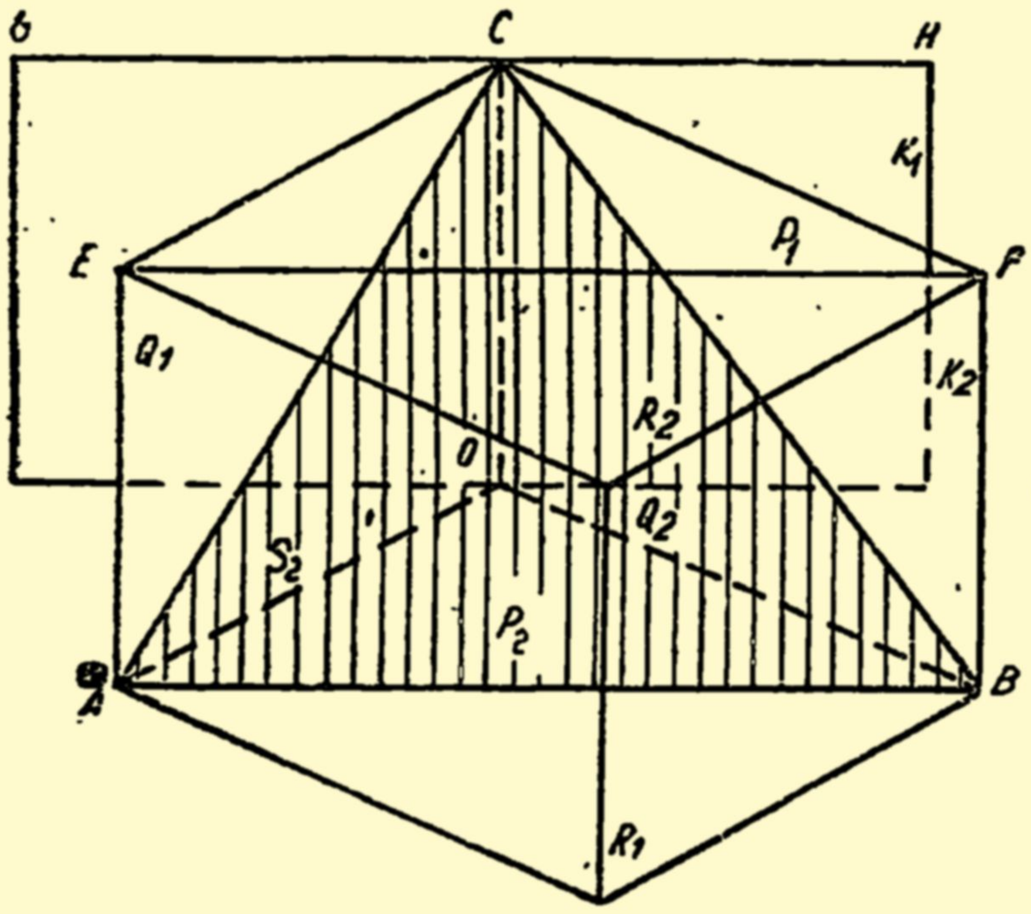


Fig. 25

Fie P_2, Q_2, R_2 planele paralele, respectiv cu P_1, Q_1, R_1 şi trecând prin A, B, C. Biplanele (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2) formează un paralelipiped având planul S_2 determinat de A, B, C ca unul din planele diagonale.

Să construim suma:

$$(P_1, P_2) + Q_1, Q_2) = (K_1, K_2). \qquad (62,1)$$

Intersecţia (P_1, Q_2) va fi dreapta BF paralelă cu OC. Intersecţia (P_2, Q_1) va fi dreapta AE, deasemenea paralelă cu OC.

Planul K_2 va fi deci determinat de aceste două drepte şi figurat prin $ABFE$.

Vom lua planul iniţial K_1 paralel cu el şi trecând prin O, deci prin OC.

Să construim suma:

$$(K_1, K_2) + (R_1, R_2). \qquad (63,1)$$

Intersecţia (K_1, R_2) va fi dreapta GH paralelă cu AB şi trecând prin C. Intersecţia (K_2, R_1) va fi dreapta AB.

Planul final al biplanului sumă va fi determinat de AB şi GH, deci de punctele A, B, C. El va coincide cu planul S_2 al biplanului dat. Prin urmare

$$(S_1, S_2) = (P_1, P_2) + (Q_1, Q_2) + (R_1, R_2).$$

Construcţia inversă, folosind descompunerile succesive indicate în operaţiile (62,l) şi (63,1), conduce la acelaşi rezultat, deci descompunerea este unică. Am obţinut următorul rezultat:

Scanned with OKEN Scanner

Orice biplan poate fi descompus intr'un mod unic după trei direcţii de biplane liniar independente.

Vom numi biplanele (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2), *componentele biplanului* (S_1, S_2) după aceste direcţii de biplane.

Dacă facem abstracţie de planele iniţiale, figurând exclusiv planele finale şi *triedrul* P_1, Q_1, R_1, putem considera operaţia făcută ca *descompunerea unui plan* S_2, *în raport cu acest triedru* numind P_2, Q_2, R_2 *componentele planului* S_2, căruia i-am asociat o mărime geometrică.

Orice plan, care nu trece prin origine, va avea trei componente bine determinate.

Un plan paralel cu una dintre axe, de exemplu cu OC, va avea componenta R_2 la infinit, deci biplanul (R_1, R_2) va fi în acest caz biplanul nul. Vom spune că această componentă este nulă.

Un plan paralel cu unul dintre planele triedrului va avea două componente nule.

Planului cu toate cele trei componente nule îi corespunde planul dela infinit.

Vom numi triedrul format de trei plane liniar independente P_1, Q_1, R_1, *triedru fundamental*, când descompunem în raport cu el biplanele spaţiului afin. In acest scop, vom alege trei biplane liniar independente (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2) ca *biplane fundamentale*. Ele vor forma un paralelipiped având un vârf în O. Biplanele fundamentale vor fi alese ca unităţi cu care vom măsura componentele biplanelor spaţiului. Măsurile acestor componente vor fi trei scalari λ, μ, ν.

Folosind noţiunea de măsură a biplanelor paralele şi observaţia că distanţa măsurată pe o direcţie oarecare între planele unui biplan este invers proporţională cu măsura sa în raport cu un biplan paralel cu el, *vom putea măsura biplanele prin aceste distanţe.*

In adevăr, să alegem ca direcţii de măsură, chiar direcţiile muchiilor triedrului fundamental. Fie

$$(S_1, S_2) = \lambda (P_1, P_2) + \mu (Q_1, Q_2) + \nu (R_1, R_2)$$

descompunerea biplanului (S_1, S_2) în raport cu triedrul fundamental.

Fie deasemenea d distanţa OA dintre planele (P_1, P_2) şi δ distanţa dintre planele componentei $\lambda (P_1, P_2)$ a lui (S_1, S_2). Vom avea

$$\frac{|\lambda|}{1} = \frac{d}{\delta},$$

exprimând inversa proporţionalitate între măsuri şi distanţe, deci

$$|\lambda| = \frac{1}{\delta} d. \qquad (64,1)$$

Măsurile componentelor unui biplan (S_1, S_2) *sunt invers proporţionale cu măsurile segmentelor interceptate de acest biplan pe muchiile triedrului fundamental.*

Acest mod de măsură permite în acelaşi timp reducerea măsurii biplanelor la măsura de segmente şi nu întroduce noţiunea de distanţă în spaţiu, deoarece măsurile se fac pe trei direcţii, independente una de alta.

Scanned with OKEN Scanner

Cum am observat şi în cazul vectorilor, aceasta revine la calculul unor rapoarte anarmonice, care sunt independente de noţiunea de distanţă sau a unor rapoarte de segmente coliniare.

In particular, dacă vectorii $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ sunt aleşi ca vectori fundamentali, măsura segmentelor pe cele trei direcţii fundamentale se va face cu unităţile $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. In acest caz, relaţia (64,I) devine

$$|\lambda| = \frac{1}{\delta}, \tag{65,I}$$

astfel încât putem enunţa următorul rezultat:

Dacă triedrul fundamental pentru biplane coincide cu triedrul fundamental pentru vectori, măsurile componentelor unui biplan oarecare vor fi inversele măsurilor segmentelor orientate pe care le interceptează pe axe.

Ca şi pentru vectori, pentru simplificarea limbajului, vom numi măsurile λ, μ, ν *componentele scalare* sau chiar *componentele biplanului. Componentele determină perfect biplanul.*

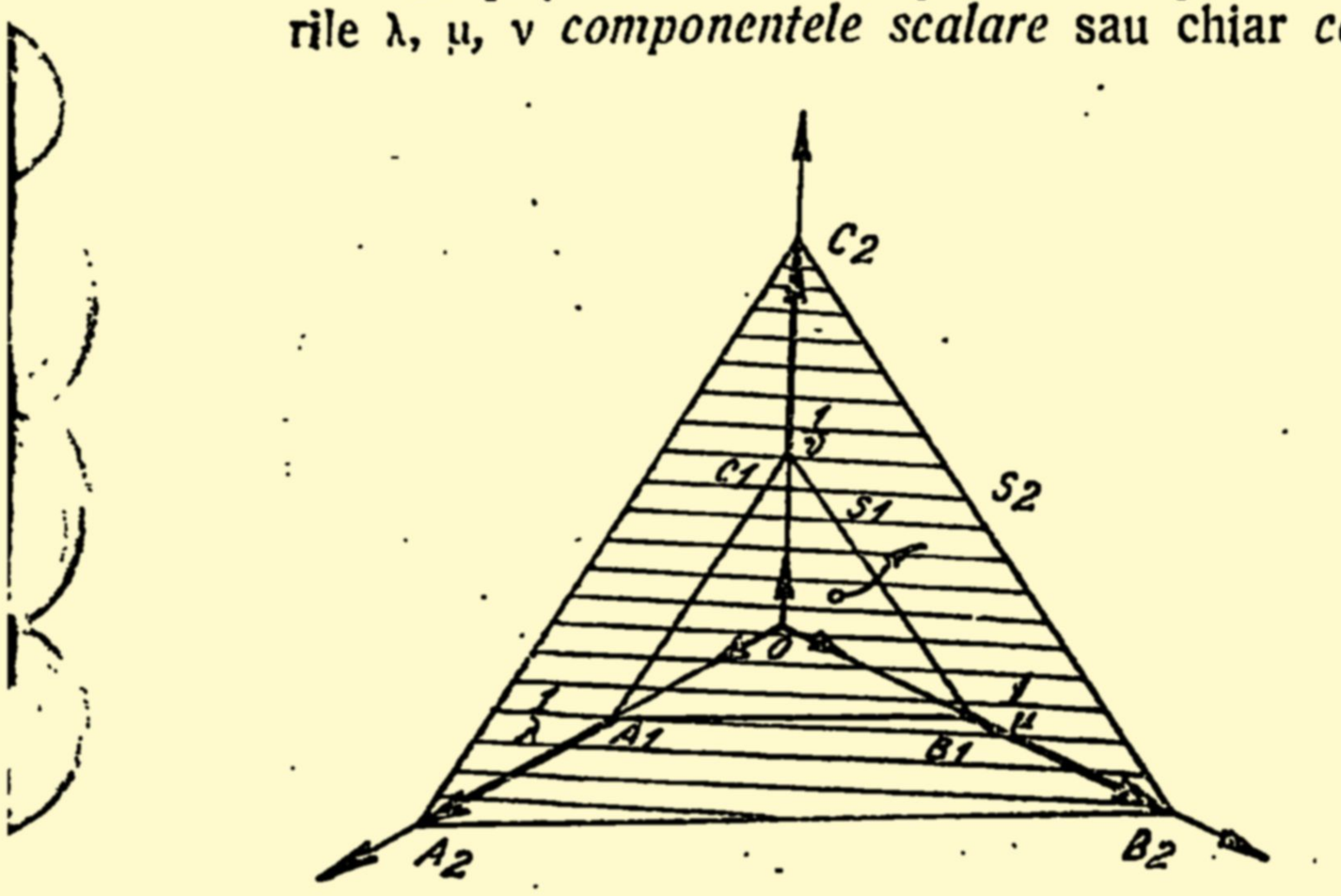


Fig. 26

In adevăr, dacă $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, construcţia biplanului este imediată: luând pe cele trei axe segmentele $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$, planul final va fi determinat de extremităţile acestor segmente.

Printr'o translaţie biplanul (S_1, S_2) va fi deplasat într'o poziţie oarecare şi vom avea, fig. 26,

$$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{\lambda}, \quad \overline{B_1B_2} = \frac{1}{\mu},$$

$$\overline{C_1C_2} = \frac{1}{\nu}.$$

Dacă una sau două dintre componente sunt nule, din relaţia (65,I) vom deduce că segmentul sau segmentele respective vor fi infinite. In acest caz, vom lua biplanul paralel cu una sau două dintre direcţiile fundamentale.

Când $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=0$, biplanul va avea planul final la infinit şi va fi biplanul nul.

Când una dintre componente tinde la infinit, cele două plane ale biplanului tind să se confunde.

Componentele λ, μ, ν pot servi pentru reprezentarea planelor, considerând totdeauna planul iniţial al biplanului ca trecând prin origine. Excluzând deci planele ce trec prin O, *orice plan poate fi reprezentat prin componentele sale* λ, μ, ν.

*§ 35. Vectori contravarianţi şi covarianţi în spaţiul afin

Noţiunea de biplan constitue un exemplu pentru lămurirea rolului axiomatizării în *desvoltarea ulterioară* a unei discipline matematice. Aşezarea

Scanned with OKEN Scanner

axiomelor la baza unei discipline nu înseamnă deloc cunoașterea implicită a tuturor rezultatelor posibile în acea disciplină. Desvoltarea acesteia se face prin introducerea noilor noțiuni, prin concluziile noi deduse din axiome etc.

Axiomele ne permit, însă, pe de o parte apropierea noțiunilor ce au caracteristice esențiale comune, deși în aparență sunt deosebite, iar pe de altă parte distingerea noțiunilor ce prezintă aspecte analoage, dar care se deosebesc esențial.

Astfel, biplanul și vectorul, având ca imagini respectiv perechea de plane și perechea de puncte orientate, sunt aparent extrem de deosebite ca înfățișare geometrică, pe când, de exemplu, vectorul liber și vectorul alunecător sunt dimpotrivă foarte asemănătoare. Cercetarea acestor noțiuni în lumina axiomelor spațiului vectorial enunțate în § 31, arată, însă, că *biplanul și vectorul liber sunt noțiuni extrem de înrudite, pe când vectorul alunecător se deosebește esențial de vectorul liber.*

Am numit vector mărimea abstractă care îndeplinește axiomele I, II, III, iar spațiu vectorial mulțimea vectorilor. Când vectorii îndeplinesc, în plus, axioma dimensională IV, obținem spațiul vectorial cu trei dimensiuni, iar cu axioma IV' avem spațiul vectorial cu n dimensiuni.

Ori, biplanul verifică toate aceste patru axiome, cum este ușor de constatat. In adevăr, este suficient să înlocuim în enunțul acestor axiome cuvântul vector prin biplan pentru a obține enunțurile proprietăților stabilite mai sus.

Vom putea decl trage concluzia fundamentală:

Biplanul este un vector in spațiul vectorial cu trei dimensiuni.

Spațiul vectorial, așa cum a fost conceput, este un spațiu abstract, având ca element vectorul definit prin axiome. Acest element nu este însă o pură construcție mintală, ci o noțiune care reunește caracterele generale ale unei clase de mărimi fizice, mărimile vectoriale. Oridecâteori o mărime fizică va satisface cele patru axiome I. II, III, IV, ea va fi o mărime vectorială a unui spațiu vectorial și îi vom aplica operațiile vectoriale, In particular, orice mărime geometrică, ce satisface aceste axiome, este o mărime vectorială.

Bipunctul orientat (A, B) este un exemplu de mărime geometrică vectorială. Cele trei axiome V, VI și VII nu fac decât să pună în lumină această proprietate a lui.

In adevăr, axioma V definește bipunctul, iar axioma VI — clasa tuturor bipunctelor echivalente, care constitue un vector. Axioma VII dă regula de adunare a acestor vectori, *Spațiul afin cu trei dimensiuni, având punctul ca element este un exemplu de spațiu vectorial.*

In acest spațiu mai există și alte mărimi geometrice vectoriale definite cu ajutorul figurilor spațiului. Un exemplu este biplanul, al cărui caracter vectorial a fost stabilit mai sus. Vom face observația că *definirea biplanului ca vector nu mai întroduce nicio axiomă nouă.* Putem pune în evidență definiția sa prin trei proprietăți, care imită axiomele V, VI și VII, dar care se deduc din axiomele spațiului afin.

V_*. *Două plane paralele P_1 și P_2 determină un vector*

$$(P_1, P_2) = \overline{u}_*.$$

VI_*. *Fiind dat un punct A și un vector $\overline{u}_*$, există un plan P_2 și numai unul, astfel încât*

$$(A, P_2) = \overline{u}_*.$$

Scanned with OKEN Scanner

VII$_*$. *Dacă* $(A, P_2)=\bar{u}_*$ *şi* $(A, Q_2)=\bar{v}_*$, *atunci*

$$(A, R_2)=\bar{u}_*+\bar{v}_*,$$

unde R_2 *este planul care trece prin intersecţiile planelor* P_1 *şi* Q_2, *respectiv* P_2 *şi* Q_1.

Dintre aceste proprietăţi, ultima este aceea care exprimă caracterul de mărime măsurabilă al biplanului, fiindcă defineşte adunarea, din care rezultă şi măsura biplanelor, dacă definim şi amplificarea printr'un număr.

Reducerea acestei măsuri la aceea a segmentelor interceptate pe o dreaptă oarecare D secantă biplanului pune în evidenţă o deosebire esenţială între bipunct şi biplan: *pe când multiplul* $\lambda(A, B)$ *al unui bipunct* (A, B) *situat pe* D *interceptează pe* D *un segment de* λ *ori mai mare decât* (A, B), *multiplul* $\lambda(P_1, P_2)$ *interceptează pe* D *un segment de* λ *ori mai mic decât* (P_1, P_2).

Operaţia de înmulţire printr'un scalar, *exprimată geometric prin acelaşi mijloc*, adică prin rapoarte de segmente, deci independent de noţiunea de distanţă, arată clar această deosebire.

Produsul unui bipunct (A, B) printr'un scalar λ este un bipunct $\lambda(A, B)=(A, B_1)$ paralel cu (A, B), segmentele AB_1 şi AB fiind în raportul λ. Produsul unui biplan (P_1, P_2) printr'un scalar λ este un biplan $\lambda(P_1, P_2)$ paralel cu (P_1, P_2), segmentele interceptate de el şi de (P_1, R_2) pe o dreaptă oarecare secantă fiind în raportul $\frac{1}{\lambda}$.

Din aceste consideraţii asupra măsurii, care este un factor fundamental în caracterizarea mărimilor măsurabile, rezultă că *bipunctul şi biplanul reprezintă două tipuri de mărimi vectoriale distincte*, opuse unul altuia prin comportarea lor faţă de mijlocul comun de măsură prin raport de segmente.

Vom numi *vector contravariant în spaţiul afin* orice mărime vectorială reprezentabilă geometric printr'un bipunct.

Vom numi *vector covariant în spaţiul afin* orice mărime vectorială reprezentabilă geometric printr'un biplan.

Termenul *reprezentabil geometric* este destinat să dea o imagină a modului de comportare a mărimii din punctul de vedere al măsurii.

El are înţelesul de *măsurabil* ca un bipunct, respectiv un biplan.

De exemplu, o mărime pentru care suma se efectuează după regula paralelogramului, cum este compunerea deplasărilor sau a vitezelor, va fi un vector contravariant,

Este mai greu de dat un exemplu elementar de vector covariant, deşi forţa însăşi ne conduce la un astfel de vector, deoarece caracterul covariant este mai puţin vizibil, din cauză că operaţiile cu biplane nu sunt folosite direct. In adevăr, majoritatea raţionamentelor geometrice, mecanice, fizice clasice se fac folosindu-se noţiunile de distanţă şi unghi. Ori, în acest caz, fiecărui vector covariant îi putem asocia un vector contravariant, în speţă un vector perpendicular pe biplan.

Calculul, vectorial, aşa cum este desvoltat de majoritatea autorilor, nu face distincţie între vectori covarianţi şi contravarianţi, deoarece nu separă operaţiile liniare de cele metrice, care folosesc noţiunea de distanţă. Totuşi, distincţia există şi apare cu necesitate, atunci când se urmăreşte o analiză mai adâncită a mărimilor fizice, aşa cum este impusă de stadiul actual al Mecanicei şi Fizicei. Este suficient pentru aceasta să nu pierdem din vedere

Scanned with OKEN Scanner

că aceste mărimi sunt independente de sistemele de referinţă utilizate. Vom vedea ulterior că prin schimbarea triedrelor fundamentale, caracterele contravariante şi covariante ale mărimilor se impun dela sine.

Raportând un vector contravariant $\bar{V}$ la un triedru fundamental, format cu o bază de vectori contravarianţi liniari independenţi $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, în spaţiul afin, vom scrie

$$\bar{V} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{w}. \qquad (66,I)$$

Deasemenea, raportând în spaţiul afin vectorul covariant $\bar{V}$ la un triedru fundamental $\bar{u}_*, v_*, \bar{w}_*$ format cu trei vectori covarianţi liniar independenţi, vom scrie

$$\bar{V}_* = \alpha_*\bar{u}_* + \beta_*\bar{v}_* + \gamma_*\bar{w}_*. \qquad (67,I)$$

După cum am observat, *putem alege în acest scop unul şi acelaşi triedru fundamental*, ceeace ne va permite să reducem măsura vectorilor covarianţi la aceea a inverselor segmentelor interceptate de biplane pe muchiile triedrului.

EXERCIŢII

1. Să se demonstreze vectorial că bisectoarea unui unghi într'un triunghi împarte latura opusă în părti proporţionale cu laturile adiacente.

Indicaţie. Fie ABC triunghiul şi AA' bisectoarea unghiului A. Se consideră vectorii $\overline{AB} = \bar{c}$ şi $\overline{AC} = \bar{b}$. Bisectoarea este $\overline{AA'} = \lambda\left(\frac{\bar{b}}{b} + \frac{\bar{c}}{c}\right)$, unde λ este un coeficient. Se exprimă apoi vectorul $\overline{AA'}$, ţinând seamă că A' este situat pe $\overline{BC}$; din egalarea expresiilor obţinute pentru $\overline{AA'}$, care nu poate admite decât o singură reprezentare faţă de vectorii liniar independenţi $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, se deduce că

$$\frac{|\overline{A'B}|}{A'C} = \frac{c}{b} \quad \text{şi} \quad \lambda = \frac{bc}{b+c}.$$

(Vezi I. F. Ladon, Bazele Calculului Vectorial, vol. I. Ed. Tehnică 1949, p. 36).

2. Pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ se consideră punctele M_1, M_2, M_3 astfel ca

$$\overline{M_1A_2} = \lambda\overline{M_1A_3},\ \overline{M_2A_3} = \mu\overline{M_2A_1},\ \overline{M_3A_1} = \nu\overline{M_3A_2};$$

să se arate că dacă $\lambda\mu\nu = 1$, punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

Indicaţie. Se vor exprima vectorii de poziţie ai punctelor M_1, M_2, M_3 cu ajutorul vectorilor de poziţie ai punctelor A_1, A_2, A_3, ţinând seamă de relatiile date.

3. Se dau patru puncte A_1, A_2, A_3, A_4 situate oricum în spaţiu. Pe A_1A_2 şi A_3A_4 se iau punctele M şi N, astfel ca $\overline{A_1M} = \lambda\overline{MA_2}$, $\overline{A_3N} = \lambda\overline{NA_4}$. Să se arate că centrele de greutate ale grupelor de puncte: $A_1A_2A_3A_4$, A_1A_3MN şi A_2A_4MN sunt pe o aceeaşi dreaptă.

Indicaţie. Se exprimă vectorii de poziţie ai punctelor M şi N în funcţie de cei ai punctelor A_1, A_2, A_3, A_4, apoi ai centrelor de greutate şi se ţine seamă de § 32, aplicaţia 3.

4. Pe muchiile SA, SB, SC ale unui tetraedru $SABC$ se iau trei puncte arbitrare A', B', C'. Să se arate că punctul M de intersectie al planelor $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, punctul N de intersecţie al planelor $AB\,C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ şi S sunt coliniare.

Indicaţie. Se notează $\overline{SA} = \bar{u}$, $\overline{SB} = \bar{v}$, $\overline{SC} = \bar{w}$; $\overline{SA'} = \alpha\bar{u}$, $\overline{SB'} = \beta\bar{v}$, $\overline{SC'} = \gamma\bar{w}$. Un punct P din planul $A'BC$ va fi caracterizat prin $\overline{SP} = \overline{SA'} + \lambda\overline{A'B} + \mu\overline{A'C}$ adică $\overline{SP} = \alpha\bar{u} + \lambda_1(\bar{v} - \alpha\bar{u}) + \mu_1(\bar{w} - \alpha\bar{u})$. Vom avea expresii analoage pentru $\overline{SQ}$, $\overline{SR}$, care vor caracteriza puncte din planele $B'CA$, $C'AB$ cu λ_2, μ_2, respectiv λ_3, μ_3 arbitrari. Punctul comun al acestor plane va fi dat de $\overline{SP} = \overline{SQ} = \overline{SR}$, ceeace ne va conduce la determinarea oricărei perechi λ_i, μ_i, obţinând astfel vectorul $\overline{SM}$. Analog pentru punctul N. Se va observa apoi că $\overline{SM}$ şi $\overline{SN}$ sunt coliniari.

5. Utilizând rezultatele din exerciţiul precedent, să se determine punctul O de intersecţie al dreptei SMN cu planul ABC, şi O' intersecţia acelelaşi drepte cu $A'B'C'$.

Indicaţie. Se va scrie $\overline{SO} = \lambda\overline{SM}$ şi se va determina λ, astfel ca O să fie situat în planul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

6. Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca să putem construi cu trei vectori echipolenți cu cevienele unui triunghi dat un alt triunghi, este ca aceste cevine să împartă în același raport laturile triunghiului.

Indicație. Fie $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$, $\overline{AB}=\bar{c}$ laturile triunghiului ABC, iar $A'B'C'$ picioarele cevienelor $\overline{AA'}=\bar{a}_1$, $\overline{BB'}=\bar{b}_1$, $\overline{CC'}=\bar{c}_1$.

Vom avea $\bar{a}_1=\bar{c}+\lambda\bar{a}$, $\bar{b}_1=\bar{a}+\mu\bar{b}$, $\bar{c}_1=\bar{b}+\nu\bar{c}$.

Dat fiind că $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$, impunem condiția $\bar{a}_1+\bar{b}_1+\bar{c}_1=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}+\nu\bar{c}=\bar{0}$. Înlocuind, obținem $\bar{c}=-\bar{a}-\bar{b}$, $(\lambda-\nu)\bar{a}=(\mu-\nu)\bar{b}$, de unde $\lambda=\mu=\nu$.

7. Să se arate că vectorii $\bar{v}-\bar{u}$, $\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}$, $-\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}$ sunt coplanari. Ce reprezintă acești vectori pentru paralelipipedul construit pe $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ca muchii?

8. Fiind dați vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ liniar independenți, să se determine λ, astfel ca vectorii

$$\bar{u}_1=\lambda\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3,$$
$$\bar{u}_2=\bar{v}_1+\lambda\bar{v}_2+\bar{v}_3,$$
$$\bar{u}_3=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\lambda\bar{v}_3$$

să fie coplanari.

Indicație. Pentru determinarea a trei scalari α, β, γ, nu toți nuli, astfel ca să avem relația $\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{u}_2+\gamma\bar{u}_3=0$ este necesar ca determinantul sistemului $\lambda\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha+\lambda\beta+\gamma=0$, $\alpha+\beta+\lambda\gamma=0$ să fie nul.

Se obține o ecuație de gradul III în λ, care are ca soluții $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$.

9. Fie trei vectori $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ formând un triedru nedegenerat.

Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca vectorii

$$\bar{u}_1=\alpha_1\bar{p}+\beta_1\bar{q}+\gamma_1\bar{r},$$
$$\bar{u}_2=\alpha_2\bar{p}+\beta_2\bar{q}+\gamma_2\bar{r},$$
$$\bar{u}_3=\alpha_3\bar{p}+\beta_3\bar{q}+\gamma_3\bar{r}$$

să fie coplanari, este

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0.$$

Indicație. Se va ține seama de indicația dela exercițiul precedent.

10. Pe laturile A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 ale unui patrulater strâmb $A_1A_2A_3A_4$ se iau punctele M_1, M_2, M_3, M_4. Se notează cu α, β, γ, δ patru scalari convenabili, astfel ca

$$\overline{M_1A_1}=\alpha\overline{M_1A_2},\ \overline{M_2A_2}=\beta\overline{M_2A_3},\ \overline{M_3A_3}=\gamma\overline{M_3A_4},\ \overline{M_4A_4}=\delta\overline{M_4A_1}.$$

Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca punctele M_1, M_2, M_3, M_4 să fie în același plan este ca $\alpha\beta\gamma\delta=1$.

Indicație. Cu vectorii de poziție $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, $\bar{r}_4$ ai punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 construim vectorii de poziție $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}_3$, $\bar{\rho}_4$ ai punctelor M_1, M_2, M_3, M_4. Se va scrie apoi că:

$$\bar{\rho}_1=\lambda\bar{\rho}_2+\mu\bar{\rho}_3+\nu\bar{\rho}_4,\ \text{unde}\ \lambda+\mu+\nu=1.$$

11. Se consideră vectorii $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ formând un triunghi $P_1P_2P_3$, și vectorii

$$\overline{B_1}=\alpha_1\overline{A_2}+(\alpha_1-1)\overline{A_3},$$
$$\overline{B_2}=\alpha_2\overline{A_3}+(\alpha_2-1)\overline{A_1},$$
$$\overline{B_3}=\alpha_3\overline{A_1}+(\alpha_3-1)\overline{A_2},$$

Scanned with OKEN Scanner

trecând prin punctele P_1, P_2, P_3. Condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele care poartă vectorii $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$ să fie concurente este ca

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3).$$

Indicație. Pentru ca vectorul $\lambda\overline{B}_2+\mu\overline{B}_3$, unde λ și μ sunt doi coeficienți nedeterminați, să reprezinte tocmai vectorul $\overline{B}_1$, este necesar și suficient ca

$$\lambda(\alpha_2-1)+\mu\alpha_3=0,$$

$$\lambda\alpha_2=\alpha_1-1,$$

$$\mu(\alpha_3-1)=\alpha_1.$$

Eliminând parametrii λ și μ se obține relația cerută.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

MĂRIMILE ŞI OPERAŢIILE ALGEBREI VECTORIALE

A. OPERAŢII VECTORIALE IN SPAŢIUL EUCLIDIAN

§ 36. Mărimi fizice bidimensionale şi tridimensionale

Fenomenele fizice pun în evidenţă şi mărimi deosebite de cele scalare sau vectoriale, având caractere geometrice distincte. Ca şi mărimile vectoriale, într'o primă cercetare, ele sunt caracterizate prin efecte parţiale susceptibile de o măsură scalară, astfel încât adeseori caracterele lor geometrice nu apar explicit în expunerile matematice, ceeace produce o întârziere în cunoaşterea lor unitară, ca mărimi geometrico-fizice.

Un exemplu de astfel de mărime apare în Hidrostatică, unde o suprafaţă materială plană, scufundată într'un lichid, este supusă unei presiuni. Sub acţiunea gravităţii, lichidul desvoltă o forţă hidrostatică perpendiculară pe suprafaţă şi de mărime $h\gamma S$, unde h este distanţa verticală între centrul de greutate al suprafeţei şi faţa liberă a lichidului, γ—greutatea specifică (greutatea unităţii de volum) a lichidului, iar S —aria suprafeţei supuse presiunii hidrostatice.

Presiunea hidrostatică nu este caracterizată suficient prin mărimea sa ci şi prin direcţie şi sens, iar direcţia sa este impusă de direcţia suprafeţei

O mărime analoagă apare în mişcarea unui corp solid în aer, de exemplu în Aerodinamică. Forţa exercitată de aer asupra aripilor unui avion poate fi considerată într'o primă aproximaţie ca perpendiculară pe fiecare element plan şi de mărime kS, unde k este un coeficient, care depinde de viteza relativă a avionului. Aceste forţe sunt mărimi fizice care au o direcţie, dar *această direcţie este impusă de aceea a unui element de suprafaţă, nu a unei drepte.*

Aceste mărimi au şi o orientare, fiindcă presiunea hidrostatică se exercită pe o anumită faţă a suprafeţei, faţa opusă fiind supusă unei presiuni egale şi de sens opus.

Reprezentarea lor geometrică printr'un vector este indirectă, deoarece, la rândul său, acest vector este determinat de suprafaţa pe care se exercită presiunea. Prin urmare, imaginea geometrică a presiunii hidrostatice sau a presiunii aerului pe un corp solid în mişcare este o suprafaţă având o arie dată, o direcţie în spaţiu şi o faţă determinată.

Un alt fenomen, ce atrage atenţia asupra unei mărimi fizice, care nu se reprezintă printr'un vector, este mişcarea corpurilor solide. Pentru a ne da seama de mişcare, este necesar să determinăm poziţiile punctelor corpului şi

Scanned with OKEN Scanner

să constatăm că distanţele lor mutuale nu se schimbă. Un corp solid poate fi extins oricât prin adăugarea de corpuri solide legate de el, astfel încât putem concepe întreg spaţiul cu un corp solid.

Am văzut că pentru a fixa poziţiile punctelor spaţiului cu trei dimensiuni s'a impus în mod natural introducerea unui triedru de referinţă.

Poziţia unui corp solid este determinată, dacă se cunoaşte poziţia unui triedru format cu trei direcţii concurente $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ şi necoplanare, definite de patru puncte O, A, B, C ale acelui corp.

Prin urmare, acest triedru, definit chiar prin elementele materiale ale corpului solid, este o figură geometrică prin care se caracterizează deplasările corpului solid. Să observăm, chiar, că acest triedru caracterizează însuşi spaţiul cu trei dimensiuni, deoarece pe de o parte permite reperarea tuturor punctelor şi măsurarea tuturor vectorilor, iar pe de altă parte aceasta este posibil numai în spaţiul cu trei dimensiuni şi în subspaţiile sale liniare, adică planul şi dreapta.

Este adevărat că triedrul fundamental este format din vectori, dar el apare ca o figură geometrică unitară şi numai sub această formă se prezintă în mişcarea corpului solid, deci trebue considerat în sine ca un obiect geometric căruia i se asociază o mărime geometrică.

Din observaţiile făcute reiese că există mărimi fizice, caracterizate printr'o porţiune de suprafaţă plană, sau printr'o porţiune de spaţiu, aşa cum mărimile vectoriale sunt caracterizate printr'un segment orientat, adică printr'o porţiune de dreaptă.

Din acest motiv, vom numi aceste mărimi *bidimensionale*, respectiv *tridimensionale* şi vom căuta să le reprezentăm geometric în modul cel mai simplu.

§ 37. Element plan orientat

In studiul multor fenomene fizice, suprafeţele care delimitează corpurile sau separă două medii diferite, trebue considerate ca având două feţe. Astfel, în scurgerea unui fluid, este necesar să evaluăm volumul fluid, care traversează o suprafaţă în unitatea de timp, ţinând seama de faptul că masa fluidă iese dintr'o regiune a spaţiului şi intră în alta, deci că într'o parte există o pierdere şi în cealaltă, un câştig de fluid.

Pentru aceasta vom distinge faţa văzută din regiunea din care vin particulele fluide, de cea văzută din regiunea în care trec.

Deasemenea, în fenomenele optice, suprafaţa care separă două medii optice diferite prezintă două feţe distincte, îndreptate una spre primul mediu şi cealaltă spre al doilea. O rază de lumină întâlnind prima faţă, dacă o străbate, suferă o refracţie şi îşi continuă drumul având o direcţie diferită de cea iniţială în mediul limitat de cea de a doua faţă a suprafeţei de separaţie.

O porţiune dintr'un plan, limitată de o curbă închisă simplă se numeşte un *element plan.*

Putem asimila cu un element plan şi o porţiune de suprafaţă curbă, restrânsă la vecinătatea unui punct şi delimitată de o curbă închisă, desenată pe acea suprafaţă. Elementele plane sunt deci figuri geometrice.

Vom numi element plan orientat un element plan la care distingem două feţe, atribuindu-le două sensuri opuse: pozitiv şi negativ.

Scanned with OKEN Scanner

Faţa pozitivă poate fi distinsă de cea negativă printr'un fenomen care se petrece în mod deosebit de o parte şi de cealaltă, ca în exemplele de mai sus.

Elementul plan mai poate fi orientat şi cu ajutorul conturului său C, pe care alegem un sens de parcurs ca pozitiv. In acest caz, vom considera ca pozitivă acea faţă a elementului plan care, privită printr'un punct exterior N, va apare ca delimitată de un contur parcurs în sensul pozitiv, adică în sensul rigonometric. Acest sens este cel opus acelor ceasornicului.

Putem imagina un observator în picioare pe una din cele două feţe, reprezentat prin normala la elementul plan. In cazul când el vede conturul C parcurs în sensul *pozitiv* (direct, trigonometric), spunem că se găseşte pe faţa pozitivă a elementului.

In fig. 27 sunt reprezentate două elemente plane orientate. Observatorul MN, aşezat pe elementul din stânga, vede un fenomen care se petrece în două moduri diferite, după cum este văzut de pe o faţă sau de pe faţa opusă; de exemplu, el vede apărând particule fluide, în timp ce de pe faţa opusă ar vedea dispărând aceste particule. Convenţional, el se găseşte pe *faţa pozitivă* a elementului plan.

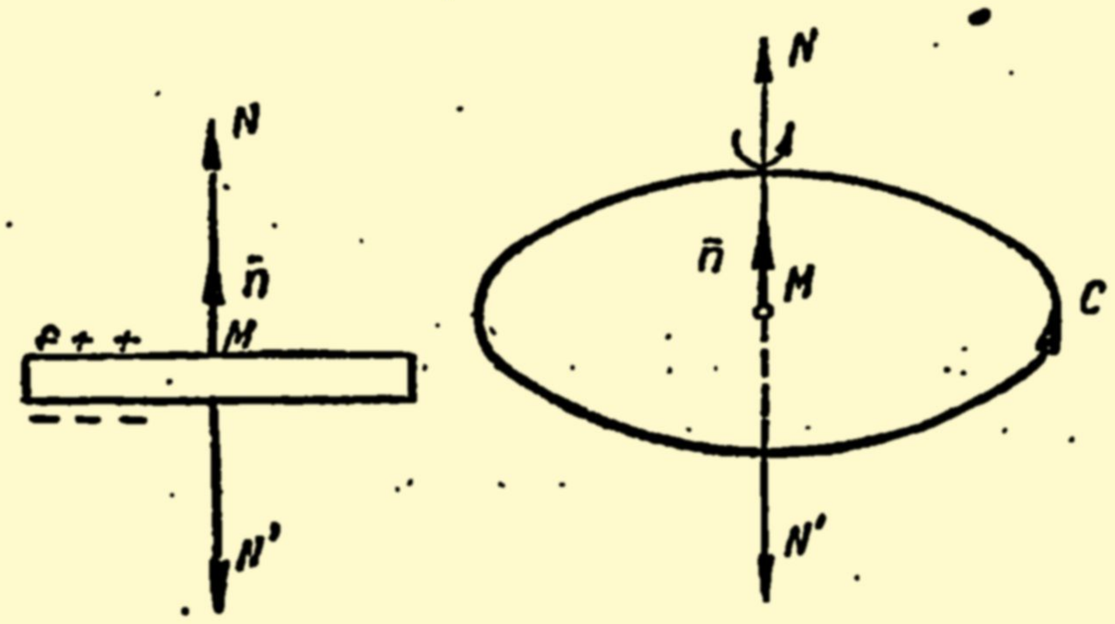


Fig. 27

Pentru observatorul $\overline{MN}$, aşezat pe al doilea element plan din dreaptă, fenomenul este parcurgerea conturului C în sensul direct. In ambele cazuri, ducând normala la elementul plan orientat, aceasta este separată prin punctul M în două semidrepte orientate, simbolizând cei doi observatori posibili $\overline{MN}$ şi $\overline{MN'}$.

Vom numi *normală pozitivă*, seminormala feţei pozitive. Aceasta este deci definită fie prin indicarea feţei pozitive, fie prin orientarea conturului.

Când faţa pozitivă este indicată, elementul orientat se mai numeşte şi *dublu strat*. (Denumirea provine din teoria magnetismului).

Direcţia unui element plan este determinată prin aceea a normalei sale fiindcă toate planele perpendiculare pe aceeaşi direcţie sunt paralele între ele

Orientarea unui element plan este determinată prin direcţia normale sale pozitive, adică prin versorul acestei direcţii.

Deoarece în măsura mărimilor fizice, reprezentabile prin elemente plane orientate, ca presiunea hidrostatică, intervine ca un factor aria elementelor respective, vom caracteriza orice element plan orientat şi prin aria sa, asociindu-i astfel o mărime geometrică. In cele ce urmează vom folosi acelaş, termen atât pentru obiect cât şi pentru mărimea asociată.

Uu element plan orientat este deci *mărimea geometrică* având:

1) *o direcţie:* aceea a planului său;
2) *o orientare:* aceea a feţei sale pozitive;
3) *un modul:* aria închisă de conturul său.

Putem sintetiza aceste caracteristice ale mărimii definite, astfel:

Scanned with OKEN Scanner

1) *o direcţie şi o orientare:* determinate de normala sa pozitivă;
2) *un modul:* aria închisă de conturul său.

Deoarece forma curbei C, deci forma elementului plan orientat, nu joacă niciun rol în definiţia acesteia, observăm că din punct de vedere geometric el este determinat de normala sa pozitivă, iar din punct de vedere numeric de modulul său.

Vom putea deci reprezenta vectorial un element plan orientat prin următoarea convenţie:

Orice element plan orientat se reprezintă printr'un vector liber, având ca versor versorul normalei pozitive şi ca modul măsurat în unităţi de lungime modulul — deci aria — elementului plan considerat.

Dacă notăm cu $\overline{n}$ versorul normalei pozitive, cu S aria elementului, vectorul reprezentativ $\overline{S}$ va avea expresia

$$\overline{S}=S\overline{n}. \qquad (1,II)$$

Această reprezentare, folosită la început în tehnică şi adoptată apoi în Calculul vectorial, permite efectuarea operaţiilor de Algebră vectorială cu elemente plane orientate. Este însă necesar să atragem atenţia în primul rând că *egalarea şi adunarea acestor mărimi cu mărimi vectoriale nu are sens,* date fiind naturile lor fizice diferite.

§ 38. Bivector. Produs vectorial

Vom considera ca *egale* două elemente plane orientate, care au aceeaşi direcţie, aceeaşi orientare şi acelaşi modul.

Două elemente plane orientate vor fi egale dacă se vor găsi în plane paralele, pe feţe care coincid prin translaţie şi dacă, indiferent de forma contururilor lor, vor închide arii egale.

Prin urmare, deformând continuu conturul C, cu condiţia de a păstra neschimbată aria pe care o închide, obţinem elemente plane orientate egale.

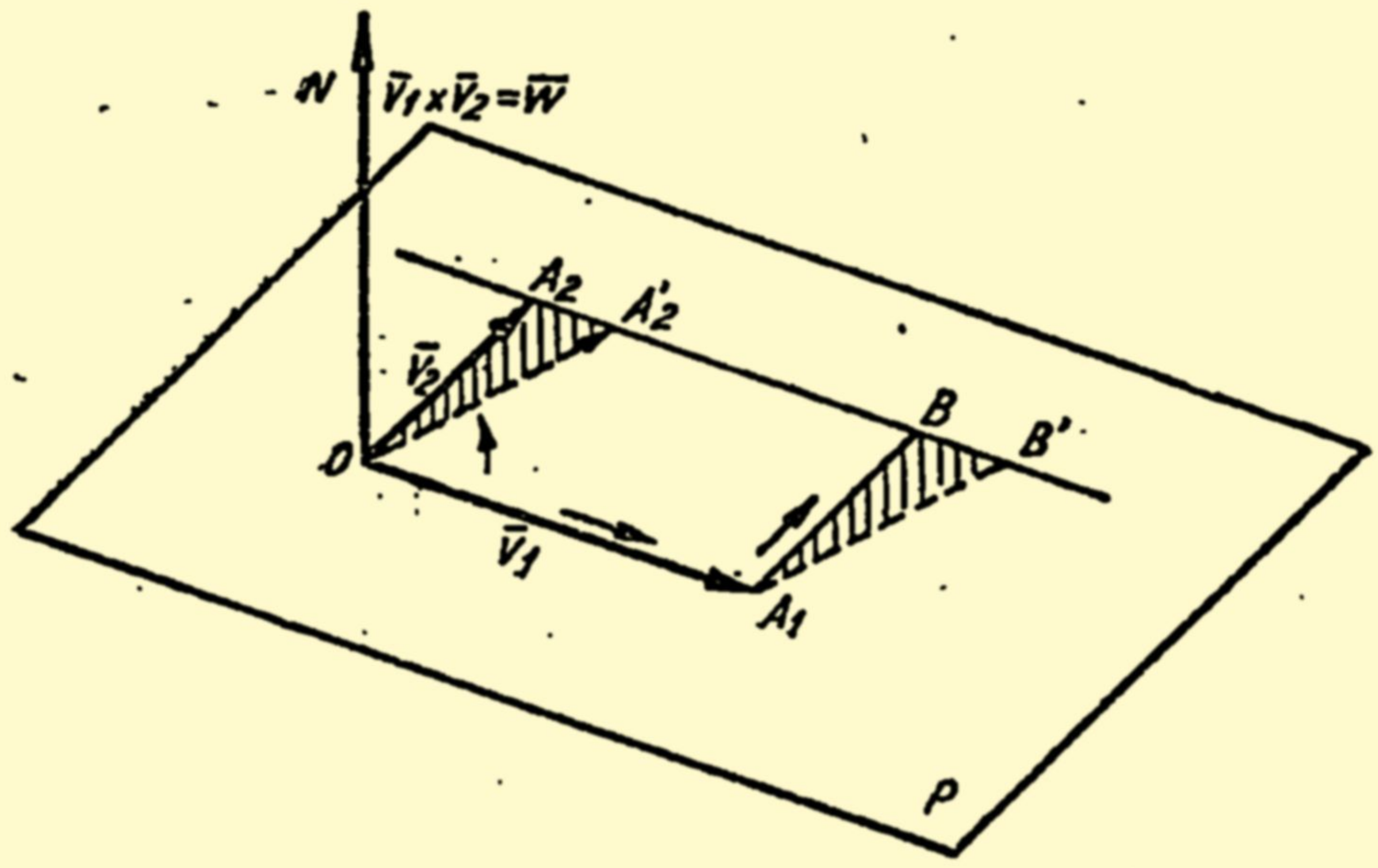


Fig. 28

In particular, putem da conturului C forma unui paralelogram orientat pozitiv. Un astfel de paralelogram se poate obţine cu doi vectori $\overline{V}_1, \overline{V}_2$, necoliniari plasaţi într'un punct O al planului P, cuprinşi în acest plan şi închizând o arie egală cu modulul elementului considerat.

Pentru ca parelelogramul OA_1BA_2 să aibă conturul orientat pozitiv, este necesar şi suficient ca rotaţia laturii $\overline{OA_1}$ spre $\overline{OA_2}$ să se facă în sensul direct (fig 28).

Vom numi *bivector* elementul plan orientat, format de doi vectori necoliniari $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ şi având:

1) *direcţia* planului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$;

2) *orientarea* feţei pe care rotaţia lui $\overline{V}_1$ către $\overline{V}_2$ se face în sens pozitiv (de un unghi $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$);

3) *modulul* egal cu aria paralelogramului format pe $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$.

Facem imediat observaţia că *schimbând ordinea celor doi vectori, bivectorul îşi schimbă sensul.* Vom numi *opuşi* doi bivectori, care diferă numai prin orientare.

Bivectorul obţinut, deplasând extremitatea A_2 a lui $\overline{V}_2$ pe o paralelă la $\overline{V}_1$, este egal cu cel format de $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$.

In adevăr ariile paralelogramelor OA_1BA_2 şi $OA_1B'A_2'$, sunt egale, planele şi orientările fiind deasemenea aceleaşi.

Se vede, deci, că nu numai bivectorii, care se suprapun prin translaţie în acelaşi plan, dar şi cei care închid aceeaşi arie în plane paralele şi orientate la fel sunt egali.

Mulţimea tuturor paralelogramelor orientate corespunzătoare tuturor bivectorilor egali cu un bivector dat formează o clasă şi defineşte o mărime geometrică, reprezentată prin oricare dintre bivectorii cuprinşi în ea. Când definim bivectorul, înţelegem de fapt această mărime abstractă, concretizată prin oricare dintre bivectorii care au o direcţie, o orientare şi un modul date, putând să ocupe o infinitate de poziţii şi să capete o infinitate de forme diferite.

Ca şi vectorul, bivectorul şi, în general, elementul plan orientat sunt noţiuni abstracte, obţinute din eliminarea caracterelor particulare şi păstrarea celor comune unei clase de obiecte concrete.

Vectorul reprezentativ al unui bivector se numeşte *produs vectorial* al vectorilor $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, care definesc acel vector şi se notează

$$\overline{W} = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2. \qquad (2,11)$$

Ţinând seama de convenţia făcută pentru reprezentarea vectorială a elementelor plane orientate, vom putea preciza definiţia dată astfel: produsul vectorial a doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ este un vector

1) *perpendicular* pe planul $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$;

2) *orientat*, astfel încât un observator în picioare, dealungul său, să vadă rotaţia lui $\overline{V}_1$ spre $\overline{V}_2$ în sensul direct, pe drumul cel mai scurt;

3) *de modul* egal cu aria paralelogramului format pe $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$.

Produsul vectorial este un vector liber şi reprezintă bivectorul definit de $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$. Spre deosebire de vectorul asociat unui segment orientat, numit *vector polar*, el se va numi *vector axial.*

Prin rotaţie pe drumul cel mai scurt înţelegem o rotaţie de cel mult 180°.

Aplicaţie. *Să se arate că pentru trei puncte oarecare A, B, C există relaţia*

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{BA} = \overline{CA} \times \overline{CB}.$$

Să se deducă de aici relaţia sinusurilor.

Scanned with OKEN Scanner

Cei trei bivectori sunt egali, deoarece au cele trei elemente: direcţie, sens şi modul egale, aşa cum uşor se poate urmări pe o figură.

Fie a, b, c laturile triunghiului ABC. Egalând expresiile modulelor, vom avea

$$bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C.$$

Impărţind cu abc, obţinem relaţia sinusurilor

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

*§ 39. Dublul strat şi vectorul covariant

Elementele plane orientate sunt mărimi geometrice asociate unor obiecte geometrice, în speţă unor plane considerate ca având două feţe distincte. In cazul bivectorului, precizarea feţei pozitive se face prin conturul orientat C^- al paralelogramului $(\overline{V}_1\ \overline{V}_2)$, deci printr'un element geometric. In cazul dublului strat, această determinare a orientării a fost făcută folosind imaginea fizică a unui fenomen cu două aspecte opuse.

Pentru a avea un criteriu de natură geometrică, vom considera dublul strat ca o mărime geometrică asociată unei perechi orientate de plane, deci unui biplan, ale cărui plane sunt confundate: faţa pozitivă va fi faţa vizibilă a planului final.

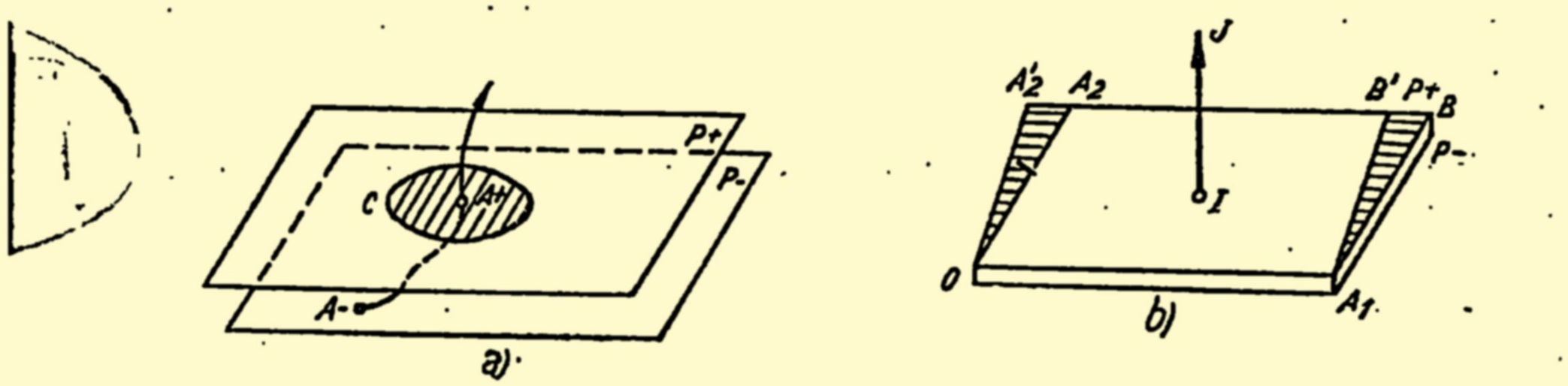


Fig. 29

Fig. 29 *a* reprezintă un dublu strat, ca mărime asociată perechii de plane P^-, P^+, paralele, a căror depărtare tinde la zero. Pe planul final P^{+-} este desenat un contur simplu C, neorientat, având o arie dată, măsurată cu unitatea de arie din planul P^+. Pentru simplificare, conturul C poate fi luat sub forma unui paralelogram OA_1BA_2 neorientat, desenat pe faţa pozitivă P^+ (sau $OA_1B'A_2'$, obţinut prin deplasarea vârfurilor cu conservarea ariei) (fig. 29 *b*).

Pentru a asocia o mărime acestui obiect geometric, vom considera mulţimea tuturor acestor figuri şi o vom împărţi în clase disjuncte. Două perechi de plane (P^-, P^+) (Q^-, Q^+) sunt echivalente dacă sunt paralele şi dacă paralelogramele respective au aceeaşi arie (sau sunt echivalente, în termenii folosiţi chiar în geometrie).

Mărimea caracteristică asociată unei clase de perechi de plane confundate (P^-, P^+) se numeşte *dublu strat*. Numele său corespunde şi în definiţia geometrică figurii geometrice căreia i se asociază.

Scanned with OKEN Scanner

Două duble straturi sunt egale când sunt asociate aceleiaşi clase, deci când se deduc unul din altul prin translaţie, iar paralelogramele sunt de arii egale.

Intre obiectele geometrice, care au condus la noţiunile de vector covariant şi dublu strat, există o mare asemănare. Totuşi, mărimile obţinute sunt de specii deosebite din cauză că *relaţiile de echivalenţă sunt distincte.* Operaţia geometrică, prin care se compară biplanele este translaţia, pe când în cazul perechilor de plane confundate (P^-, P^+), pe lângă translaţie, mai intervin şi operaţiile elementare asupra ariilor, ca deplasarea unui vârf pe o paralelă la una dintre laturi, reducerea uneia dintre laturi şi amplificarea celeilalte cu acelaşi factor, etc.

Se vede că *definiţia atât a dublului strat, cât şi a bivectorului ca mărimi, implică pe aceea a ariei ca mărime măsurabilă asociată figurilor dintr'un plan.* Asupra acestei mărimi vom reveni ulterior pentru a nu îngreuia expunerea, ţinând seama că atât noţiunea de arie, cât şi cea de volum sunt cunoscute din geometria elementară. Totuşi, aprofundarea lor, pe baza teoriei mărimilor geometrice este necesară pentru o înţelegere mai complectă a mărimilor fizice legate de ele. Ariile asociate bivectorilor sunt *orientate* în planele respective, pe când cele asociate dublelor straturi *nu sunt orientate.*

Din punct de vedere geometric, un dublu strat fiind un caz limită de biplan, ne putem pune *problema de a asocia vectorul covariant deasemenea, unei perechi de plane confundate* sau, în alţi termeni, unui plan orientat. Prin aceasta am obţine o imagine geometrică a vectorului covariant mai simplă decât biplanul orientat.

Este o problemă inversă celor puse până în prezent şi consistă în *concretizarea unei mărimi geometrice abstracte prin asocierea sa unui obiect geometric.*

Aria interceptată de un cilindru de volum dat, ale cărui generatoare au o direcţie oarecare, pe feţele unui biplan, este invers proporţională cu lungimea A_1A_2 a acestor generatoare. Măsura, atât a volumelor, cât şi a lungimilor şi ariilor poate fi făcută cu unităţi independente unele de altele, fără ca această proprietate să fie modificată (fig. 30).

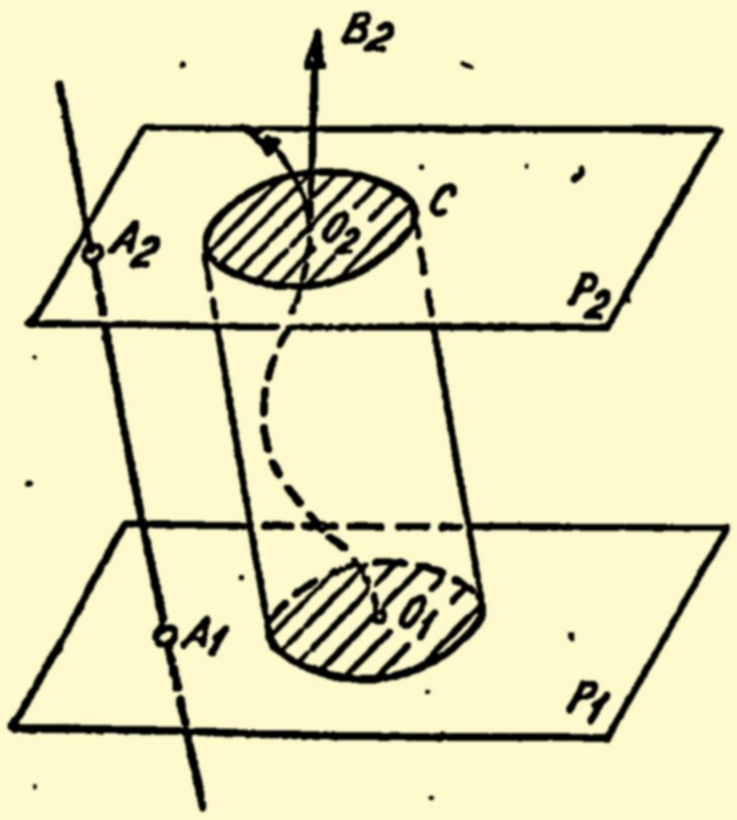


Fig. 30

Dacă alegem o unitate de volum în spaţiu şi o unitate de lungime pe direcţia $\overline{A_1A_2}$, cilindrul de volum unitate, având generatoarele paralele cu $\overline{A_1A_2}$, va intercepta pe biplanul unitate, paralel cu (P_1, P_2), o arie pe care o putem alege ca unitate de arie pentru toate planele paralele cu (P_1, P_2). In acest caz, *aria interceptată de cilindrul de volum unitate pe biplanul* (P_1, P_2) *va avea ca măsură* $\frac{1}{A_1A_2}$, *deci tocmai măsura vectorului covariant asociat acestui biplan pe direcţia* $\overline{A_1A_2}$.

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, fiind dați doi cilindri de același volum și având generatoarele paralele, ariile bazelor sunt invers proporționale cu lungimile generatoarelor (sau cu măsurile lor în spațiul afin). Vom avea deci

$$\frac{A}{1} = \frac{1}{A_1A_2},$$

unde A este măsura ariei bazei cilindrului unitate, de generatoare $\overline{A_1A_2}$.

Cum măsura acestei arii va fi proporțională cu volumul ales ca unitate, pentru a avea o măsură independentă de unitatea de volum, va trebui să raportăm aria la volum.

Vom putea reprezenta vectorul covariant printr'un plan cu două fețe, având pe fața pozitivă o arie delimitată de un contur simplu. Măsura sa în specia tuturor vectorilor covarianți, paraleli cu el, va fi raportul dintre aria delimitată de C și unitatea de volum și va avea dimensiunea inversei unei lungimi măsurate pe o direcție oarecare. Toate aceste precauțiuni sunt luate din cauză că în spațiul afin nu este definită lungimea unui segment oarecare.

Prin această reprezentare, obținem o imagine mai simplă a vectorului covariant, foarte apropiată de aceea a dublului strat. Deosebirea din punct de vedere al teoriei obiectelor geometrice nu există, dar din punct de vedere al teoriei mărimilor geometrice ea este clară: *pe când dublul strat este măsurat printr'o arie, vectorul covariant este măsurat prin raportul unei arii la un volum.* Această deosebire distinge aceste două mărimi una de alta și este pusă în evidență prin schimbarea unităților de măsură. Când vom substitui mărimilor măsurile lor, această deosebire va conduce la un criteriu de recunoaștere, atât a dublului strat cât și a vectorului covariant, independent de orice reprezentare geometrică.

Deocamdată, vom face observația că *reprezentarea vectorului covariant printr'o pereche de plane confundate ne permite să asociem o mărime unui plan oarecare din spațiu; mai corect, unei direcții oarecare de plane din spațiu, având o față pozitivă determinată.*

* § 40. Vectori normali reprezentativi ai mărimilor geometrico-fizice

In reprezentarea vectorială a elementelor plane orientate, am ales ca vector reprezentativ un vector normal la elementul considerat. Prin aceasta am utilizat implicit, pe lângă axiomele ce stau la baza spațiului afin, pe cele necesare pentru a defini distanța dintre două puncte și unghiul a două direcții. Mărimile considerate sunt, însă, independente de această reprezentare, care nu constitue decât un mijloc mai simplu de a le da o imagine concretă în spațiul euclidian. Am folosit, dealtfel, aceeași idee pentru a da o reprezentare mai simplă vectorului covariant printr'un singur plan orientat.

Pentru ca această reprezentare să aibă o semnificație pentru mărimile reprezentate, nu este suficient să substituim o figură alteia, ci trebue ca mărimile reprezentative să înlocuiască pe cele reprezentate în toate operațiile. Va trebui deci să dovedim că vectorul normal la elementele plane orientate, bivector și dublu strat, poate înlocui aceste mărimi, atât în relația de egalitate, cât și în operația de compunere. Prin aceasta *vom putea introduce, în cadrul Calculului vectorial, bivectorul și dublul strat sub forma de vectori reprezentativi.*

Scanned with OKEN Scanner

Deasemenea, vom putea reprezenta vectorul covariant printr'un vector contravariant $\overline{O_2B_2}$ (fig. 30):

1) *normal* la cele două plane ale biplanului (P_1, P_2);
2) *orientat* dela planul iniţial P_1 spre cel final P_2;
3) *de modul* egal cu inversul distanţei dintre planele P_1 şi P_2.

In cazul când vectorul covariant este reprezentat prin două plane suprapuse, ca dublul strat, vectorul reprezentativ normal va fi orientat de partea feţei pozitive şi va avea ca modul raportul dintre aria închisă de conturul C şi volumul unitate, deci inversul unei distanţe.

Este necesar să facem distincţie între vectorii reprezentativi ai mărimilor orientate prin ordonarea a două puncte sau a două plane şi ai mărimilor orientate prin rotaţie sau circulaţie pe un contur.

Vectorii reprezentativi ai mărimilor asociate unui bipunct sau unui biplan orientat, se numesc *vectori polari*. Vectorul contravariant, vectorii reprezentativi ai unui dublu strat şi ai unui vector covariant sunt polari. Exemple: viteza, câmpul electrostatic, forţa hidrostatică, etc.

Vectorii reprezentativi ai mărimilor asociate unui element plan orientat printr'un sens de rotaţie sau circulaţie, se numesc *vectori axiali*. Produsul vectorial este un vector axial şi reprezintă un bivector. Orientarea vectorilor axiali depinde de sensul ales pentru rotaţia sau circulaţia pozitivă.

Exemple: cuplurile de forţe, vectorul lui Umov—Poynting

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi} \overline{E} \times \overline{H}.$$

§ 41. Adunarea bivectorilor

Pentru a defini adunarea bivectorilor vom considera întâi cazul particular (fig. 31), când cei doi bivectori S_1 şi S_2 au aceeaşi direcţie şi aceeaşi orientare. Deoarece putem da oricând unui bivector forma unui paralelogram având laturile paralele cu două direcţii oarecare din planul său, vom putea face ca S_1 şi S_2 să aibă o latură comună şi una în prelungire, astfel încât suma $S_1 + S_2$ să fie tot un bivector, reprezentat printr'un paralelogram obţinut prin alipirea lui S_2 la S_1. Vectorii reprezentativi $\overline{S}_1$ şi $\overline{S}_2$ fiind paraleli şi de acelaşi sens se vor aduna ca două segmente orientate şi vom putea scrie

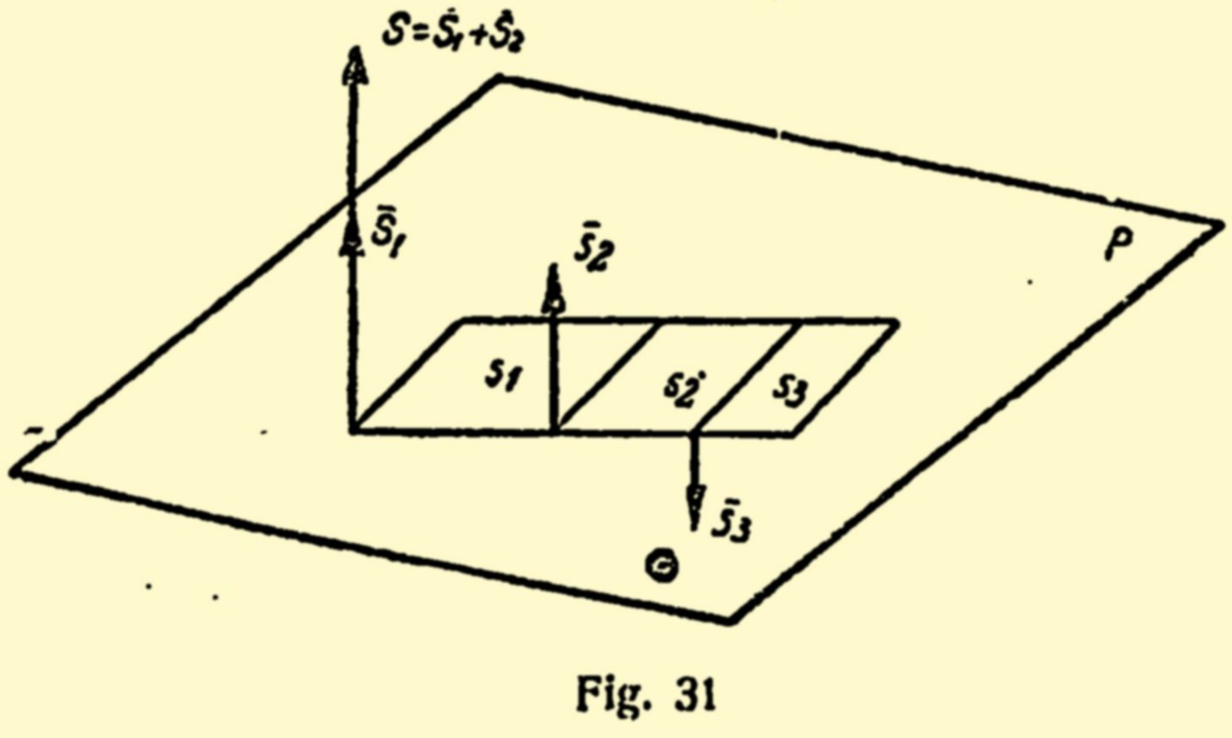


Fig. 31

$$S = S_1 + S_2; \quad \overline{S} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2. \qquad (3,II)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu alte cuvinte, *suma a doi bivectori S_1 şi S_2 de aceeaşi direcţie şi orientare este un bivector având direcţia şi orientarea lui S_1 şi S_2, iar ca modul suma modulelor.*

Această adunare se poate face prin alipirea a două paralelograme cu laturile paralele, având o latură comună, iar bivectorul sumă este paralelogramul astfel obţinut. Acest mod de adunare corespunde adunării segmentelor pe o dreaptă şi se extinde imediat şi la cazul bivectorilor de sensuri opuse. Vom putea construi, de exemplu, suma

$$S_1+S_2+(-S_3)=S_1+S_2-S_3.$$

Prin analogie cu vectorul nul, vom putea defini *bivectorul* nul. Dealtfel, adunarea acestor bivectori particulari corespunde în totul adunării segmentelor orientate pe o dreaptă.

In cazul general, fiind daţi doi bivectori de direcţii diferite S_1 şi S_2, vom căuta să definim suma lor tot ca un bivector extinzând regulile triunghiului şi paralelogramului.

Fie Δ direcţia dreptei de intersecţie a planelor S_1 şi S_2. Vom construi două paralelograme având o latură comună $\overline{OI}=\overline{V}$ paralelă cu Δ şi reprezentând cei doi bivectori S_1 şi S_2 (fig. 32).

Fie $\overline{OA_1}=\overline{V}_1$ şi $\overline{OA_2}=\overline{V}_2$ cei doi vectori care, împreună cu $\overline{V}$, definesc pe S_1 şi S_2:

$$S_1=(\overline{V}, \overline{V}_1);\quad S_2=(\overline{V}, \overline{V}_2).$$

Dacă deplasăm pe S_2 lipindu-l de S_1 de-a lungul muchiei $\overline{A_1B_1}=\overline{V}$, va trebui să se poată trece de pe faţa S_1 pe faţa S_2, traversând muchia comună $\overline{A_1B_1}$.

Aceasta revine la a spune că, dacă bivectorii S_1 şi S_2 au ca muchie comună pe $\overline{OI}$, faţa S_1 se aşterne pe S_2 prin rotaţie în jurul lui $\overline{OI}$, de unghi mai mic decât π.

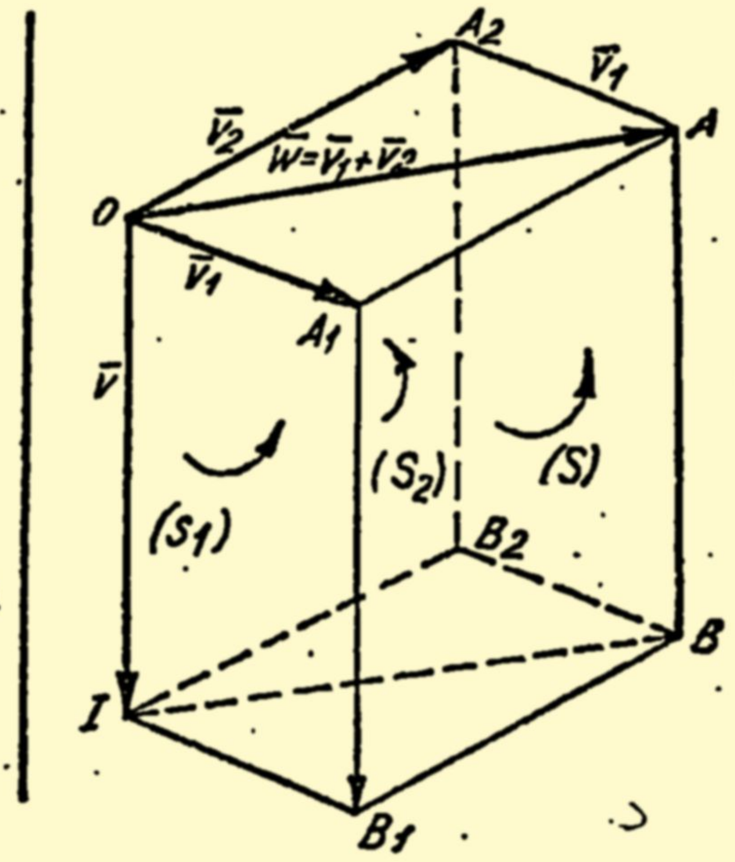


Fig. 32

Cu aceste convenţii de orientare spunem că:

Suma bivectorilor S_1 şi S_2 este bivectorul S, determinat de vectorul $\overline{V}=\overline{OI}$ şi vectorul $\overline{OA}=\overline{V}_1+\overline{V}_2=\overline{W}$.

El este: fie un element plan care trece prin muchia diedrului format de S_1 şi S_2 şi prin diagonala paralelogramului $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, fie un element plan care formează cu S_1 şi S_2 o prismă triunghiulară.

Se demonstrează uşor că această definiţie a adunării nu depinde de modul particular în care am ales vectorii $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ nici de lungimea lui $\overline{V}$, când figurăm cei doi bivectori S_1 şi S_2. (Exerciţiu).

Adunarea bivectorilor este o operaţie geometrică, analoagă cu adunarea vectorilor la care, dealtfel, se reduce. Se poate demonstra că ea este comu-

Scanned with OKEN Scanner

tativă şi asociativă. Produsul unui bivector printr'un scalar şi combinaţia liniară bivectorială sunt operaţii uşor de definit prin analogie cu vectorii şi conduc la noi bivectori. (Exerciţiu).

Aplicaţie. *Să se arate că suma feţelor laterale ale unei prisme, toate orientate în acelaşi sens, este nulă.*

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ vârfurile poligoanelor de bază. Orientarea feţelor în acelaşi sens se realizează fie prin condiţia ca vectorii, care reprezintă bivectorii să fie dirijaţi spre exteriorul prismei (sau toţi spre interior), fie reprezentând feţele orientate prin $\overline{A_iB_i} \times \overline{A_iA_{i+1}}$ pentru $i=1,2,\ldots, n-1$, iar pentru $i=n$, prin $\overline{A_nB_n} \times \overline{A_nA_1}$.

Să observăm că $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \cdots = \overline{A_nB_n}$. Notând cu $\bar{u}$ valoarea comună a acestor vectori, suma feţelor laterale orientate se va scrie:

$$S = \bar{u} \times \overline{A_1A_2} + \bar{u} \times \overline{A_2A_3} + \cdots + \bar{u} \times \overline{A_nA_1}.$$

Această proprietate rezultă imediat pentru o prismă triunghiulară de bază $A_1A_2A_3$. In adevăr, în acest caz

$$\overline{S} = \bar{u} \times \overline{A_1A_2} + \bar{u} \times \overline{A_2A_3} + \bar{u} \times \overline{A_3A_1},$$

unde

$$\overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}.$$

Deci

$$\bar{u} \times \overline{A_1A_2} + \bar{u} \times \overline{A_2A_3} = \bar{u} \times \overline{A_1A_3} = -\bar{u} \times \overline{A_3A_1} \quad \text{şi} \quad \overline{S} = 0,$$

folosind numai definiţia sumei bivectoriale.

Dacă baza prismei este un poligon convex, vom desface prisma în prisme triunghiulare de baze $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5, \ldots, A_1A_{n-1}A_n$, unind A_1 cu celelalte vârfuri ale poligonului. Suma ariilor laterale ale acestor prisme este nulă:

$$(\bar{u} \times \overline{A_1A_2} + \bar{u} \times \overline{A_2A_3} + \bar{u} \times \overline{A_3A_1}) + (\bar{u} \times \overline{A_1A_3} + \bar{u} \times \overline{A_3A_4} + \bar{u} \times \overline{A_4A_1}) +$$
$$+ \cdots + (\bar{u} \times \overline{A_1A_{n-1}} + \bar{u} + \overline{A_{n-1}A_n} + \bar{u} \times \overline{A_nA_1}) = 0.$$

In virtutea proprietăţii de asociativitate a sumei bivectorilor vom putea reduce termeni ca $\bar{u} \times \overline{A_3A_1}$ cu $\bar{u} \times \overline{A_1A_3}$ etc. şi vom obţine $\overline{S} = 0$.

In cazul când baza prismei este un poligon care prezintă concavităţi, vom descompune poligonul în poligoane convexe şi deci în prisme pentru care $\overline{S} = 0$.

Feţele introduse de noi, când am făcut descompunerea, vor apare în $\overline{S}$ de două ori, odată cu un sens şi apoi cu sensul opus, şi în virtutea proprietăţii de asociativitate se vor putea reduce. Mai departe vom generaliza această teoremă pentru cazul unui poliedru oarecare.

Observaţie. Folosind rezultatele acestei aplicaţii se poate deduce cu uşurinţă următoarea proprietate:

Suma vectorilor perpendiculari pe laturile unui poligon, conţinuţi în planul poligonului şi proporţionali cu laturile respective, este nulă.

§ 42. Operaţii vectoriale metrice

Reprezentarea bivectorilor prin vectori implică posibilitatea de a înlocui în aceste operaţii bivectorii prin vectori reprezentativi. Observăm însă, dela început, că însăşi construcţia geometrică a vectorului produs vectorial presupune folosirea unghiurilor drepte. Ori, în algebra liniară vectorială nu am folosit nici noţiunea de unghi, nici compararea lungimilor măsurate în direcţii diferite, care nici nu sunt definite în spaţiul afin.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a putea defini produsul vectorial, este necesar să introducem în calcule noțiunile de unghi a două direcții și de lungime a unui segment oarecare din spațiu. Aceste noțiuni geometrice se numesc *metrice*, fiindcă implică măsura lungimilor și compararea măsurilor în toate direcțiile spațiului.

Produsul vectorial este o operație geometrică prin care obținem un vector folosind noțiuni metrice. Această operație geometrică are proprietăți, care, exprimate simbolic, o apropie de produsele algebrice în unele privințe, ceeace ne permite să o introducem în Algebra vectorială ca o operație nouă, în care intervin însă, noțiuni geometrice metrice.

Vom numi *operație vectorială metrică* orice operație vectorială în care intervin noțiuni sau operații geometrice metrice.

Produsul vectorial este o operație de acest tip. Un alt exemplu este proiecția unui vector pe o direcție, operație impusă de Mecanică. In adevăr, se știe că dacă un punct material este obligat să se miște într'o anumită direcție sub acțiunea unei forțe având o altă direcție, deplasarea sa se face ca și cum ar fi solicitat de o forță reprezentată prin proiecția ortogonală a celei date pe direcția de deplasare.

Proprietățile produsului vectorial.

Presupunând că știm să măsurăm orice lungime și orice unghi, vom putea calcula numeric orice arie. In aceste condiții, *adunarea bivectorilor revine la adunarea vectorilor axiali, prin care îi reprezentăm convențional.*

Fie doi bivectori S_1 și S_2 având modulele respectiv s_1 și s_2.

Putem să-i reprezentăm prin două dreptunghiuri, care au ca latură comună intersecția planelor lor și să dăm acestei laturi $\overline{A_1B_1}$ o lungime egală cu unitatea (fig. 33).

Fie $\overline{V}=\overline{OI}=\overline{A_1B_1}$ și să notăm cu $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ ceilalți doi vectori ce definesc pe S_1 și S_2. Vom scrie: $S_1=(\overline{V}, \overline{V}_1)$, $S_2=(\overline{V}, \overline{V}_2)$ și $S=(\overline{V}, \overline{V}_1+\overline{V}_2)$, unde $S=S_1+S_2$ este suma celor doi bivectori dați, Să observăm că modulele s_1 și s_2 vor fi egale chiar cu modulele V_1 și V_2 ale vectorilor $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$.

Dacă notăm cu $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ și $\overline{W}$ vectorii reprezentativi ai bivectorilor S_1, S_2 și S, aceștea sunt produsele vectoriale:

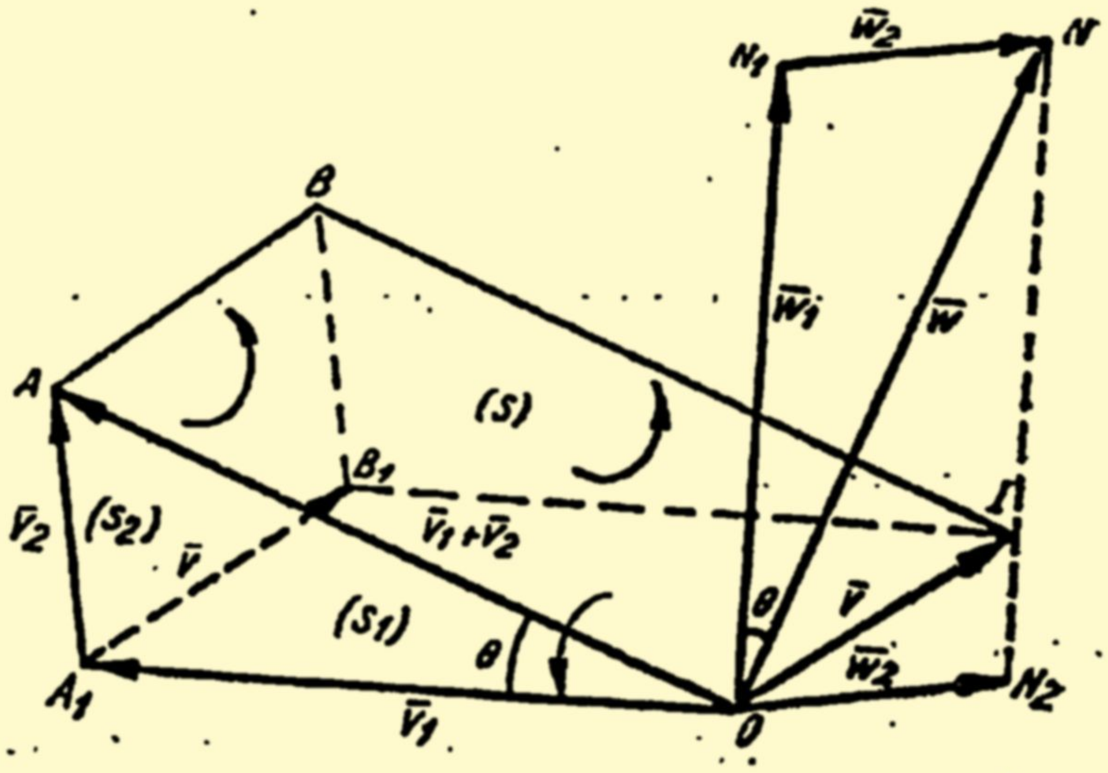


Fig. 33

$$\overline{W}_1=\overline{V}\times\overline{V}_1=\overline{ON}_1,\quad \overline{W}_2=\overline{V}\times\overline{V}_2=\overline{ON}_2,$$

$$\overline{W}=\overline{V}\times(\overline{V}_1+\overline{V}_2)=\overline{ON}; \qquad (4,11)$$

perpendiculare pe planele bivectorilor respectivi.

Scanned with OKEN Scanner

Produsul vectorial $\overline{W}_1$ este un vector perpendicular pe planul S_1, deci şi pe $\overline{V}=\overline{OI}$, iar modulul său fiind egal cu aria s_1, va fi egal cu V_1. Aceasta înseamnă că $\overline{W}_1$ se obţine rotind pe $\overline{V}_1$ cu 90° în jurul lui $\overline{OI}$. Deasemenea $\overline{W}_2$ şi $\overline{W}$ se obţin rotind pe $\overline{V}_2$, respectiv $\overline{V}_1+\overline{V}_2$ cu 90° în acelaşi sens şi în jurul aceleiaşi axe. Deducem deci că triunghiurile A_1OA şi N_1ON sunt egale şi au laturile perpendiculare; deci

$$\overline{W}=\overline{W}_1+\overline{W}_2. \tag{5,II}$$

Aceasta înseamnă că *putem reduce adunarea bivectorilor la adunarea produselor vectoriale reprezentative.*

Operaţia este valabilă şi în cazul când $\overline{V}$, $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ sunt oarecare, deoarece produsele vectoriale nu depind de modul particular în care reprezentăm bivectorii.

Ţinând seama de (4,II), formula (5,II) devine:

$$\overline{V}\times(\overline{V}_1+\overline{V}_2)=\overline{V}\times\overline{V}_1+\overline{V}\times\overline{V}_2, \tag{6,II}$$

deci: *produsul vectorial este distributiv.*

Această proprietate ne îndeamnă să considerăm operaţia geometrică prin care se construeşte produsul vectorial ca o operaţie algebrică simbolică.

Produsul vectorial este *anticomutativ*, adică:

$$\overline{V}_2\times\overline{V}_1=-\overline{V}_1\times\overline{V}_2. \tag{7,II}$$

In adevăr, schimbând ordinea factorilor se schimbă orientarea bivectorului.

Inmulţirea unui produs vectorial cu un scalar este *asociativă*:

$$\lambda(\overline{V}_1\times\overline{V}_2)=\lambda\overline{V}_1\times\overline{V}_2=\overline{V}_1\times\lambda\overline{V}_2. \tag{8,II}$$

Aplicaţia 1. *Ca exerciţiu să demonstrăm prin calcul relaţia*

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{BA}=\overline{CA}\times\overline{CB}.$$

Vom înlocui $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ şi prima egalitate devine

$$\overline{AB}\times(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{BC}\times\overline{BA}.$$

Produsul vectorial fiind distributiv, vom scrie

$$\overline{AB}\times\overline{AB}+\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{BC}\times\overline{BA}.$$

Ţinând seama că $\overline{AB}\times\overline{AB}=0$, iar

$$\overline{BC}\times\overline{BA}=-\overline{BA}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{BC},$$

prima egalitate este demonstrată.

La fel se procedează pentru a doua.

Aplicaţia 2. *Să arălăm pe cale vectorială că dacă laturile unui triunghi se măresc de k ori, aria triunghiului se măreşte de k^2 ori.*

Aria orientată a triunghiului ABC este $S=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$. Aria noului triunghi va fi

$$\overline{S'}=\frac{1}{2}(k\overline{AB}\times k\overline{AC})=\frac{1}{2}k^2(\overline{AB}\times\overline{AC})=k^2\overline{S}.$$

Ariile neorientate fiind modulele acestor arii, rezultă

$$S'=k^2S.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu θ unghiul format de vectorii $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ (fig. 34) aria paralelogramului OA_1AA_2 este dată de expresia cunoscută $V_1 V_2 \sin\theta$, astfel încât *modulul produsului vectorial* va fi dat de formula

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = V_1 V_2 \sin\theta. \qquad (9,II)$$

Unghiul θ poate varia între 0 și π. Presupunând că $\overline{V}_2$ se rotește în planul bivectorului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ păstrându-și modulul, produsul vectorial este nul pentru $\theta=0$ și $\theta=\pi$, deci:

Produsul vectorial este egal cu vectorul nul când cei doi factori sunt coliniari, sau când unul din ei este nul. In particular, *produsul vectorial al unui vector prin el însuși este nul:*

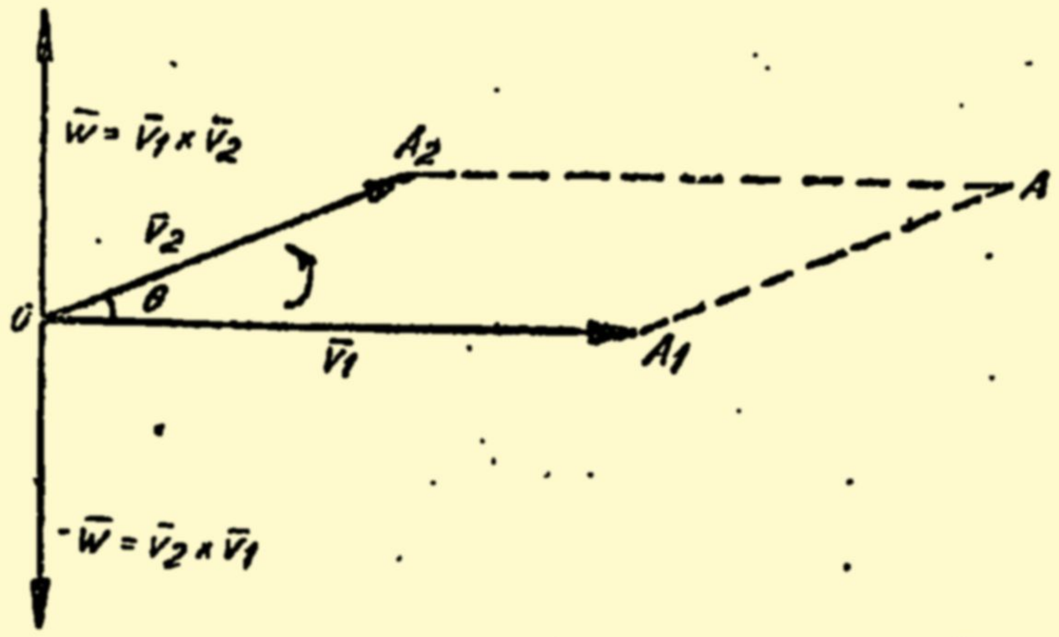


Fig. 34

$$\overline{V} \times \overline{V} = 0. \qquad (10,II)$$

Această proprietate, ca și anticomutativitatea, arată că *produsul vectorial se deosebește de produsul de numere algebrice. El este imagina algebrică a unei operații geometrice prin care construim un vector reprezentativ al unui bivector.*

Din proprietatea (10,II) decurg consecințe care accentuează caracterul simbolic al înmulțirii vectoriale. Astfel, în Algebră, din egalitatea $ab=ab'$ deducem $b=b'$ împărțind în ambii membri cu $a\neq 0$. In Calculul vectorial, din egalitatea a două produse vectoriale

$$\overline{U} \times \overline{V} = \overline{U} \times \overline{V}' \quad (\overline{U} \neq 0) \qquad (11,II)$$

nu deducem obligatoriu $\overline{V} = \overline{V}'$.

In adevăr, avem

$$\overline{U} \times (\overline{V} - \overline{V}') = 0,$$

de unde:

sau $\overline{V} - \overline{V}' = 0$, deci $\overline{V} = \overline{V}'$, sau $\overline{U} \parallel \overline{V} - \overline{V}'$,

deci $\overline{V} - \overline{V}' = \lambda \overline{U}$

unde λ este un parametru scalar.

Dacă egalitatea (11,II) are loc pentru orice vector arbitrar $\overline{U}$, atunci $\overline{V} = \overline{V}'$ în mod obligatoriu.

Raționamentul se face prin reducere la absurd; dacă vectorul $\overline{V} - \overline{V}'$ n'ar fi nul, atunci ar trebui să fie paralel cu orice alt vector $\overline{U}$, deci să aibă toate direcțiile spațiului, ceeace este imposibil. Vom regăsi acest mod de raționament algebrico-geometric și în alte probleme de Calcul vectorial.

Produsul vectorial fiind o operație metrică, ne va servi pentru evaluarea de mărimi. Astfel, din însăși definiția sa rezultă că putem evalua unghiul θ format de doi vectori $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2 \neq 0$ astfel:

$$\sin\theta = \frac{|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2|}{V_1 V_2}; \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \qquad (12,II)$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2| =$ aria $(\overline{V}_1, \overline{V}_2) = V_1 V_2 \sin\theta$.

Deducem pentru $\theta = 0$ *condiția de paralelism a doi vectori:*

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = 0 \qquad (13,II)$$

sub *forma vectorială metrică*. Reamintim că doi vectori paraleli, având aceeași direcție, sunt coliniari și diferă printr'un factor scalar, deci

$$\overline{V}_2 = \lambda \overline{V}_1. \qquad (14,II)$$

Condițiile (13,II) și (14,II) sunt echivalente. Ele exprimă o proprietate geometrică liniară sub două forme diferite : liniară și metrică.

Atragem astfel atenția asupra posibilităților multiple de a exprima aceeași proprietate geometrică sau fizică, pe care le oferă simbolismul Algebrei vectoriale.

Aplicația 3. *Distributivitatea produsului vectorial și adunarea bivectorilor.*

Am ajuns la proprietatea (6,II) de distributivitate a produsului vectorial față de adunarea vectorială arătând că adunării bivectorilor putem face să-i corespundă adunarea produselor vectoriale.

Invers, putem stabili direct că *produsul vectorial este distributiv* față de adunare și arăta că adunarea bivectorilor trebue să se facă după regula impusă.

Pornim dela observația făcută că într'un produs vectorial putem roti unul din factori în planul bivectorului, fără a modifica produsul, deplasându-i extremitatea pe o paralelă la celălalt.

Fiind dați vectorii $\overline{V}$, $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$, vom arăta că

$$\overline{V} \times (\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = \overline{V} \times V_1 + \overline{V} \times \overline{V}_2.$$

Formăm bivectorii: $\overline{V} \times \overline{V}_1$, $\overline{V} \times \overline{V}_2$ și $\overline{V} \times (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)$, pe care îi așezăm astfel, încât să aibă ca muchie comună $\overline{OI} = \overline{V}$ (fig. 35).

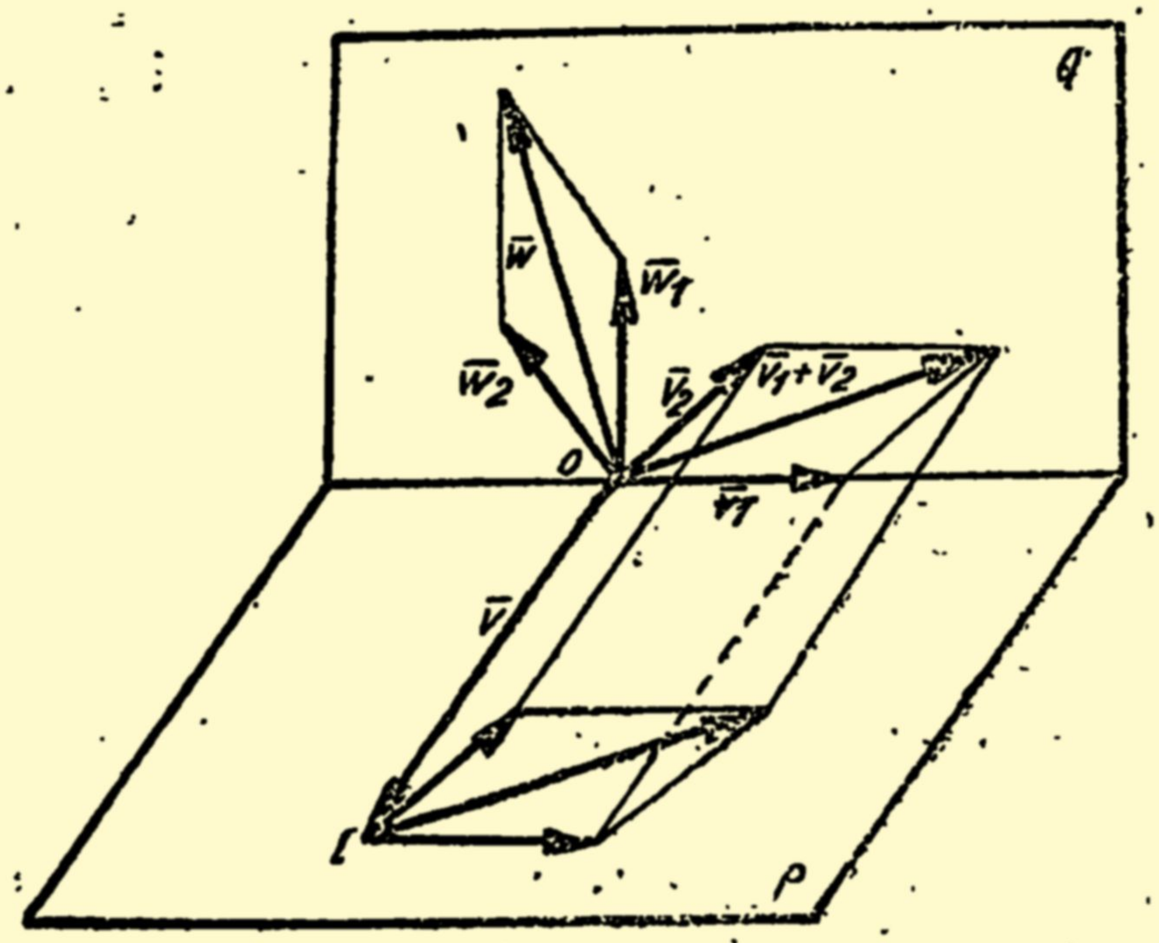


Fig. 35

Rotim pe $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ în planele respective până devin perpendiculari pe $\overline{V}$. Prin aceasta ei formează un plan Q, perpendicular pe $\overline{V}$ și pe planul P al bivectorului $(\overline{V}, \overline{V}_1)$. Alegând ca unitate modulul vectorului V, dreptunghiurile formate de cei trei bivectori vor avea ca arii respectiv $|\overline{V}_1|$, $|\overline{V}_2|$ și $|\overline{V}_1 + \overline{V}_2|$, deci produsele vectoriale $\overline{W}_1 = \overline{V} \times \overline{V}_1$, $\overline{W}_2 = \overline{V} \times \overline{V}_2$, $\overline{W} = \overline{V} \times (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)$ vor avea ca module respectiv $|\overline{V}_1|$, $|V_2|$ și $|\overline{V}_1 + \overline{V}_2|$. Din însăși definiția produsului vectorial rezultă că $\overline{W}_1$ va fi un vector perpendicular pe $\overline{V}$ și $\overline{V}_1$, deci se va obține din $\overline{V}_1$, printr'o simplă rotație de 90° în sensul direct în planul Q. Aceeași observație este valabilă și pentru $\overline{W}_2$ și $\overline{W}$.

Deci, figura formată de $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$, $\overline{W}$ nu este altceva decât figura obținută rotind figura formată de $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ și $\overline{V}_1 + \overline{V}_2$ de 90° în planul Q, adică un paralelogram.

Vom avea prin urmare $\overline{W} = \overline{W}_1 + \overline{W}_2$, de unde deducem distributivitatea produsului vectorial.

Scanned with OKEN Scanner

Dându-se doi bivectori oarecare, reprezentați prin produsele vectoriale respective $\overline{W}_1$ și W_2, suma $\overline{W}=\overline{W}_1+\overline{W}_2$ definește un produs vectorial $\overline{W}$, care corespunde la rândul său unui bivector bine determinat.

Dacă punem: $\overline{W}_1=\overline{V}\times\overline{V}_1$, $\overline{W}_2=\overline{V}\times\overline{V}_2$, vom avea $\overline{W}=\overline{V}\times(\overline{V}_1+\overline{V}_2)$ și vom putea construi acel bivector geometric, numindu-l suma celor doi bivectori dați.

Regula de adunare rezultă din fig. 35 și corespunde celei date anterior:

Se ia pe intersecția planelor celor doi bivectori un vector $\overline{V}$ și se construesc vectorii $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ care determină împreună cu $\overline{V}$ bivectorii dați. Bivectorul determinat de $\overline{V}$ și $\overline{V}_1+\overline{V}_2$ este suma căutată.

Proprietatea produsului vectorial de a fi distributiv justifică reprezentarea bivectorilor prin vectori, deoarece permite reducerea operației de adunare bivectorială la adunarea vectorială. Deasemenea și amplificarea bivectorilor cu scalari se reduce la amplificarea produselor vectoriale cu scalari. Cum fiecărui bivector îi corespunde un produs vectorial, și numai unul, și reciproc, posibilitatea de a reduce operațiile Algebrei liniare vectoriale cu bivectori la operații analoge cu vectori permite substituirea produselor vectoriale în toate problemele în care intervin bivectorii [1]).

§ 43. Exemple de mărimi fizice bivectoriale

1. **Momentul unei forțe în raport cu un punct: bivectorul legat.** In studiul fenomenelor de echilibru și mișcare ale sistemelor de puncte materiale intervine, alături de forță, și o mărime geometrico-fizică, definită de o forță $\overline{F}$ și un punct oarecare O, numită *momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O.*

A fiind punctul de aplicație al forței $\overline{F}$, să notăm cu $\overline{r}$ vectorul $\overline{r}=\overline{OA}$ și cu Δ suportul lui $\overline{F}$ (fig. 36). *Momentul* forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O este bivectorul $\overline{M}$, determinat de vectorii $\overline{r}$ și $\overline{F}$ așezați în O; $\overline{M}=(\overline{r},\overline{F})$. Direcția acestui bivector este aceea a planului determinat de O și Δ, orientarea sa este dată de circulația în sens direct pe conturul $OABC$ sau de rotația pozitivă a lui $\overline{r}$ spre $\overline{F}$, iar modulul său este aria paralelogramului format pe $\overline{r}$ și $\overline{F}$, arie care este egală cu hF, unde $h=OI$ este distanța dela O la suportul Δ.

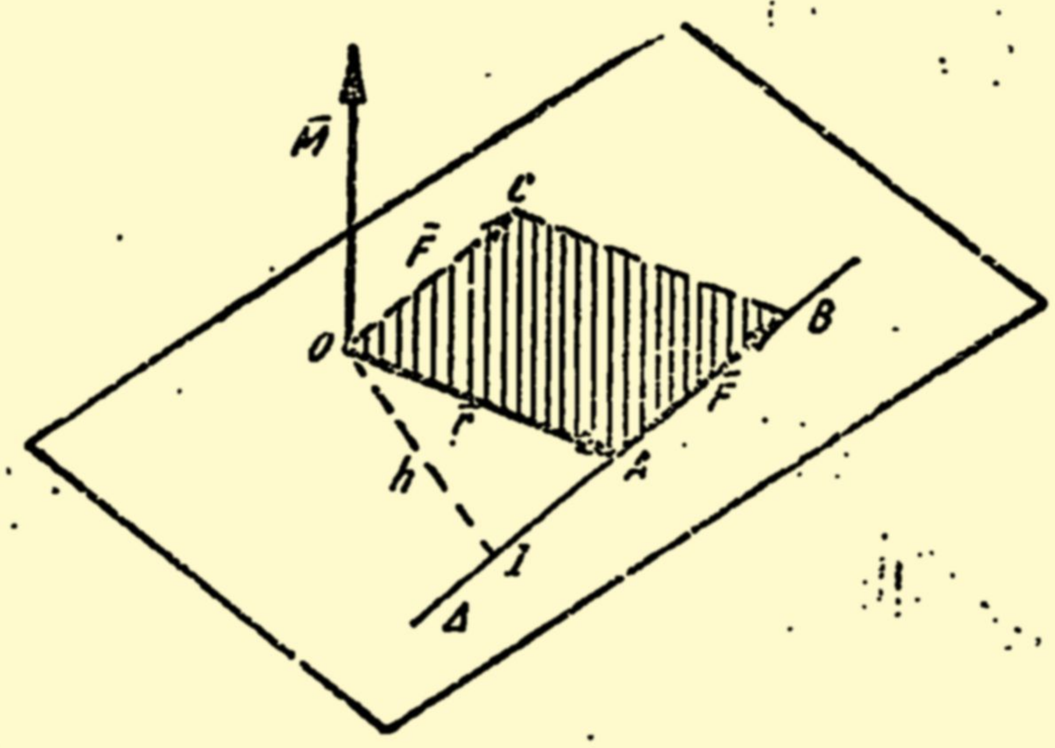


Fig. 36

Momentul este un exemplu de noțiune introdusă la început sub un aspect scalar, fiind definit ca produsul hF dintre forță și distanța dela punctul O la suportul forței.

In mecanică, *bivectorul moment este reprezentat printr'un vector axial legat de punctul O:*

$$\overline{M}=\overline{r}\times\overline{F}, \qquad (15,II)$$

produsul vectorial al vectorului $\overline{r}$ prin vectorul forță $\overline{F}$.

[1]) In cele ce urmează vom nota adesea bivectorii printr'o literă barată ca și vectorii lor reprezentativi pentru a sublinia substituirea unora prin cellalți în calcule.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a ne da seama de generalitatea noțiunii de moment, vom face observația că această mărime nu este asociată unei anumite forțe $\bar{F}$, ci oricărei forțe din planul determinat de punctul O și Δ, pentru care paralelogramul orientat format de $\bar{r}$ și $\bar{F}$ are o arie dată. Toate aceste paralelograme sunt deci echivalente, coplanare și au un vârf comun O. Prin urmare, bivectorul moment nu este asociat clasei *tuturor* elementelor plane orientate echivalente, ci *numai* celor ce îndeplinesc și condițiile geometrice impuse. Momentul este deci o mărime condiționată, *legată de punctul O.*

Vom numi *bivector legat de un punct O* orice bivector (liber) asociat clasei elementelor plane echivalente orientate, situate într'un plan dat și formate de doi vectori $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ legați de punctul O.

Momentul unei forțe F în raport cu un punct O este un bivector legat de punctul O.

Bivectorii legați de un punct O formează o specie de mărimi geometrice, deci atât egalitatea cât și suma lor nu au sens decât pentru bivectorii legați de același punct O. Suma se obține prin adunarea bivectorilor liberi, impunând apoi condiția de a fi legată de punctul O. Această operație are aplicație în statică; la calculul momentului rezultant al unui sistem de forțe în raport cu un punct O.

Momentul este modelul fizic al bivectorului legat și justifică introducerea acestei noțiuni în Calculul vectorial.

2. Cuplul de forțe (bivectorul liber). Un sistem de două forțe paralele, egale și de sensuri opuse se numește *cuplu de forțe*. Acțiunea unui cuplu asupra unui corp solid se manifestă printr'o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul $(\bar{F}, -\bar{F})$, format de cele două forțe. Punctele corpului se rotesc deci în plane paralele cu planul cuplului. Un cuplu este caracterizat prin *momentul* său care este elementul plan orientat, determinat de vectorii forță $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ (fig. 37).

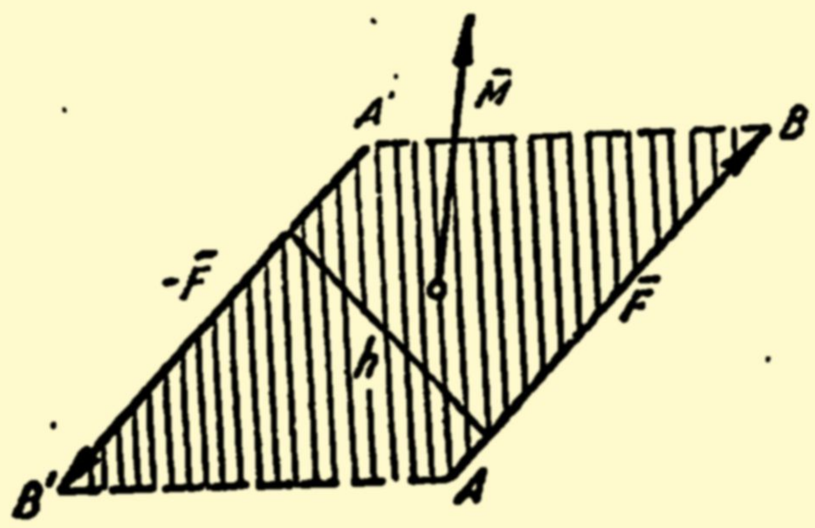


Fig. 37

Acest element plan are ca direcție planul cuplului, având orientarea astfelt încât rotația cuplului să fie pozitivă, iar ca modul—aria paralelogramului forma, de forțele cuplului.

El este reprezentat printr'un vector $\bar{M}$. perpendicular pe planul cuplului, care ia numele de *moment al cuplului*, având orientarea normalei pozitive a elementului plan și modulul egal cu aria paralelogramului $ABA'B'$ sau cu hF, h fiind brațul de pârghie al cuplului.

Se arată dealtfel că *momentul cuplului este egal cu suma momentelor celor două forțe în raport cu un punct oarecare din spațiu.* Putem da o demonstrație imediată acestei proprietăți folosind adunarea bivectorială.

Fie P un punct oarecare din spațiu. Momentul M_1 al forței $\bar{F}$ a cuplului în raport cu P este un bivector legat determinat de P și $\bar{F}$, având ca modul dublul ariei PAB (fig. 38). Ducând prin P un segment $\overline{C'C}$, egal și paralel cu $\overline{AB}$, paralelogramul $ABCC'$ orientat prin sensul lui $\bar{F}$ reprezintă bivectorul $\bar{M}_1$.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Este uşor de văzut că momentul lui $-\overline{F}$ în raport cu P este un bivector $\overline{M}_2$ determinat de paralelogramul $A'B'C'C$, orientat prin $-\overline{F}$.

Aplicând regula de adunare a bivectorilor, avem $\overline{M}_1+\overline{M}_2=\overline{M}$, fiindcă faţa $ABA'B'$ închide prisma triunghiulară formată. Deci: *oricare ar fi punctul P din spaţiu, suma momentelor celor două forţe F şi −F ale cuplului este aceeaşi şi egală cu momentul cuplului.*

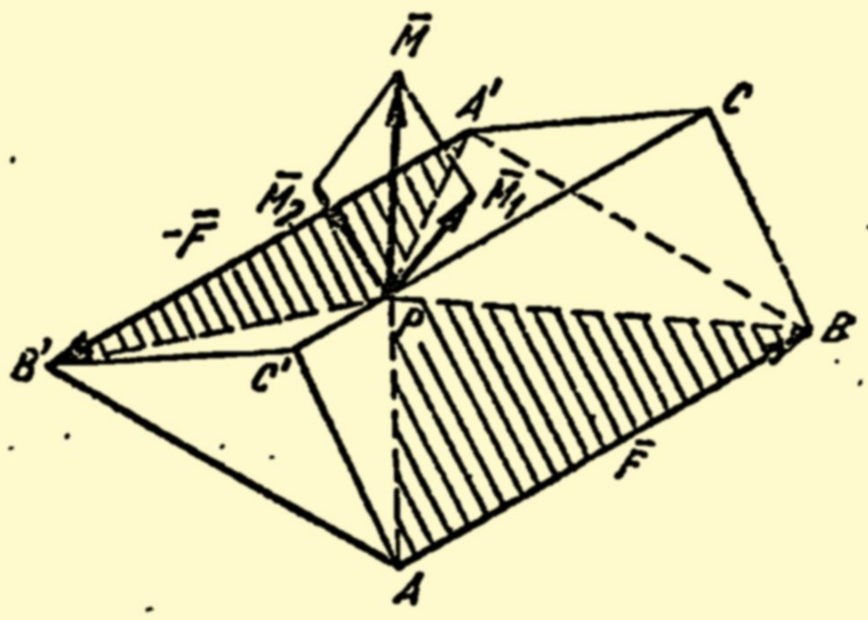


Fig. 38

Această proprietate constitue de fapt interpretarea mecanică a adunării bivectoriale şi poate fi luată ca model fizic pentru regula geometrică de adunare a bivectorilor, după cum compunerea forţelor este modelul fizic care a impus regula de adunare a vectorilor.

Cuplul este modelul fizic al bivectorului (liber), proprietăţile cuplurilor fiind reprezentate geometric prin riproprietăţile bivectorilor: două cupluri sunt echivalente când formează paralelograme de arii egale, în plane paralele şi cu acelaşi sens de rotaţie, cu alte cuvinte când sunt reprezentate de bivectori egali, compunerea cuplurilor se face prin adunarea bivectorilor, etc.

§ 44. Mărimi fizice vectoriale determinate de mărimi bivectoriale

1. Viteza liniară în mişcarea de rotaţie. Mişcarea de rotaţie a unui corp solid sau a spaţiului în jurul unei axe Δ, de versor $\overline{n}$, este determinată când se cunoaşte la fiecare moment unghiul θ făcut de un plan P care trece prin Δ cu un plan fix Q ce trece deasemenea prin Δ.

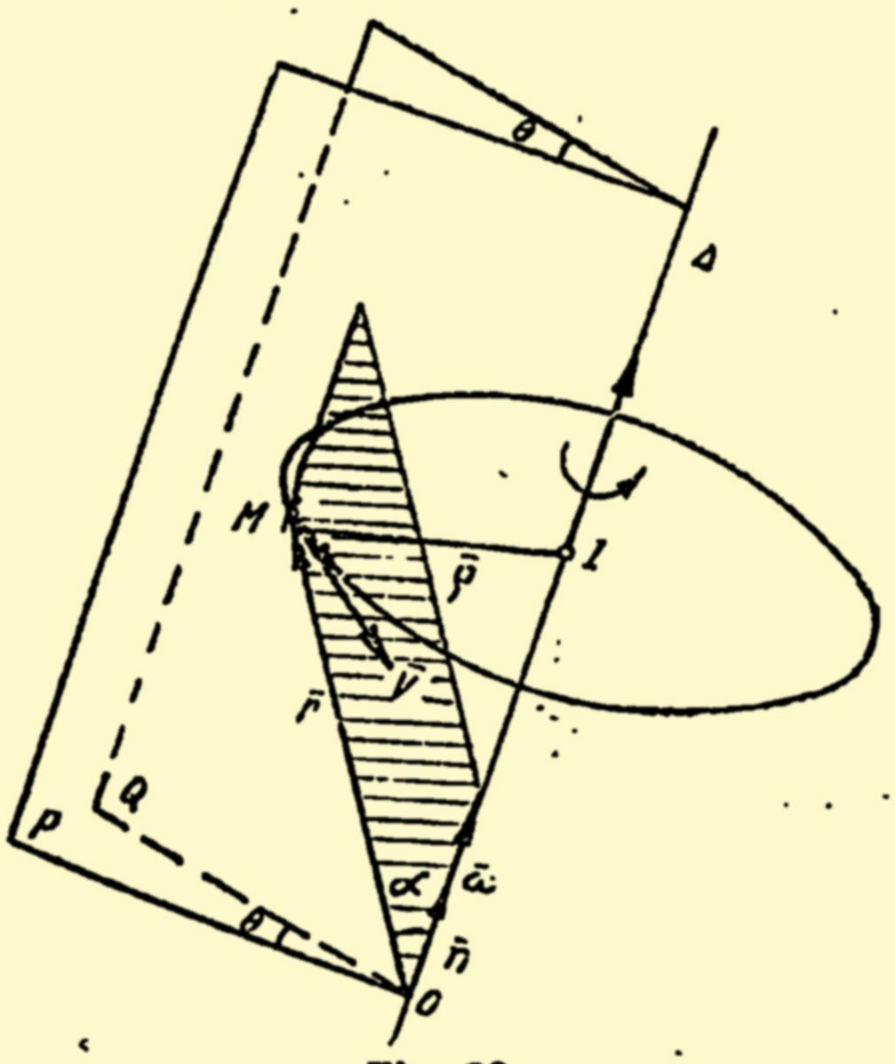


Fig. 39

Dacă M este un punct oarecare al planului P şi dacă alegem un punct de reper O pe axa Δ, poziţia lui M va fi dată de vectorul de poziţie $\overline{r}=\overline{OM}$ (fig. 39).

Să presupunem că rotaţia se face în sensul pozitiv. Poziţia şi faţa pozitivă a planului P vor fi determinate prin bivectorul definit de $\overline{n}$ şi $\overline{r}$.

Viteza liniară a punctului M este un vector tangent la cercul descris de acest punct, având centrul în I şi raza ρ. Se ştie că mărimea acestei viteze este $V=\omega\rho$, unde ω este viteza unghiulară de rotaţie.

Dacă notăm cu α unghiul format de $\overline{n}$ cu $\overline{r}$, vom avea

$$\rho=r\sin\alpha,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$V = \omega r \sin \alpha.$$

Prin urmare, modulul vitezei este aria paralelogramului format de $\bar{r}$ și de un vector $\bar{\omega} = \omega \bar{n}$ așezați în O. Pe de altă parte $\bar{V}$ este perpendicular pe fața pozitivă a planului P, astfel încât puteni scrie

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (16,II)$$

deoarece $\bar{V}$ *apare ca vectorul reprezentativ al bivectorului determinat de* $\bar{\omega}$ *și* $\bar{r}$.

Din aceste considerațiuni reiese că rotația pune în evidență întâi bivectorul $(\bar{n}, \bar{r})$, care determină un plan P în rotație, apoi un al doilea bivector $(\bar{\omega}, \bar{r})$ proporțional cu primul, care determină viteza liniară. Ambii sunt bivectori legați.

Vectorul axial $\bar{\omega}$ caracterizează rotația, deoarece are direcția axei Δ, sensul versorului $\bar{n}$ și mărimea egală cu viteza unghiulară. Cu ajutorul lui se construește viteza oricărui punct M, ca produsul vectorial reprezentativ al bivectorului $(\bar{\omega}, \bar{r})$.

2. **Forța deviatoare într'un câmp magnetic.** Un exemplu analog de mărime vectorială, produsă de un bivector, se prezintă în mișcarea unui electron într'un câmp magnetic $\bar{H}$.

Notând cu e sarcina electrică a electronului, cu $\bar{v}$ vectorul viteză, cu μ coeficientul de permeabilitate magnetică, vectorul inducție magnetică va fi $\bar{B} = \mu \bar{H}$, care este vector axial (fig. 40).

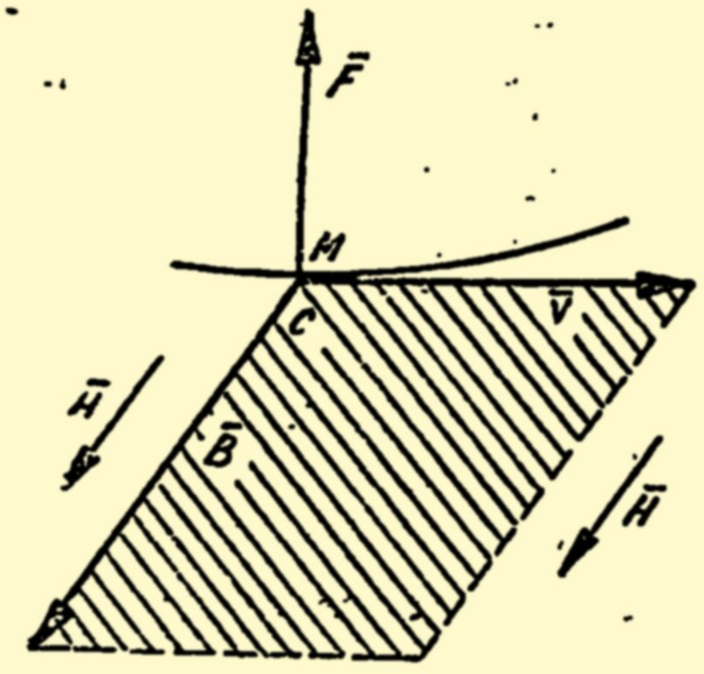


Fig. 40

In absența câmpului magnetic mișcarea s'ar face în linie dreaptă.

Prezența câmpului $\bar{H}$ în mediul de permeabilitate μ produce inducția magnetică măsurată prin mărimea $\bar{B}$.

Inducția magnetică influențează mișcarea producând o deviație, caracterizată prin bivectorul determinat de B și v. Particula în mișcare capătă o accelerație sub acțiunea unei forțe deviatoare F, determinată de bivectorul $(\bar{B}, \bar{v})$ și de sarcina electrică e.

Această forță are expresia (unități electromagnetice sau MKSA)

$$\bar{F} = e(\bar{B} \times \bar{v}) \qquad (17,II)$$

și este deci perpendiculară pe bivectorul $(\bar{B}, \bar{v})$.

In ambele exemple, fenomenul este caracterizat printr'o mărime vectorială, în speță viteza liniară (16,II) sau forța deviatoare (17 II), ambele determinate de câte un bivector, având unul din factori un vector axial. Ulterior vom verifica faptul că prin aceste operații obținem un vector polar. In cazul momentului (15,II) sau al cuplului, mărimile fizice caracteristice erau *chiar bivectori*, reprezentabili prin vectorii axiali respectivi.

Scanned with OKEN Scanner

Legi fizice bivectoriale

Introducerea noţiunii de vector are ca scop sintetizarea printr'un singur simbol a elementelor caracteristice ale unor mărimi fizice sau geometrice şi sintetizarea într'o expresie unică a unor legi (sau consecinţe de legi) fizice.

Când spunem: forţa este egală cu masa înmulţită cu acceleraţia cuprindem în formula $F=m\bar{\gamma}$ caracteristicele geometrico-fizice ale acestei legi, egalitatea fiind înţeleasă în mărime, direcţie şi sens.

Noţiunea de bivector permite deasemenea astfel de sinteze, a căror importanţă este evidentă, cum se va vedea din exemplele următoare:

1. Legile optice ale lui Descartes-Snellius. Fie două medii optice I şi I' transparente, omogene şi isotrope, separate de o suprafaţă S. Când o rază incidentă, de versor $\bar{u}$, întâlneşte suprafaţa S, ea poate trece în celălalt mediu I' refractându-se, sau se reflectă.

Notând cu n şi n' indicii algebrici de refracţie ai celor două medii, avem:

$$n=\frac{\text{vitéza luminii în vid}}{\text{măsura algebrică a vitezei luminii în mediul } I}, \qquad (18,II)$$

măsura fiind negativă dacă sensul propagării este opus versorului direcţiei Orientarea unei raze se face rotind-o de un unghi ascuţit, până se confundă cu normala $\bar{\nu}$ la suprafaţa S, apoi readucând-o în poziţia iniţială.

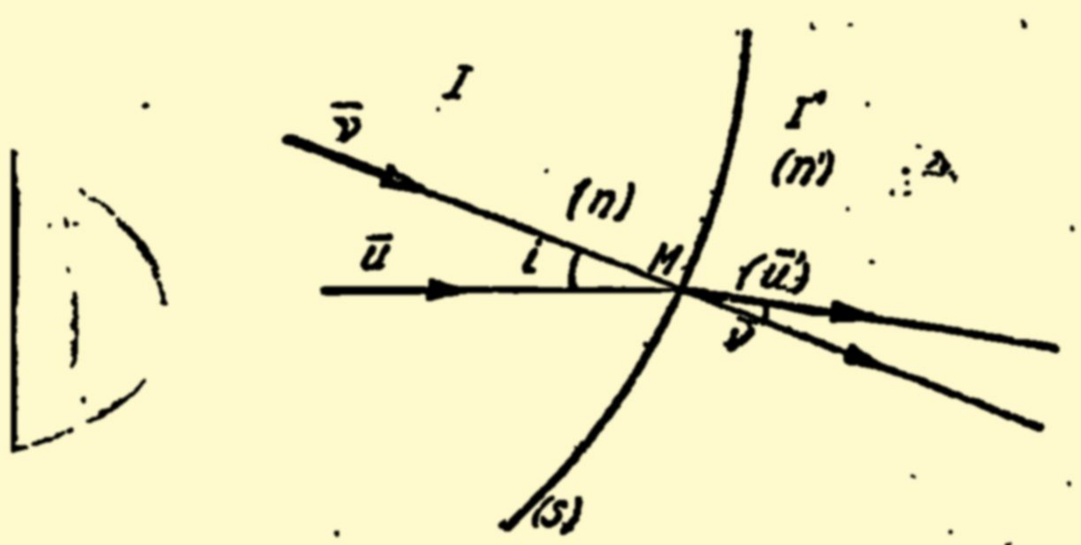


Fig. 41

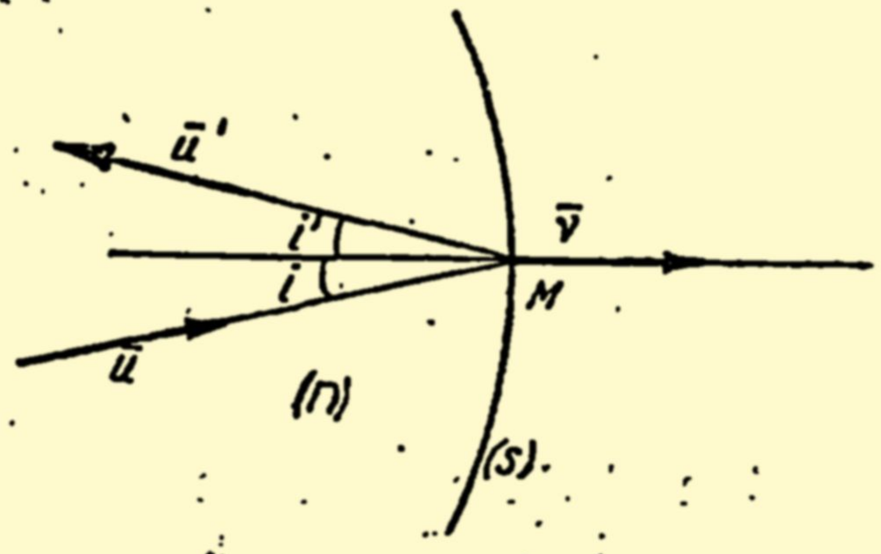


Fig. 42

Fie $\bar{u}$ şi $\bar{u}'$ versorii unei raze incidente şi ai razei refractate (fig. 41), sau reflectate (fig. 42).

Legile lui Descartes-Snellius sunt:

1) Raza refractată este în planul de incidenţă.

2) Între unghiul de incidenţă i şi unghiul de refracţie i' există relaţia sinusurilor

$$|n\sin i|=|n'\sin i_1|. \qquad (19,II)$$

Aceste legi sunt valabile şi în cazul reflexiei, luând $n'=-n$, cum rezultă din definiţia (18,II).

Fenomenul refracţiei pune în evidenţă două plane: de incidenţă şi de refracţie, orientate prin versorii razelor respective şi versorul normalei $\bar{\nu}$. Apar astfel doi bivectori: $(\bar{u},\bar{\nu})$ şi $(\bar{u}',\bar{\nu})$.

Prima lege a lui Descartes-Snellius exprimă faptul că planele acestor doi bivectori coincid.

A doua lege a lui Descartes-Snellius (19,II) arată că ariile formate de vectorii nu şi $\bar{\nu}$, pe deoparte, şi $n'\bar{u}'$ şi $\bar{\nu}$, pe de altă parte, sunt egale.

Scanned with OKEN Scanner

Vom putea sintetiza aceste legi scriind că bivectorii $(n\bar{u}, \bar{v})$ şi $(n'\bar{u}', \bar{v})$ sunt egali, sau trecând la produse vectoriale:

$$n\ (\bar{u} \times \bar{v}) = n'\ (\bar{u}' \times \bar{v}). \qquad (20, II)$$

Această expresie a legilor lui Descartes-Snellius este valabilă şi în cazul reflexiei, cum se poate verifica uşor luând $n' = -n$. Ea exprimă deodată conservarea planului de incidenţă, traversarea normalei de raza refractată sau reflectată şi legea cantitativă a sinusurilor.

Cum întreaga Optică geometrică se poate construi numai pe baza propagării rectilinii a luminii în medii omogene şi pe legile lui Descartes-Snellius, formula bivectorială (20, II) este fundamentală.

2. Legea lui Biot şi Savart. Când un curent parcurge un conductor, el produce în spaţiu un câmp magnetic în orice punct M.

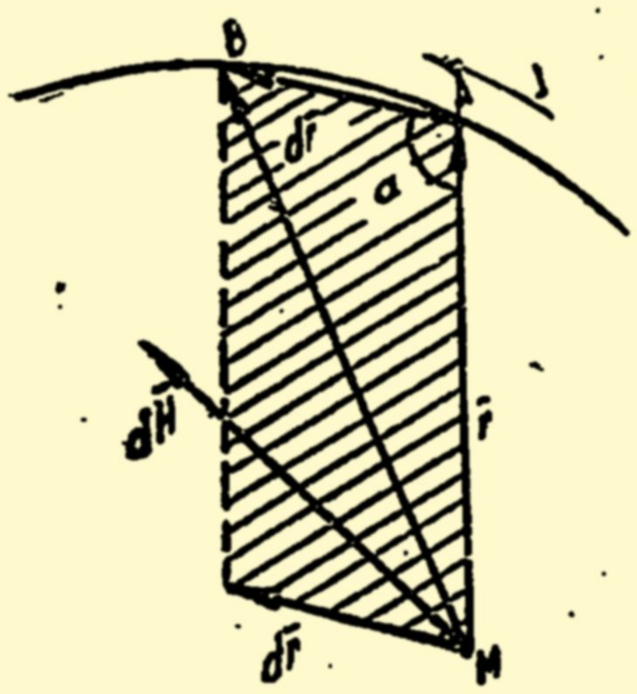


Fig. 43

Luând un singur element $\overline{AB}$ orientat în sensul de parcurs al curentului fig. 43 şi notând $\overline{MA} = \bar{r}$, $\overline{AB} = d\bar{r}$, I este intensitatea curentului, α = unghiul $(\bar{r}, d\bar{r})$, legea lui Biot-Savart arată că elementul $d\bar{r}$, creează în M un câmp de intensitate

$$dH = \frac{I\,ds \sin\alpha}{r^2}, \qquad \text{(unităţi C. G. S. e. m.)},$$

ds fiind lungimea lui $d\bar{r}$: $ds = |d\bar{r}|$.

Acest câmp are direcţia perpendiculară pe planul format de $\bar{r}$ şi $d\bar{r}$, fiind astfel orientat, încât un observator aşezat dealungul său să vadă curentul parcurgând pe $d\bar{r}$ în sensul pozitiv de rotaţie.

Se vede imediat că această lege se exprimă vectorial.

Câmpul $d\bar{H}$ este un vector reprezentând un bivector uşor de determinat, deoarece va fi proporţional cu $(\bar{r}, d\bar{r})$. Aria paralelogramului $(\bar{r}, d\bar{r})$ este $rds \sin\alpha$, deci

$$dH = \frac{I}{r^3} \text{ aria } (\bar{r}, d\bar{r}).$$

Vectorul $d\bar{H}$ va fi produsul vectorial

$$d\bar{H} = \frac{I(\bar{r} \times d\bar{r})}{r^3} = \frac{\bar{r} \times d\bar{I}}{r^3}, \qquad (21, II)$$

dacă notăm $d\bar{I} = Id\bar{r}$, numind $d\bar{I}$ *element vectorial de curent*.

Forma vectorială a legii lui Biot-Savart scoate în evidenţă vectorul axial $d\bar{H}$, produs de bivectorul $(\bar{r}, d\bar{r})$ şi scalarul I.

§ 45. Componente ortogonale

Descompunerea vectorilor după două sau trei direcţii este o operaţie geometrică afină. Dacă însă impunem acelor direcţii să facă anumite unghiuri, în particular să fie perpendiculare, operaţia devine metrică.

Scanned with OKEN Scanner

In aplicaţiile fizice, direcţiile de descompunere, care se impun prin fenomenul studiat, sunt adeseori perpendiculare, ca de exemplu, în fenomenul *frecării de aderenţă*.

Când un corp greu, de greutate G, se găseşte în echilibru pe un plan orizontal, care nu este perfect lucios, prin introducerea unei forţe $\bar{F}$ paralelă cu planul, corpul nu se deplasează decât dacă F atinge o anumită intensitate.

Principiul acţiunii şi reacţiunii se aplică forţei $\bar{F}+\bar{G}$ şi avem

$$\bar{R}=-(\bar{F}+\bar{G}),$$

deci reacţiunea nu mai este normală la planul orizontal.

Suntem conduşi să comparăm cazul reacţiunii normale, care apare în cazul planului perfect lucios, cu cazul acestei reacţiuni oblice, descompunând pe $\bar{R}$ după două direcţii ce se impun: direcţia verticalei şi direcţia forţei $\bar{F}$ (fig. 44).

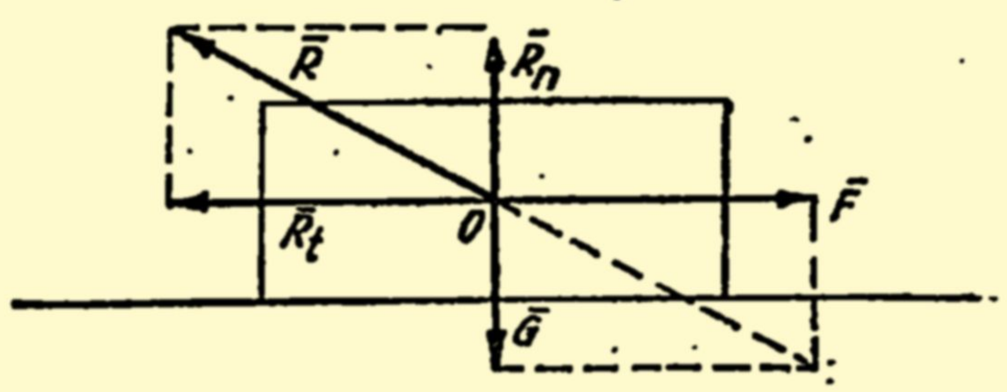


Fig. 44

Punând: $\bar{R}=\bar{R}_t+\bar{R}_n$, vom avea

$$\bar{R}_t=-\bar{F}, \quad \bar{R}_n=-\bar{G},$$

unde $\bar{R}_n$ este reacţiunea normală, iar $\bar{R}_t$ poartă numele de *frecare de aderenţă*.

Experienţa dovedeşte că mărimea lui $\bar{R}_t$ este proporţională cu G

$$R_t=\mu G,$$

unde μ este coeficientul de frecare.

Prin urmare, componenta $\bar{R}_t$ este cunoscută în funcţie de $\bar{G}$ şi astfel putem determina forţa $\bar{F}$ minimă, care învinge frecarea. $\bar{R}_t$ şi $\bar{R}_n$ se obţin din $\bar{R}$ prin *proiecţie paralelă cu direcţiile date*, deci această operaţie geometrică ne dă posibilitatea de a calcula componentele unui vector după două direcţii perpendiculare, ca şi în cazul a două direcţii oarecare.

In spaţiu, dacă direcţiile vectorilor fundamentali sunt perpendiculare între ele două câte două, componentele oricărui vector se vor obţine deasemenea prin proiecţie paralelă cu aceste direcţii.

Vom numi *componentă ortogonală* a unui vector pe o direcţie, o componentă obţinută prin proiecţie ortogonală pe acea direcţie. Componentele ortogonale ale unui vector sunt *vectori*, având direcţia dreptei pe care se face proiecţia. Pentru simplificarea limbajului *se întrebuinţează adesea termenul de componentă ortogonală pentru măsura componentei respective.*

Proiecţia unui vector pe o axă. Pentru a evita confuziile, care rezultă dintr'un abuz de limbaj, este bine să precizăm noţiunile.

Vom numi *axă* o dreaptă pe care am stabilit o orientare printr'un sens de parcurs pozitiv. O axă este o dreaptă orientată printr'un segment oarecare $\overline{AB}$, pe care considerăm ca pozitiv drumul dela A la B. In particular,

Scanned with OKEN Scanner

putem orienta o dreaptă printr'un versor. O axă este perfect determinată prin versorul său $\bar{n}$. Unghiul θ, format de un vector $\bar{V}$ cu axa Δ este unghiul cuprins între 0 și π format de două semidrepte paralele cu $\bar{V}$ și $\bar{n}$, duse printr'un punct I, arbitrar din spațiu (fig. 45).

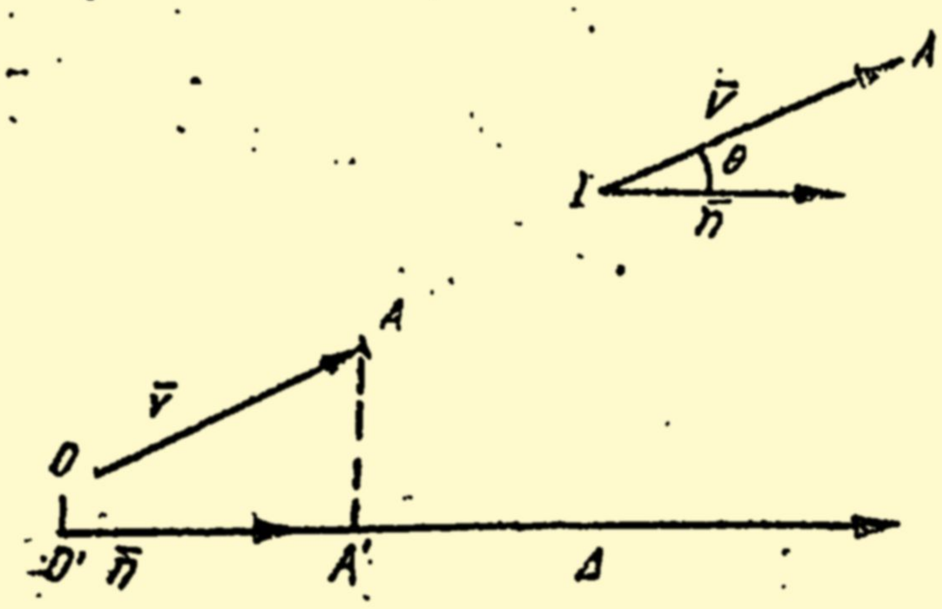


Fig. 45

Facem convenția de a lua totdeauna $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, astfel încât θ să fie un unghi în paralelogramul format de V cu $\bar{n}$.

Proiecția vectorului $\bar{V} = \overline{OA}$ pe axa Δ va fi *măsura componentei ortogonale $O'A'$ a vectorului $\bar{V}$ pe direcția Δ prin versorul $\bar{n}$ al axei Δ*. Deci *proiecția unui vector pe o axă este un scalar*. Observăm că $\overline{O'A'}$ ar orientarea axei pentru $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ și opusă pentru $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$, deci respectiv pentru θ ascuțit sau obtuz.

Vom putea deci scrie

$$\text{pr. } \bar{V} \text{ pe } \Delta = V \cos \theta, \qquad (22, \text{II})$$

adică: *Proiecția unui vector pe o axă este un scalar egal cu produsul dintre modulul vectorului și cosinusul unghiului dintre vector și axă.*

Se obține imediat proprietatea următoare:

Proiecția unei sume de vectori pe o axă este suma proiecțiilor lor pe aceeași axă.

Prin proiecție pe o axă dată, fiecărui vector din spațiu îi corespunde o proiecție determinată, deci fiecărui vector facem să-i corespundă un scalar. Egalității și adunării vectoriale le corespund egalitatea și adunarea algebrică a proiecțiilor.

Dacă poligonul vectorilor este închis, proiecția sa va fi nulă, deci proiecția vectorului nul pe orice direcție este nulă.

Operația geometrică de proiecție pe o direcție se traduce algebric prin formula (22, II). Ea este permutabilă cu înmulțirea printr'un scalar, fiindcă avem:

$$\text{pr.}(\lambda \bar{V}) = \lambda \text{ pr. } \bar{V}.$$

Componenta ortogonală a vectorului $\bar{V}$ pe direcția determinată de axa Δ este un vector. Măsura acestuia prin versorul $\bar{n}$ al axei Δ este egală cu proiecția lui $\bar{V}$ pe axa Δ. Vom avea deci relația

$$\text{Comp. } \bar{V} \text{ pe } \Delta = (V \cos \theta)\bar{n} = (\text{pr. } \bar{V} \text{ pe } \Delta)\,\bar{n}. \qquad (23, \text{II})$$

Această relație ne permite să măsurăm componenta ortogonală a unui vector pe o direcție prin versorul $\bar{n}$ al unei axe Δ, determinate pe acea direcție. Deaceea, uneori, printr'un abuz de limbaj se asimilează componenta ortogonală a vectorului $\bar{V}$ pe Δ cu proiecția sa pe axa Δ. Acesta revine la asimilarea vectorului comp. $\bar{V}$ pe Δ cu măsura sa prin unitatea $\bar{n}$, ceeace se face curent când componentele sca are ale unui vector sunt numite pe scurt componentele vectorului pe direcțiile fundamentale.

Scanned with OKEN Scanner

Lucrul mecanic. Noțiunea de componentă ortogonală are numeroase aplicații. Una dintre ele, foarte importantă, apare în mecanică.

Dacă o forță $\bar{F}$ acționează asupra unui punct material A, care se mișcă pe o dreaptă în direcția forței, deplasându-se din A în A', se numește *lucru mecanic* produsul dintre mărimea forței și mărimea deplasării. Dacă forța are o direcție diferită de aceea a deplasării, lucrul mecanic este dat de componenta ortogonală a forței pe direcția de deplasare.

Dacă orientăm dreapta printr'un versor $\bar{i}$, de același sens cu deplasarea, această componentă va fi, conform cu (23, II): $\bar{F}_i = F\cos\theta\,\bar{i}$.

Notând cu $\bar{l} = l\bar{i}$ vectorul deplasare $\overline{AA'}$, lucrul mecanic este pozitiv sau negativ după cum $\bar{F}_i$ și $\bar{i}$ au același sens sau sensuri opuse și vom putea scrie

$$L = F\,l\cos\theta, \qquad (24, II)$$

deoarece semnul lui L, dat de $\cos\theta$, este pozitiv sau negativ, după cum θ este ascuțit sau obtuz.

Prin urmare această mărime mecanică scalară nu depinde decât de cei doi vectori: forța $\bar{F}$ și deplasarea $\bar{l}$.

*) § 46. Proiecția ortogonală ca produs de mărimi geometrice

Proiecția ortogonală este o operație geometrică, prin care unui segment orientat OA și unei axe Δ le corespunde măsura unui segment $\overline{OA'}$, deci proiecția lui $\overline{OA}$ pe Δ. Figurii formate din $\overline{OA}$ și Δ i se asociază mărimile vectoriale legate $\bar{V} = \overline{OA}$ și $\bar{n}$ versorul axei Δ, aplicat în O, iar prin operația de proiecție ortogonală obținem o nouă mărime scalară, pr. $\overline{OA} = \bar{V}\cos\theta$ și o nouă mărime vectorială, componenta ortogonală $\overline{OA} = V\cos\theta\,\bar{n}$.

Vom face observația că ducând două plane P_1 și P_2 perpendiculare pe Δ în O și A' (fig. 46) pe Δ, *orice segment orientat* $\overline{B_1B_2}$, care unește un punct B_1 din planul P_1 cu un punct B_2 din planul P_2, *are aceeași proiecție* măs. $\overline{OA'}$ și că *toți vectorii* $\overline{B_1B_2} = \bar{W}$ *au aceeași componentă ortogonală* $\overline{OA'}$ *pe* Δ. Dacă aplicăm apoi o translație întregii figuri, orice vector $\bar{W} = \overline{B_1B_2}$ va avea atât proiecția ortogonală, cât și componenta ortogonală pe axele Δ, egale cu măs. $\overline{OA'}$, respectiv cu $\overline{OA'}$.

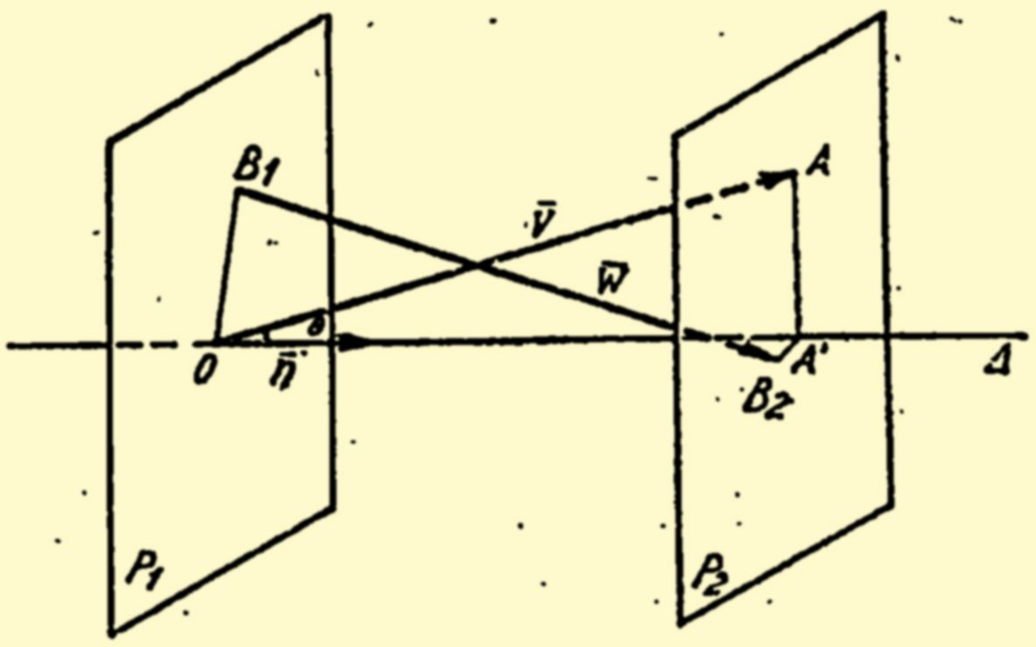


Fig. 46

Ori, mulțimea tuturor axelor Δ, paralele între ele, definește o direcție Δ, iar mulțimea perechilor orientate de plane P_1, P_2 un biplan (P_1, P_2), deci două obiecte geometrice, care sunt determinate prin două mărimi geometrice: versorul $\bar{n}$ al

Scanned with OKEN Scanner

direcției Δ și vectorul covariant $\bar{u}=(P_1, P_2)$. Deasemenea, mulțimea tuturor segmentelor $\overline{W}=\overline{B_1B_2}$ formează un obiect geometric, căruia i se asociază o mărime geometrică, vectorul $\overline{W}=\overline{B_1,B_2}$. *Toate aceste mărimi vectoriale sunt libere*, deoarece figurile cărora le sunt asociate pot fi transformate unele în altele printr'o translație oarecare.

Operația de proiecție ortogonală face să corespundă o mărime scalară $V\cos\theta$ *unui vector* $\overline{V}$ *și unui versor* $\bar{n}$.

Această operație geometrică se traduce deci printr'o operație vectorială, al cărui rezultat este o mărime de altă specie decât cei doi vectori $\overline{V}$ și $\bar{n}$, deoarece este un scalar. Putem stabili din acest punct de vedere o analogie între operația de produs vectorial și cea de proiecție, fiindcă amândouă conduc la mărimi de altă specie decât cei doi vectori. Am văzut deasemenea că proiecția sumei a doi vectori este egală cu suma proiecțiilor lor pe aceeași axă Δ, deci operația de proiecție ortogonală este distributivă.

Vom numi, în general, *produs de mărimi* orice operație asupra a două sau mai multor mărimi, dacă este distributivă față de adunarea acestor mărimi și omogenă.

Astfel, *proiecția ortogonală este un produs al celor doi vectori* $\overline{V}$ *și* $\bar{n}$. Prin analogie cu produsul algebric, mărimile $\overline{V}$ și $\bar{n}$ se numesc *factori ai produsului*.

Cei doi factori sunt *mărimile caracteristice* ale operației, deoarece cunoașterea lor ne permite să obținem produsul, deci proiecția ortogonală. Este important de observat că *spre deosebire de produsul algebric, nu vom putea determina factorul* $\overline{V}$ *cunoscând factorul* $\bar{n}$ *și produsul* $V\cos\theta$. In adevăr, știm că toți vectorii $\overline{W}$, care au extremitățile B_1 și B_2 pe cele două plane P_1 și P_2 au aceeași proiecție $V\cos\theta$: *componenta ortogonală a unui vector* $\overline{V}$ *pe o direcție* Δ *nu determină vectorul.*

Putem totuși observa că această componentă ortogonală $V\cos\theta\,\bar{n}$, comună tuturor vectorilor $\overline{W}=\overline{B_1B_2}$, *determină mulțimea acestor vectori, adică obiectul geometric format de ei.* Este suficient să ducem cele două plane P_1 și P_2 perpendicular pe Δ în O și A' și să unim apoi două puncte oarecare B_1 și B_2 ale acestor plane (fig. 46).

Ținând seama de această observație, vom putea spune: *proiecția ortogonală a unui vector* $\overline{V}$ *pe o axă* $\bar{n}$ *este mărimea scalară asociată tuturor vectorilor* $\overline{W}=\overline{B_1B_2}$, *care unesc punctele unui biplan* (P_1,P_2), *perpendicular pe* $\bar{n}$.

Pentru a determina *un anumit* vector $\overline{B_1B_2}$, de exemplu $\overline{OA}$, este necesar să i se cunoască în plus direcția.

Proiecția ortogonală pe axa Δ a vectorului $\overline{W}$ este distanța dintre cele două plane P_1 și P_2 ale biplanului (P_1, P_2), deci este inversa măsurii acestui biplan pe direcția Δ.

Prin urmare, vectorul $\frac{1}{V\cos\theta}\,\bar{n}$ este vectorul reprezentativ al vectorului covariant $\bar{u}$ definit de biplanul (P_1, P_2). Astfel, *proiecția ortogonală a unui vector* $\overline{V}$ *pe o direcție* Δ *determină un vector covariant* $\bar{u}$ *reprezentat prin vectorul* $\frac{1}{V\cos\theta}\,\bar{n}$ *perpendicular pe planele* P_1 *și* P_2.

Scanned with OKEN Scanner

Noţiunea de produs de mărimi este foarte importantă, deoarece permite reprezentarea unor mărimi care rezultă din relaţiile ce au loc între alte mărimi caracteristice unui fenomen. Trebue să observăm că analogia cu produsul algebric nu este completă. Astfel, produsele de mărimi nu sunt totdeauna comutative, cum este cazul produsului vectorial care este anticomutativ. Nici proprietatea de distributivitate nu este totdeauna completă. Astfel, considerând proiecţia ortogonală a unui vector ca un produs al factorilor $\overline{V}$ şi $\overline{n}$, *acest produs nu este complect distributiv.*

In adevăr, suma a doi versori $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$, nu este în general un versor, deci *versorii nu formează o specie măsurabilă.* Dacă proiectăm ortogonal vectorul $\overline{V}$ pe direcţia de versor $\overline{n}_1$ şi pe direcţia de versor $\overline{n}_2$, este posibil să nu existe nicio direcţie $\overline{n}$, astfel încât proiecţia lui $\overline{V}$ pe $\overline{n}$ să fie suma celor două proiecţii. Este suficient să ţinem seama că proiecţia ortogonală este mai mică sau cel mult egală cu segmentul proiectat, deci dacă suma celor două proiecţii este mai mare decât $|\overline{V}|$, nu va exista nicio direcţie pe care proiecţia lui $\overline{V}$ să fie egală cu această sumă.

Ca şi în alte domenii ale matematicii, lărgind semnificaţia operaţiei, vom obţine un produs, care este complect distributiv şi a cărui necesitate este pusă în evidenţă de noţiunea de lucru mecanic.

§ 47. Produsul scalar a doi vectori

Exemplul lucrului mecanic pune în evidenţă o mărime scalară, determinată de relaţiile între doi vectori şi care se obţine printr'un produs în care intră, ca în (24,II), modulele celor doi vectori şi unghiul θ format de ei.

Vom numi *produs scalar* a doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ *mărimea scalară*

$$\overline{V}_1\,\overline{V}_2 = V_1\,V_2\cos\theta, \qquad (25,II)$$

adică produsul modulelor vectorilor prin cosinusul unghiului dintre ei (fig. 47).

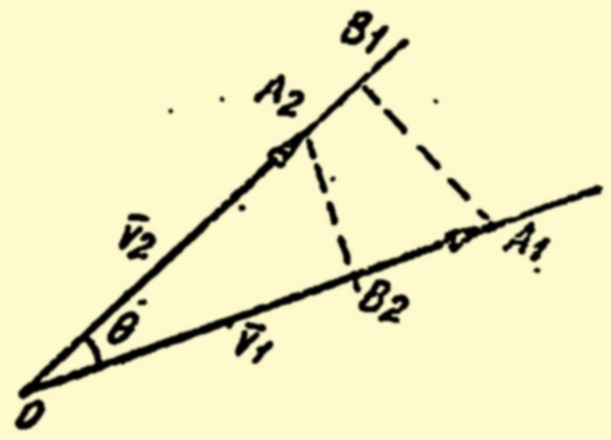


Fig. 47

Se mai utilizează şi alte notaţii pentru produsul scalar, ca de exemplu:

$$\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 \quad \text{sau} \quad (\overline{V}_1, \overline{V}_2), \quad (\overline{V}_1\,\overline{V}_2).$$

Din definiţie rezultă că *produsul scalar este comutativ:* $\overline{V}_1\,\overline{V}_2 = \overline{V}_2\,\overline{V}_1$.

Formula (25,II) se poate scrie şi astfel;

$$\overline{V}_1\,\overline{V}_2 = V_2\,(V_1\cos\theta) = V_2\,(\text{pr.}\,\overline{V}_1 \text{ pe } \overline{V}_2) = V_1\,\text{pr.}\,(\overline{V}_2 \text{ pe } \overline{V}_1) = \overline{V}_2\,\overline{V}_1, \qquad (26,II)$$

deci: *produsul scalar a doi vectori este un scalar egal cu produsul dintre modulul unuia prin proiecţia celuilalt pe el.*

Dacă în particular $\overline{V}_2$ este un versor, punând $\overline{V}_2 = \overline{n}$, vom avea din (25,II):

$$\text{pr.}\,\overline{V}_1 \text{ pe } \overline{n} = V_1\cos\theta = \overline{V}_1\,\overline{n}. \qquad (27,II)$$

Scanned with OKEN Scanner

Proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vector și versorul axei.

Produsul scalar a doi versori variază când unul din ei se rotește păstrând modulul constant.

Din expresia (25,II) rezultă că produsul scalar este maxim, luând valoarea $V_1 V_2$, când $\theta=0$ și minim, luând valoarea $-V_1 V_2$, când $\theta=\pi$, deci când vectorii au sensuri opuse. El este nul când $\theta=\frac{\pi}{2}$, deci: *produsul scalar a doi vectori perpendiculari este nul.* Produsul scalar se mai anulează și când unul din factori este vectorul nul, *deci, ca și produsul vectorial, se deosebește de produsul algebric,* care nu este nul decât când unul din factori e nul.

Tot din expresia (25,II), deducem:

$$\cos\theta=\frac{\overline{V}_1\overline{V}_2}{V_1V_2}\ (V_1, V_2\neq\theta), \qquad (28,II)$$

formulă care permite calculul cosinusului ughiului format de două direcții orientate.

In particular, când vectorii sunt versori, formula devine

$$\cos\theta=\overline{n}_1\overline{n}_2. \qquad (29,II)$$

O condiție necesară și suficientă ca două direcții să fie perpendiculare este ca produsul scalar al versorilor lor să fie nul. Aceasta rezultă imediat din (29,II). Impunând condiția $\theta=0$, trebue ca $\overline{n}_1\overline{n}_2=0$. Invers, dacă $\overline{n}_1\overline{n}_2=0$, fiindcă $\overline{n}_1$ și $\overline{n}_2$ sunt versori, deci nenuli, produsul scalar nu se poate anula decât dacă $\overline{n}_1$ și $\overline{n}_2$ sunt perpendiculari.

Evident, pentru ca doi vectori $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ nenuli să fie perpendiculari este necesar și suficient ca produsul lor scalar să fie nul:

$$\overline{V}_1\overline{V}_2=0 \quad (V_1V_2\neq 0). \qquad (30,II)$$

Produsul scalar permite evaluarea modulului unui vector.

In adevăr, dacă, luăm $\overline{V}_1=\overline{V}_2=\overline{V}$, din (25,II) rezultă:

$$\overline{V}\overline{V}=V\overline{V}=V^2=(\overline{V})^2, \qquad (31,II)$$

deci: *produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul modulului său.*

Deaceea, vom numi produsul $\overline{V}\overline{V}$ *pătratul vectorului* $\overline{V}$ și vom putea scrie

$$(\overline{V})^2=V^2. \qquad (32,II)$$

Produsul scalar este permutabil cu amplificarea vectorilor printr'un scalar. Avem:

$$\lambda\overline{V}_1\overline{V}_2=(\lambda\overline{V}_1)\overline{V}_2=\overline{V}_1(\lambda\overline{V}_2). \qquad (33,II)$$

Proprietatea rezultă imediat din definiție, dacă $\lambda>0$. Dacă $\lambda<0$, punând $\lambda=-\mu$, cu $\mu>0$, vom avea

$$\lambda(\overline{V}_1\overline{V}_2)=\lambda(V_1V_2\cos\theta)=-\mu(V_1V_2\cos\theta)=\mu V_1V_2\cos(\pi-\theta)$$

și

$$(\lambda\overline{V}_1)\overline{V}_2=|\lambda\overline{V}_1|V_2\cos(\lambda\overline{V}_1,\overline{V}_2)=\mu V_1V_2\cos(\pi-\theta),$$

fiindcă $\lambda\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ fac între ei unghiul $\pi-\theta$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, relaţiile (33,II) sunt valabile pentru orice $\lambda \neq 0$ şi evident deasemenea pentru $\lambda = 0$, deci pentru orice λ.

Produsul scalar este distributiv faţă de adunarea vectorială.

Fiind daţi vectorii $\overline{V}$, $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, avem proprietatea:

$$\overline{V}(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = \overline{V}\overline{V}_1 + \overline{V}\overline{V}_2. \qquad (34,II)$$

Aplicând formula (26, I), vom scrie (fig. 48)

$$\overline{V}(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = \overline{V}[\text{pr.}(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) \text{ pe } V] = V[(\text{pr.}\overline{V}_1 + \text{pr.}\overline{V}_2) \text{ pe } \overline{V}] =$$

$$= V(\text{pr.}\overline{V}_1 \text{ pe } V) + V(\text{pr.}\overline{V}_2 \text{ pe } \overline{V}). \qquad (35,II)$$

Pe de altă parte, tot din (26,I') avem:

$$V(\text{pr.}\overline{V}_1 \text{ pe } V) = VV_1; \quad \overline{V}(\text{pr.}\overline{V}_2 \text{ pe } \overline{V}) = \overline{V}\overline{V}_2.$$

Introducând în (35,II) obţinem relaţia căutată (34 II).

Această proprietate ne permite utilizarea formală a produsului scalar ca în Algebră şi este la baza unui număr considerabil de proprietaţi ale operaţiilor vectoriale

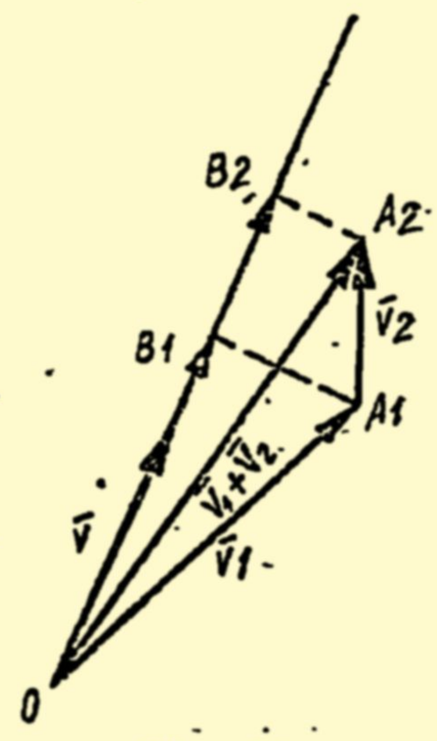


Fig. 48

Produsul scalar este un produs de mărimi. la care suntem conduşi prin considerarea lucrului mecanic ca un produs între forţă şi deplasare, deci ca un produs de mărimi fizice. El este un exemplu de noţiune obţinută prin generalizarea unei operaţii efectuate cu mărimi scalare. deci analoagă în totul unei operaţii cu numere.

In adevăr, când forţa şi deplasarea au aceeaşi direcţie, lucrul mecanic este produsul măsurilor acestor mărimi, exprimat în unităţi de lucru mecanic. Dacă, însă, forţa şi deplasarea au direcţii diferite, operaţia algebrică nu mai are sens şi trebuie extinsă pentru a corespunde, deoarece mărimea fizică, lucrul mecanic, continuă să existe. Astfel, produsul scalar extinde la mărimi vectoriale produsul algebric.

Proiecţia unui vector pe o direcţie este un caz particular de produs scalar. Am atras atenţia asupra faptului că acest produs nu este complect distributiv (§ 46).

Prin aceasta înţelegem că suma proiecţiilor unui vector $\overline{V}$ pe două direcţii de versori $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$ nu este totdeauna egală cu proiecţia aceluiaşi vector pe o direcţie.

Expresia produsului scalar pune în evidenţă această particularitate şi o explică imediat. In adevăr, dacă proiecţia ar fi complect distributivă, ar trebui ca relaţia

$$\overline{V}\overline{n}_1 + \overline{V}\overline{n}_2 = \overline{V}(\overline{n}_1 + \overline{n}_2)$$

să conţină în ambii membri proiecţii ale vectorului $\overline{V}$, deci $\overline{n}_1 + \overline{n}_2$ ar trebui să fie un versor. Insă, în general, suma a doi versori nu este un versor, deci suma a două proiecţii ale unui vector $\overline{V}$ nu este în general o proiecţie a acestui vector pe o direcţie. Putem spune că proiecţiile ortogonale ale unui vector $\overline{V}$ nu formează o specie măsurabilă de mărimi scalare.

Scanned with OKEN Scanner

§ 48. Aplicații ale produsului scalar

1. Identitatea

$$(\bar{A}+\bar{B})^2=A^2+2\bar{A}\bar{B}+B^2,$$

analoagă cu cea algebrică, de care se deosebește numai prin înlocuirea produsului $2AB$ prin produsul scalar $2\bar{A}\bar{B}$, este o consecință a distributivității produsului scalar. In adevăr:

$$(\bar{A}+\bar{B})^2=(\bar{A}+\bar{B})(\bar{A}+\bar{B})=\bar{A}\bar{A}+\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{A}+\bar{B}\bar{B}=A^2+2\bar{A}\bar{B}+B^2. \qquad (36,II)$$

Este dela sine înțeles că și alte proprietăți dintre cele stabilite au intervenit în demonstrație, calculul arătând analogia formală cu operațiile algebrice.

Această identitate are numeroase interpretări.

2. Relații metrice într'un triunghi oarecare. Dacă $\bar{A}$, $\bar{B}$ și $\bar{A}+\bar{B}$ sunt vectori ce formează un triunghi LMN, identitatea (36,II) se poate scrie (fig. 49):

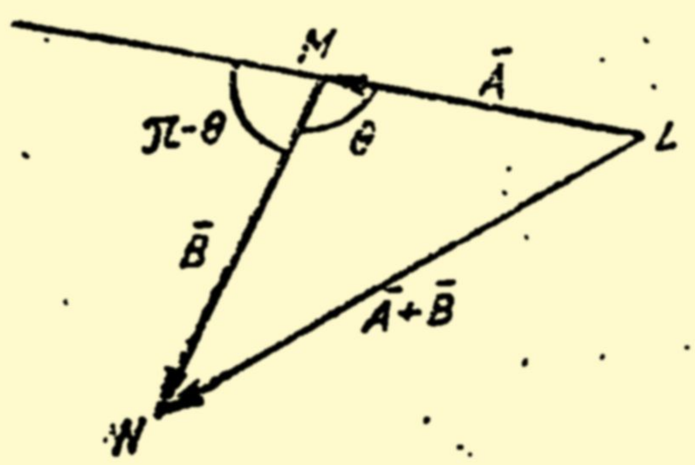


Fig. 49

$$LN^2=LM^2-2LM\cdot MN\cos(\pi-\theta)+MN^2,$$

$$LN^2=LM^2-2LM\cdot MN\cos\theta+MN^2,$$

relație cunoscută din Trigonometrie între laturile și unghiurile unui triunghi oarecare.

3. Proprietatea fundamentală a distanțelor. Se știe că proprietatea fundamentală a distanței între două puncte este de a fi mai mică decât orice alt drum, care leagă acele puncte. De exemplu, în cazul punctelor L și N, drumul $LM+MN$ este mai lung decât LN (fig. 49).

Aceasta rezultă din identitatea (36,II) astfel:

Produsul scalar $2\bar{A}\bar{B}$ este cel mult egal cu $2AB$ și aceasta numai când $\theta=0$. Pentru $\theta\neq 0$, $2\bar{A}\bar{B}<2AB$. Vom putea deci scrie

$$(\bar{A}+\bar{B})^2=A^2+2\bar{A}\bar{B}+B^2\leq A^2+2AB+B^2=(A+B)^2,$$

de unde

$$|\bar{A}+\bar{B}|\leq A+B=|\bar{A}|+|\bar{B}|. \qquad (37,II)$$

Modulul sumei a doi vectori este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor acelor vectori.

In termeni geometrici, o latură într'un triunghi este mai mică decât suma celorlalte două (sau cel mult egală cu această sumă când triunghiul este degenerat).

4. Expresia aproximată a modulului sumei a doi vectori. Formula fundamentală (37,II) este un exemplu de inegalitate vectorială. Pentru a arăta că analogia algebrică poate fi împinsă destul de departe în Calculul vectorial, vom presupune că $\frac{B}{A}$ este mic față de unitate în identitatea (36,II). Vom scrie atunci

$$|\bar{A}+\bar{B}|=(A^2+2\bar{A}\bar{B}+B^2)^{\frac{1}{2}}=A\left(1+2\frac{\bar{A}\bar{B}}{A^2}+\frac{B^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Este ușor de văzut că $2\frac{\bar{A}\bar{B}}{A^2}$ este un termen mic față de unitate, iar $\frac{B^2}{A^2}$ este mic față de $2\frac{\bar{A}\bar{B}}{A^2}$. Ținând seama de aceasta, putem aplica formula binomului, neglijând termenii foarte mici. Vom avea:

$$\left(1+2\frac{\bar{A}\bar{B}}{A^2}+\frac{B^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{2\bar{A}\bar{B}}{A^2}+\frac{B^2}{A^2}\right)+\cdots\simeq 1+\frac{A\bar{B}}{A^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde egalitatea aproximativă:

$$|\overline{A}+\overline{B}| \approx A+\frac{\overline{A}\,\overline{B}}{A}$$

valabilă pentru B mic față de A.

5. Pătratul modulului produsului vectorial. Produsul scalar ne permite să dăm o expresie foarte utilă a pătratului modulului unui produs vectorial.

Fie θ unghiul dintre vectorii $\overline{A}$, $\overline{B}$. Vom avea

$$|\overline{A}\times\overline{B}| = AB|\sin\theta|,$$

deci

$$(\overline{A}\times\overline{B})^2 = A^2B^2\sin^2\theta = A^2B^2(1-\cos^2\theta).$$

Dar

$$AB\cos\theta = \overline{A}\,\overline{B} \quad \text{și} \quad A^2B^2 = \overline{A}^2\overline{B}^2,$$

deci

$$(\overline{A}\times\overline{B})^2 = \overline{A}^2\overline{B}^2-(\overline{A}\,\overline{B})^2 = A^2B^2-(\overline{A}\,\overline{B})^2. \tag{38,II}$$

Această relație, numită *identitatea lui Lagrange* în Algebra scalară, joacă un rol foarte important și în Algebra vectorială.

§ 49. Vectori și componente ortogonale

Descompunerea unui vector $\overline{V}$ din spațiu după trei direcții necoplanare, reprezentate prin trei vectori liniar independenți, capătă o semnificație deosebită, dacă cei trei vectori sunt aleși perpendiculari doi câte doi.

In acest caz triedrul fundamental este *tridreptunghi* sau *ortogonal.*

Să presupunem în particular trei versori ortogonali $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. (fig. 50).

Aceștia vor satisface următoarele relații, ce decurg din proprietățile produselor scalare:

$$\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1, \qquad \overline{i}\,\overline{j}=\overline{j}\,\overline{k}=\overline{k}\,\overline{i}=0, \tag{39,II}$$

precum și relațiile

$$\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k};\quad \overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k},$$
$$\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i};\quad \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i},$$
$$\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j};\quad \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}, \tag{39',II}$$
$$\overline{i}\times\overline{i}=0;\quad \overline{j}\times\overline{j}=0;\quad \overline{k}\times\overline{k}=0,$$

ce decurg din proprietățile produselor vectoriale.

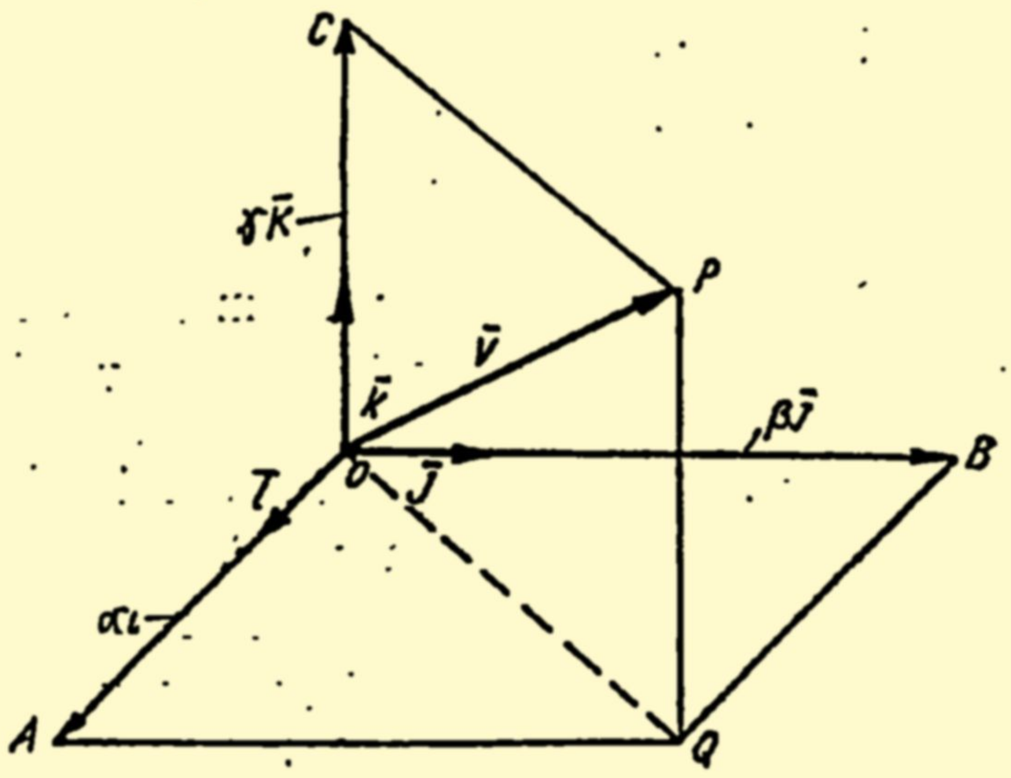


Fig. 50

Descompunând pe $\overline{V}$ după cele trei direcții de versori $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, vom putea scrie:

$$\overline{V}=\alpha\overline{i}+\beta\overline{j}+\gamma\overline{k}. \tag{40,II}$$

Multiplicând scalar în ambii membri succesiv prin $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, vom avea:

$$\overline{V}\overline{i}=\alpha\overline{i}\,\overline{i}+\beta\overline{j}\,\overline{i}+\gamma\overline{k}\,\overline{i}=\alpha \quad \text{etc.},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\alpha = \overline{Vi} = \text{pr.}\,\overline{V} \text{ pe } \bar{i} = \overline{V}\cos(\overline{V}, \bar{i}).$$

In definitiv

$$\alpha = \overline{Vi}, \quad \beta = \overline{Vj}, \quad \gamma = \overline{Vk}.$$

Scalarii α, β, γ, *reprezentând măsurile componentelor lui* $\overline{V}$ *pe cele trei direcţii ortogonale* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, *sunt proiecţiile ortogonale ale lui* $\overline{V}$ *pe aceste direcţii.*

Introducând valorile lor în (40, II), obţinem expresia vectorului, raportat la un triedru ortogonal:

$$\overline{V} = (\overline{Vi})\,\bar{i} + (\overline{Vj})\,\bar{j} + (\overline{Vk})\,\bar{k}. \qquad (41, \text{II})$$

Componentele se obţin prin proiecţie ortogonală, deci sunt componentele ortogonale ale vectorului după cele trei direcţii.

Operaţia de produs scalar ne permite deci *evaluarea componentelor scalare* α, β, γ *ale unui vector pe trei direcţii fundamentale ortogonale*, date prin cei trei versori ortogonali $\bar{i}$, j, $\bar{k}$.

Un criteriu de recunoaştere a mărimilor vectoriale. Fiind dat un vector oarecare $\overline{V}$, avem posibilitatea de a construi grafic componentele sale ortogonale pe orice direcţie a spaţiului. Luând $\overline{OP} = \overline{V}$ într'un punct oarecare O, descriem sfera de diametru OP şi apoi luând $\overline{OQ} = -\overline{V}$, sfera de diametru OQ (fig. 51).

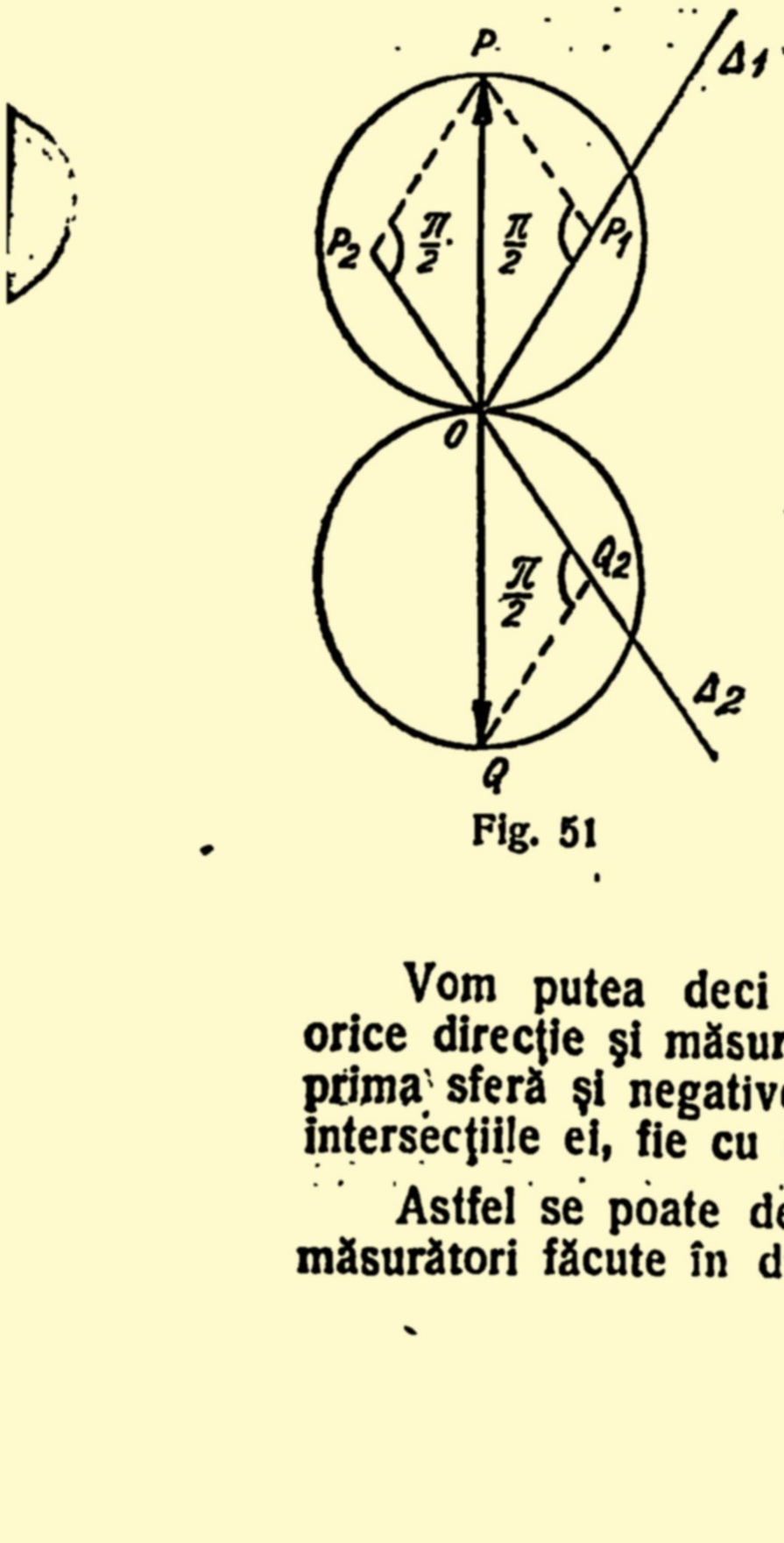


Fig. 51

Orice direcţie Δ orientată printr'un versor, mai exact orice semidreaptă, care trece prin O, întâlneşte una din aceste sfere şi numai una într'un singur punct.

Fie Δ_1 o astfel de semidreaptă şi P_1 punctul său de intersecţie cu sfera OP. Unghiul OP_1P fiind drept, vectorul $\overline{OP_1}$ este componenta ortogonală, iar segmentul OP_1 măsura proiecţiei lui $\overline{V}$ pe Δ_1, măsură pozitivă, deoarece $\overline{OP_1}$ şi versorul lui Δ_1 au acelaşi sens.

In cazul când Δ_2 nu întâlneşte prima sferă, ea va întâlni pe a doua în Q_2 şi $\overline{OQ_2}$ va fi componenta ortogonală a lui $-\overline{V}$ pe această semidreaptă, deci segmentul OQ_2 va fi măsura proecţiei lui $-\overline{V}$ pe Δ_2. Direcţia opusă lui Δ_2 întâlneşte prima sferă în P_2, astfel încât $\overline{OP_2} = -\overline{OQ_2}$.

Vom putea deci obţine grafic componentele ortogonale ale lui $\overline{V}$ pe orice direcţie şi măsurile acestora, considerându-le pozitive când întâlnesc prima sferă şi negative în caz contrar. Putem folosi şi o singură sferă luând intersecţiile ei, fie cu direcţiile date, fie cu opusele lor.

Astfel se poate determina caracterul vectorial al unei mărimi fizice prin măsurători făcute în diverse direcţii ale spaţiului.

Scanned with OKEN Scanner

Purtând valorile acestor măsurători pe direcţiile respective, dacă punctele P_1, Q_2. etc. se găsesc pe două sfere (sau cu convenţia semnului, pe o sferă) mărimea considerată este reprezentabilă geometric prin vectorul $\overline{OP}$, diametru al acelei sfere.

Prin urmare, o mărime vectorială apare din punctul de vedere al măsurii sale scalare ca o mulţime de numere ataşate tuturor direcţiilor spaţiului şi sintetizată geometric într'un vector. Cum o sferă este determinată de patru puncte, *pentru determinarea vectorului* $\overline{OP}$ *sunt suficiente trei măsurători în trei direcţii necoplanare ale spaţiului,* când caracterul vectorial al mărimii respective a fost recunoscut. Rezultă de aici posibilitatea studiului numeric al vectorilor prin componentele lor ortogonale.

§ 50. Componente şi proiecţii ortogonale ale elementelor plane orientate

Operaţia geometrică de proiecţie ortogonală a unui vector pe o axă, reprezentabilă vectorial prin produsul scalar, a condus la o consecinţă esenţială: *posibilitatea de măsură a componentelor vectorilor* pe orice direcţie cu aceeaşi unitate de lungime.

Este natural să încercăm aplicarea aceloraşi operaţii şi elementelor plane, urmărind un scop analog, cu atât mai mult, cu cât am reprezentat aceste elemente prin vectori.

Din adunarea bivectorilor rezultă şi posibilitatea de a-i descompune după două sau trei direcţii de plane orientate liniar independente din spaţiu. Această operaţie, ca şi aceea de descompunere a vectorilor, are caracter afin. Ea revine la proiectarea elementului plan orientat S pe elementele plane orientate S_1 şi S_2, de exemplu *paralel* cu $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, dacă notăm (fig. 52)

$$S=(\overline{V},\overline{W}),\quad S_1=(\overline{V}_1,\overline{W}),\quad S_2=(\overline{V}_2,\overline{W}).$$

Un punct M al lui S se proiectează în M_1, respectiv M_2. Săgeţile curbe indică orientarea bivectorilor. Obţinem astfel *componentele* S_1 şi S_2 ale bivectorului S. In cazul când planele lui S_1 şi S_2 sunt ortogonale, proiecţia va fi ortogonală şi vom numi bivectorii S_1, S_2 *componentele ortogonale* ale lui S.

Dacă orientăm planele lui S_1 şi S_2 şi alegem câte un bivector-unitate Σ_1 şi Σ_2 în aceste plane, vom putea scrie

$$S_1=\alpha_1\Sigma_1,\quad S_2=\alpha_2\Sigma_2$$

deci

$$S=\alpha_1\Sigma_1+\alpha_2\Sigma_2.$$

Scalarii α_1 şi α_2 vor fi *componentele scalare* ale bivectorului S în raport cu bivectorii-unitate Σ_1 şi Σ_2 şi vor exprima măsurile componentelor sale S_1 şi S_2.

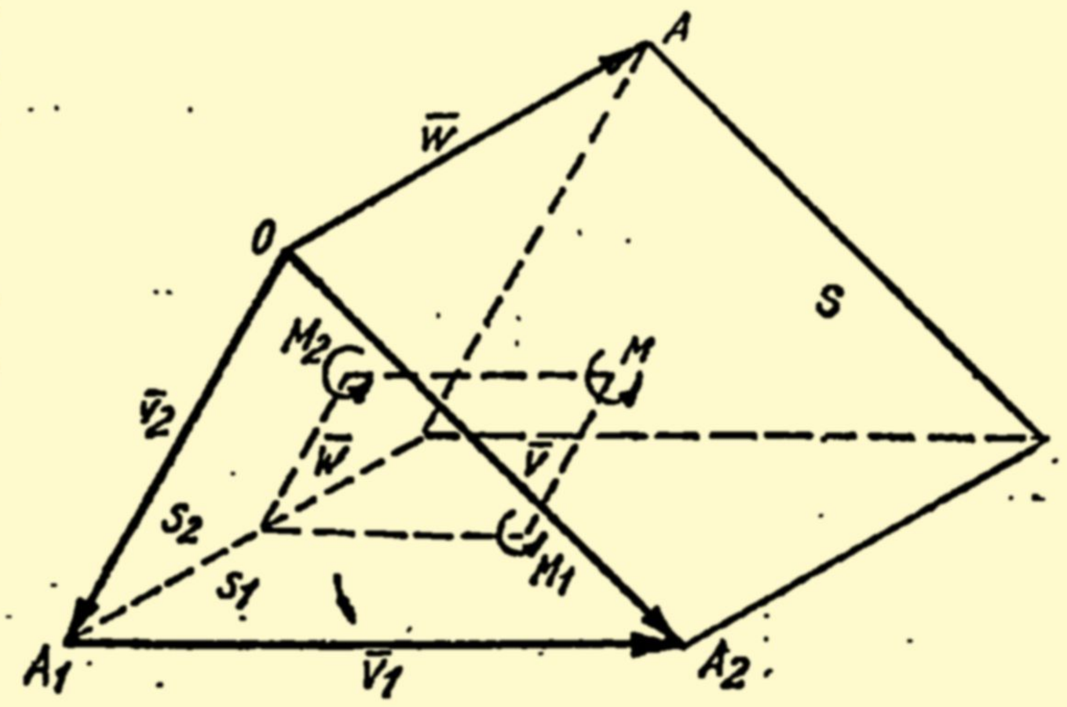


Fig. 52

Scanned with OKEN Scanner

Aceste măsuri pot fi pozitive sau negative, după cum S_1 şi S_2 au aceleaşi orientări sau orientări opuse cu bivectorii-unitate Σ_1 şi Σ_2.

Vom numi aceste măsuri *proiecţiile* bivectorului S pe planele orientate Σ_1 şi Σ_2. Se vede că semnele proiecţiilor α_1 şi α_2 depind de orientarea dată celor două plane.

In cazul când Σ_1 şi Σ_2 sunt ortogonali, α_1 şi α_2 se vor numi *proiecţiile ortogonale* ale bivectorului S pe planele orientate Σ_1 şi Σ_2.

Subliniem că analogia proiecţiei bivectorilor cu aceea a vectorilor este bazată pe orientarea planelor de proiecţie, analoagă cu aceea a axelor, considerând aceste plane cu două feţe.

Fiind dat un element plan S, orientat prin conturul său C, şi un plan P, prin proiecţie paralelă cu o direcţie Δ, obţinem în acest plan un element plan S_1 orientat prin conturul său C_1, proiecţia lui C pe P (fig. 53). In figură direcţia Δ este normală la planul P.

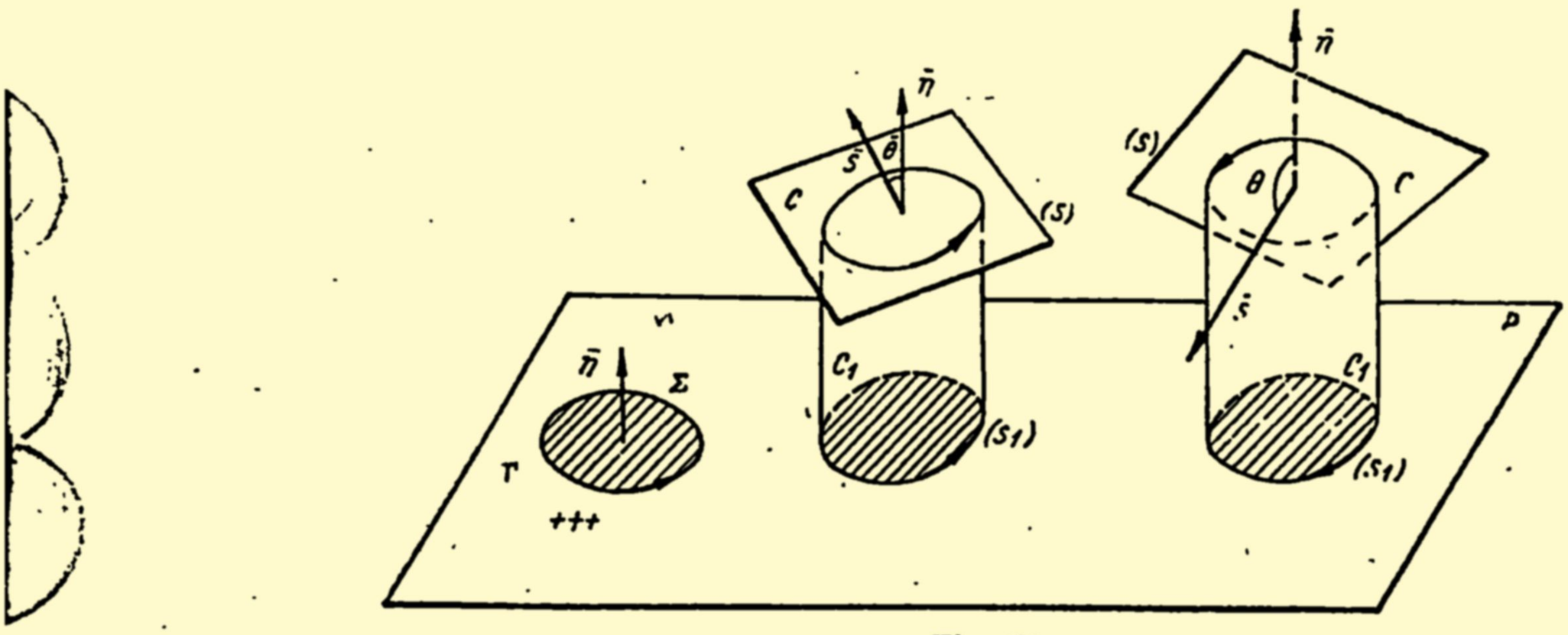


Fig. 53

S_1 va fi *componenta* lui S pe planul P. Orientând planul P printr'un element orientat Σ ales ca unitate, vom avea:

$$S_1 = \alpha\Sigma,$$

unde scalarul α va fi măsura lui S_1. Se vede că elementele orientate de orice formă pot fi proiectate paralel cu o direcţie Δ.

In particular, prin proiecţie ortogonală obţinem componente ortogonale. Măsurile acestor componente sunt *proiecţiile ortogonale* ale elementelor plane. Ele vor fi pozitive ca în fig. 53, stânga, când conturul C_1 este orientat pe faţa pozitivă a planului P la fel cu conturul Γ al elementului unitate Σ. Dimpotrivă, ele vor fi negative pentru elementele ale căror contururi se proiectează ca în fig. 53, dreapta, cu orientare opusă lui Γ.

Trecând la reprezentarea vectorială a elementelor plane orientate, observăm că proiecţia ortogonală va avea orientarea planului P, când normala pozitivă la P şi vectorul reprezentativ $\overline{S}$ al elementului S sunt de aceeaşi parte a acestui element, deci când unghiul θ format de $\overline{S}$ cu $\overline{n}$ este ascuţit şi orientarea contrară când $\overline{n}$ şi $\overline{S}$ sunt de o parte şi de alta a elementului S, deci când θ este obtuz.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste concluzii sunt analoage cu cele obţinute pentru proiecţia vectorilor pe o axă şi ne permit să substituim vectorii reprezentativi, atât elementului plan, cât şi planului de proiecţie în toate chestiunile de orientare a proiecţiei

Cum, pe de altă parte, geometria elementară arată că mărimea proiecţiei unui element plan este egală cu aria acelui element, înmulţită cu cosinusul unghiului format de normala sa cu normala la planul de proiecţie, vom avea

$$\text{măsura pr.}S \text{ pe } P = S\cos(\overline{S}, \overline{n}) \qquad (42,\text{II})$$

în toate cazurile, indiferent de orientare, deoarece cos $(\overline{S}, \overline{n})$ va determina semnul măsurii, deci a proiecţiei ariei lui S.

Proiecţia ortogonală a bivectorilor. In cazul când elementul plan orientat este un bivector $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ formula (42,II), care dă proiecţia bivectorului pe planul P, se poate pune sub o formă remarcabilă.

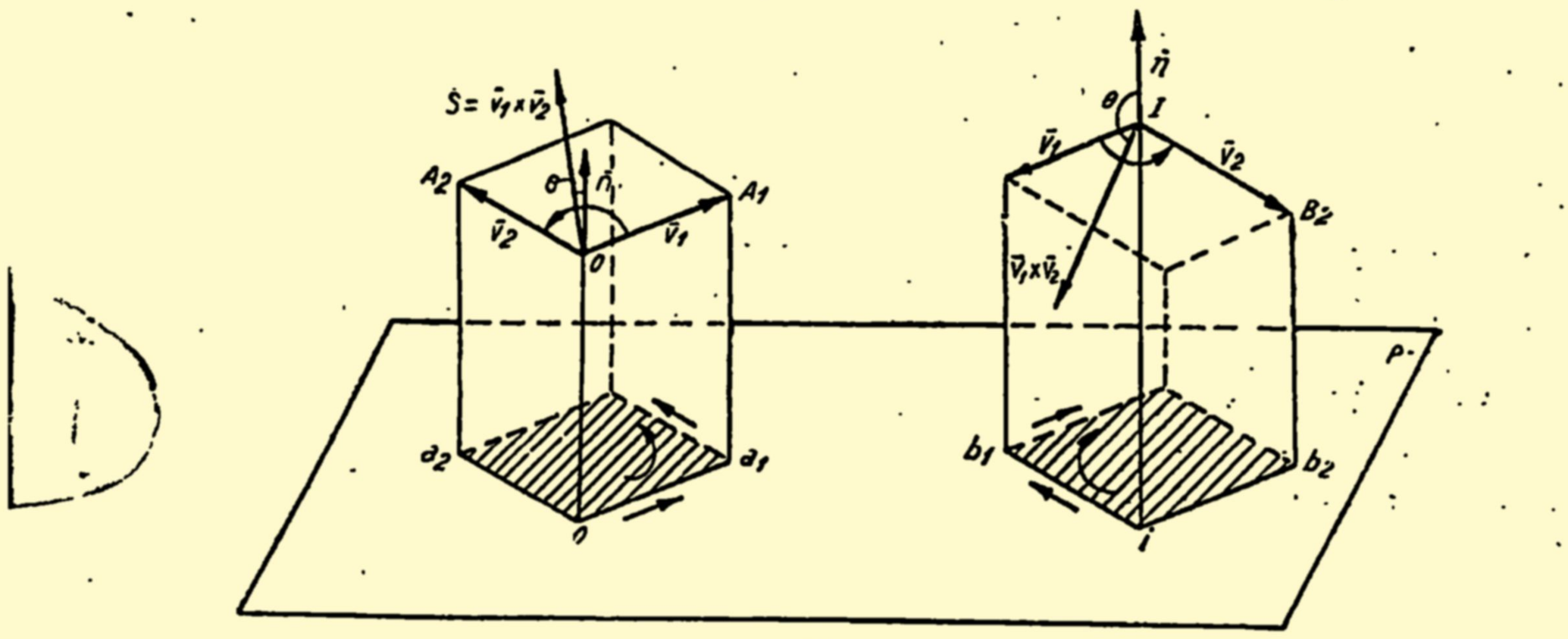


Fig. 54

In adevăr, vom avea S=aria $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$, $\overline{S} = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2$, iar

$$\cos(\overline{S}, \overline{n}) = \frac{\overline{S}\overline{n}}{S} = \frac{(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{n}}{S},$$

conform cu (28,II). Prin urmare:

$$\text{măsura proiecţiei } (\overline{V}_1, \overline{V}_2) \text{ pe planul } P = S\frac{(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{n}}{S} = (\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{n}. \qquad (43,\text{II})$$

Aria orientată, care este *măsura proiecţiei bivectorului pe planul P, se prezintă sub forma de produs scalar al unui produs vectorial cu un vector,* prin analogie cu măsura proiecţiei unui vector pe o axă, care este deasemenea un produs scalar.

Semnul acestei arii este determinat de aşezarea vectorilor $\overline{V}_1 \times \overline{V}_2$ şi $\overline{n}$ faţă de bivectorul $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$. El este pozitiv (fig. 54 stânga), când observatorul, aşezat dealungul lui $\overline{n}$, vede rotaţia lui $\overline{V}_1$ spre $\overline{V}_2$ în sens pozitiv şi negativ când (fig. 54 dreapta) această rotaţie se vede în sens negativ.

Formula (43, II) arată că în expresia acestei arii intervin vectorii $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ şi $\overline{n}$, care formează un triedru. Deosebirea între primul şi al doilea caz apare din felul în care se vede dealungul lui $\overline{n}$ rotaţia lui $\overline{V}_1$ spre $\overline{V}_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Triedrele formate de vectorii $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{n}$, diferind între ele în această privinţă, vom spune că au orientări opuse: *pozitivă* în primul caz, *negativă* în al doilea.

Proiecţia unui bivector pune deci în evidenţă două noţiuni noi: produsul scalar $(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{n}$ şi orientarea unui triedru, legate între ele prin aceea că semnul lui $(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{n}$ este determinat de această orientare.

§ 51. Triedrul orientat. Trivectorul

Orientarea dreptei şi planului sunt noţiuni impuse de modul în care se desfăşoară diferite fenomene: mişcarea într'un sens sau în sensul opus, rotaţia pe o curbă simplă închisă, etc.

Deasemenea, orientarea spaţiului printr'un triedru este impusă de anumite fenomene. Astfel: există două feluri de şuruburi, la dreapta şi la stânga. Pentru ca un şurub să înainteze în sensul axei sale, rotaţia capului şurubului în planul perpendicular pe axă se face în sens pozitiv pentru şurubul la dreapta şi în sens negativ pentru şurubul la stânga.

Această mişcare, numită *înşurubare*, se compune dintr'o translaţie şi o rotaţie. Mecanica arată că cea mai generală deplasare a unui corp solid într'un interval de timp arbitrar de mic este o *înşurubare elementară*, iar o mişcare oarecare este o succesiune de înşurubări elementare.

Un şurub poate fi reprezentat schematic printr'un triedru $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$. Dacă înşurubarea se face la dreapta, înaintarea în sensul lui $\overline{V}_3$ are loc când rotaţia lui $\overline{V}_1$ spre $\overline{V}_2$ este pozitivă.

Vom spune că un triedru $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ este *drept, pozitiv,* (dextrotors) dacă dealungul lui $\overline{V}_3$ rotaţia lui $\overline{V}_1$ spre $\overline{V}_2$ se vede în sens pozitiv. In caz contrar, triedrul se va numi *stâng, negativ,* (levotors) (fig. 55). Un triedru, pentru care s'a stabilit ordinea celor trei muchii şi sensul în care se vede rotaţia lui $\overline{V}_1$ spre $\overline{V}_2$ dealungul lui $\overline{V}_3$, se numeşte *triedru orientat.*

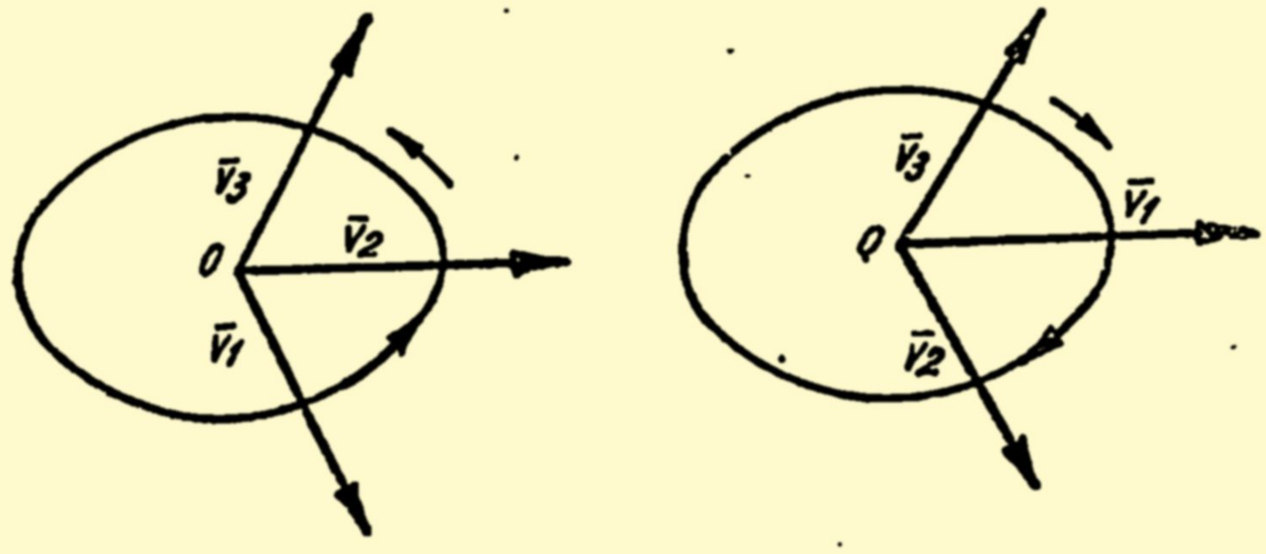


Fig. 55

Este uşor de verificat că *o permutare circulară a celor trei muchii nu schimbă orientarea triedrului, dar o permutare a două muchii între ele transformă un triedru drept în altul stâng şi invers.*

Prin aceste proprietăţi triedrul, figură formată de trei vectori, se aproprie de bivector, figura formată de doi vectori.

Pentru aceste motive, vom numi triedrul orientat *trivector.* Facem observaţia următoare: după cum toţi vectorii de pe o dreaptă au aceeaşi direcţie, diferind ca orientare şi modul, după cum toţi bivectorii din acelaşi plan au aceeaşi direcţie, diferind prin orientare şi modul, deasemenea vom considera toţi trivectorii din spaţiul cu trei dimensiuni ca având aceeaşi direcţie, diferind doar prin orientare şi prin modul.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a putea compara în direcţie doi trivectori, ar fi necesar să considerăm un spaţiu cu cel puţin patru dimensiuni, adică un spaţiu în care vectorii au cel puţin patru componente. Intr'un astfel de spaţiu, extinzând proprietăţile geometrice cunoscute din spaţiul cu trei dimensiuni, am avea o infinitate de spaţii cu trei dimensiuni, aşa cum avem o infinitate de plane în spaţiul tridimensional.

In acest caz, un trivector ar defini un spaţiu cu trei dimensiuni, două spaţii diferite fiind definite de doi trivectori diferiţi *ca direcţie.*

Aceste consideraţii, care par pure abstracţii matematice, îşi găsesc utilizarea în Fizica teoretică şi în aplicaţiile sale.

§ 52. Produsul mixt

Proiecţia ortogonală a bivectorilor pune în evidenţă un exemplu de trivector: triedrul format de bivectorul $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ şi versorul normalei $\overline{n}$ la planul de proiecţie. Măsura proiecţiei, dată de (43,II), se exprimă prin produsul scalar $(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{n}$.

Să calculăm acest produs scalar, care joacă un rol atât de important în calculul proiecţiei, în cazul general al unui trivector oarecare $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$, format din trei vectori necoplanari.

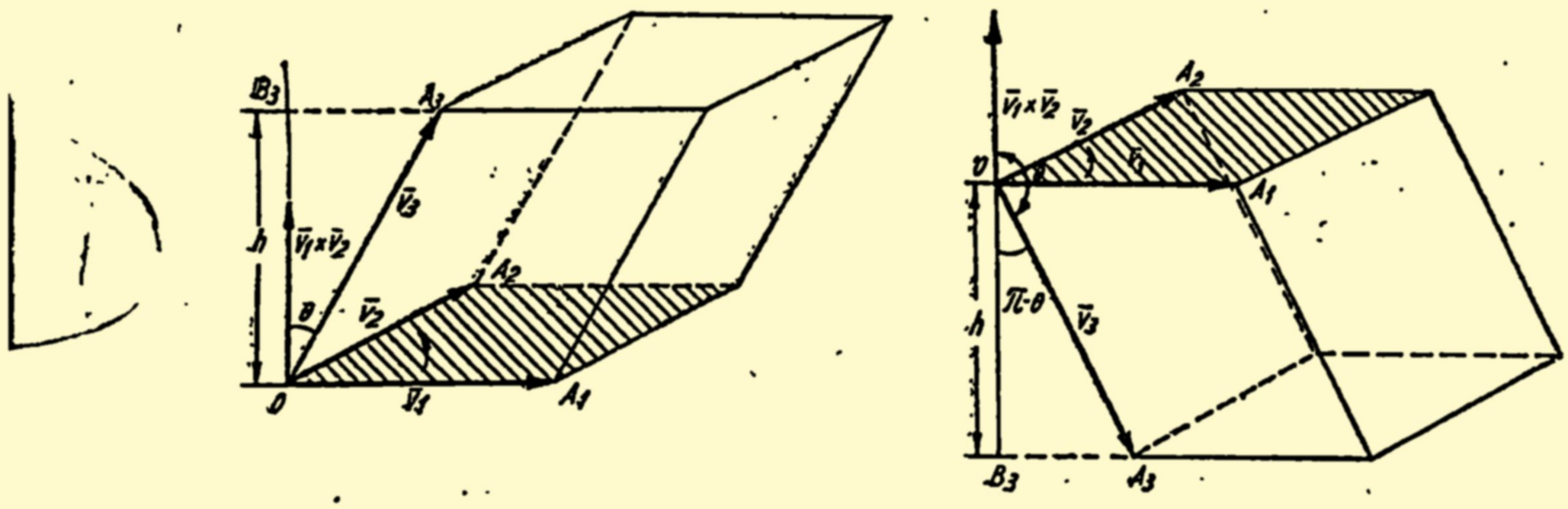


Fig. 56

Vom numi *produs mixt* al vectorilor $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ produsul scalar

$$(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{V}_3$$

al produsului vectorial $\overline{V}_1 \times \overline{V}_2$ cu vectorul $\overline{V}_3$.

Aplicând definiţia produsului scalar, vom scrie

$$(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{V}_3 = |\overline{V}_1 \times \overline{V}_2| V_3 \cos\theta. \qquad (44,II)$$

Dar $|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2|$ este aria paralelogramului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$, iar $V_3 \cos\theta$ este măsura algebrică a proiecţiei vectorului $\overline{V}_3$ pe normala pozitivă a bivectorului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$, cu alte cuvinte înălţimea h a paralelipipedului format pe cei trei vectori, considerată ca pozitivă sau negativă. Mărimea $h = V_3 \cos\theta$ este pozitivă când triedrul $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$ este pozitiv, şi negativă în cazul contrar (fig. 56).

Vom putea scrie egalitatea (44,II) astfel:

$(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{V}_3 = Sh =$ Volumul orientat al paralelipipedului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare: *produsul mixt a trei vectori este egal în valoare absolută cu volumul paralelipipedului format de cei trei vectori.* El are semnul plus sau minus după cum triedrul $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$ este drept sau stâng (cele două cazuri sunt reprezentate în fig. 56).

Vom spune că produsul mixt reprezintă *volumul orientat* al paralelipipedului $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$.

După cum lungimea segmentului orientat este modulul vectorului, aria paralelogramului orientat este modulul bivectorului, volumul paralelipipedului orientat va fi considerat ca *modulul trivectorului* $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$.

Facem observaţia că o permutare circulară a vectorilor V_1, V_2, V_3 nu schimbă orientarea triedrului. Pe de altă parte, nici volumul paralelipipedului nu se schimbă când alegem altă faţă ca bază. Deci: $(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3)\overline{V}_1$ şi $(\overline{V}_3 \times \overline{V}_1)\overline{V}_2$ reprezintă în mărime şi semn acelaşi volum orientat şi avem egalităţile:

$$(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{V}_3 = (\overline{V}_2 \times \overline{V}_3)\overline{V}_1 = (\overline{V}_3 \times \overline{V}_1)\overline{V}_2. \qquad (45,II)$$

Produsul mixt nu se schimbă prin permutarea circulară a celor trei factori.

In particular:

$$(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{V}_3 = (\overline{V}_2 \times \overline{V}_3)\overline{V}_1 = \overline{V}_1(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3). \qquad (46,II)$$

Se vede că dacă facem convenţia de a scrie pe scurt produsul mixt sub forma

$$\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3 \text{ sau } (\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3);\ [\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3] \qquad (47,II)$$

fără a specifica niciun semn de înmulţire, în baza egalităţilor (46,II) vom putea considera fie $(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\overline{V}_3$, fie $\overline{V}_1(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3)$ ca expresie a produsului mixt, fără posibilitate de eroare [1]).

Vom scrie deobicei produsul mixt sub forma (47,II). Dacă am folosi semnul „punct“ pentru produsul scalar, am putea scrie

$$(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) \cdot \overline{V}_3 = \overline{V}_1 \cdot (\overline{V}_2 \times \overline{V}_3)$$

şi am spune: *în produsul mixt putem schimba semnul* $\times$ *cu semnul* $\cdot$, *fără ca acesta să-şi schimbe valoarea.*

In scrierea $\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3$ *este necesar să atragem atenţia că oricum am plasa semnul* $\times$, *produsul vectorial trebue efectuat întâi şi apoi produsul scalar.*

O permutare a doi factori într'un produs mixt schimbă semnul produsului, deci

$$\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3 = -\overline{V}_2\overline{V}_1\overline{V}_3.$$

Produsul mixt se anulează dacă unul din factori este nul, sau dacă cei trei vectori sunt coplanari, deoarece în ambele cazuri volumul este nul.

Deducem imediat:

Condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori nenuli să fie coplanari, este ca produsul lor mixt să fie nul.

$$\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3 = 0 \qquad (48,II)$$

reprezintă condiţia de coplanaritate a trei vectori sub formă metrică.

[1]) Scrierea $[\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3]$ atrage atenţia asupra unei operaţii numită produs exterior, în care produsul mixt se încadrează ca un caz particular (§ 69).

Scanned with OKEN Scanner

Produsul mixt este distribuitiv față de adunare:

$$(\overline{A}+\overline{B})\overline{C}\,\overline{D}=\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}. \qquad (49,II)$$

Proprietatea rezultă imediat din faptul că atât produsul scalar, cât și produsul vectorial sunt distributive. Din punct de vedere geometric, ea permite adunarea volumelor paralelipipedelor, care au fie baza, fie o muchie comună, și transformarea solidului astfel obținut într'un paralelipiped echivalent ca volum.

Produsul mixt, fiind un produs scalar, este o mărime măsurabilă cu o unitate. Totuși, spre deosebire de un scalar obișnuit, el își schimbă semnul, dacă schimbăm orientarea spațiului.

In adevăr, dacă alegem ca sens pozitiv de rotație sensul acelor ceasornicului, toți bivectorii își vor schimba orientarea și deci volumele orientate își vor schimba semnul.

Din această cauză vom spune că produsul mixt este *o mărime pseudoscalară*[1]).

El rezultă din produsul scalar al unui vector axial cu un vector polar, iar schimbarea semnului său, odată cu schimbarea orientării spațiului, provine tocmai din faptul că vectorul axial își schimbă orientarea în acest caz.

Aplicație: *Relația între patru vectori din spațiul cu trei dimensiuni.* Noțiunea de produs mixt permite exprimarea relației fundamentale între patru vectori din spațiul cu trei dimensiuni sub o formă intrinsecă, adică independentă de alegerea unui anume triedru fundamental (§ 29).

Știm că între patru vectori $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$, $\overline{V}_4$ există relația:

$$\alpha_1\overline{V}_1+\alpha_2\overline{V}_2+\alpha_3\overline{V}_3+\alpha_4\overline{V}_4=0, \qquad (50,II)$$

scalarii α_1, α_2, α_3, α_4 nefiind toți nuli.

Inmulțind scalar în ambii membri cu $\overline{V}_2\times\overline{V}_3$, obținem:

$$\alpha_1(\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3)+\alpha_2(\overline{V}_2\overline{V}_2\overline{V}_3)+\alpha_3(\overline{V}_3\overline{V}_2\overline{V}_3)+\alpha_4(\overline{V}_4\overline{V}_2\overline{V}_3)=0.$$

Ținând seama că produsele mixte, în care doi factori sunt egali sau proporționali, sunt nule, avem deci:

$$\alpha_1(\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3)+\alpha_4(\overline{V}_4\overline{V}_2\overline{V}_3)=0.$$

Vom pune ipoteza că cei patru vectori nu sunt coplanari, deoarece în acest ultim caz problema s'ar reduce la o problemă în plan. Putem deci presupune că $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt necoplanari, adică $\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3\neq 0$, ceeace ne permite să deducem:

$$\alpha_1=-\frac{\overline{V}_2\overline{V}_3\overline{V}_4}{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3}\alpha_4.$$

Deoarece $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt liniar independenți, trebue ca $\alpha_4\neq 0$, cum rezultă din (50, II). Inmulțind în această relație cu $\overline{V}_3\times\overline{V}_1$ și $\overline{V}_1\times\overline{V}_2$, vom avea și

$$\alpha_2=-\frac{\overline{V}_3\overline{V}_1\overline{V}_4}{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3}\alpha_4; \qquad \alpha_3=-\frac{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_4}{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3}\alpha_4.$$

---

[1]) Aria orientată în plan și segmentul orientat pe dreaptă sunt deasemenea pseudoscalari în geometria plană, respectiv pe o dreaptă. Putem sintetiza spunând: măsura unui element de spațiu este o mărime pseudo scalară în spațiul cu același număr de dimensiuni ca și elementul considerat: $n=3$, volum; $n=2$, arie; $n=1$, lungime; toate orientate în spațiul respectiv.

Scanned with OKEN Scanner

Introducând aceste valori în (50, II), relația fundamentală devine:

$$\overline{V}_4=\frac{\overline{V}_2\overline{V}_3\overline{V}_4}{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3}\overline{V}_1+\frac{\overline{V}_3\overline{V}_1\overline{V}_4}{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3}\overline{V}_2+\frac{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_4}{\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3}\overline{V}_3 \qquad (51,II)$$

sau sub o formă echivalentă:

$$\overline{V}_1(\overline{V}_2\overline{V}_3\overline{V}_4)-\overline{V}_2(\overline{V}_3\overline{V}_4\overline{V}_1)+\overline{V}_3(\overline{V}_4\overline{V}_1\overline{V}_2)-\overline{V}_4(\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3)=0, \qquad (52,II)$$

Relația (51,II) ne dă expresia unui vector oarecare $\overline{V}_4$, raportat la un triedru oarecare $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$, analoagă cu cea găsită în cazul când raportăm spațiul la un triedru fundamental format cu versorii ortogonali $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Este interesant de observat că relația fundamentală (50,II), care este o relație geometrică liniară, se exprimă independent de alegerea unui triedru fundamental, când utilizăm o noțiune vectorială metrică, produsul mixt. Se poate însă arăta *că volumul tetraedrului sau paralelipipedului este o noțiune geometrică afină*, adică o noțiune care nu presupune măsurarea și compararea lungimilor în toate direcțiile spațiului.

§ 53. Componentele scalare în raport cu un triedru oarecare

Relația (51,II) arată că, după cum produsul scalar ne-a dat posibilitatea de a evalua componentele scalare ale unui vector după trei direcții ortogonale, tot așa produsul mixt ne permite să evaluăm aceste componente pe trei direcții oarecare necoplanare.

Fie un vector $\overline{V}$ și alți trei vectori necoplanari $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ cu care formăm un triedru $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ (fig. 57). Relația (51,II) se scrie:

$$\overline{V}=\frac{\overline{v}\,\overline{w}\,\overline{V}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}\overline{u}+\frac{\overline{w}\,\overline{u}\,\overline{V}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}\overline{v}+\frac{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{V}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}\overline{w} \quad (\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}\neq 0). \qquad (53,II)$$

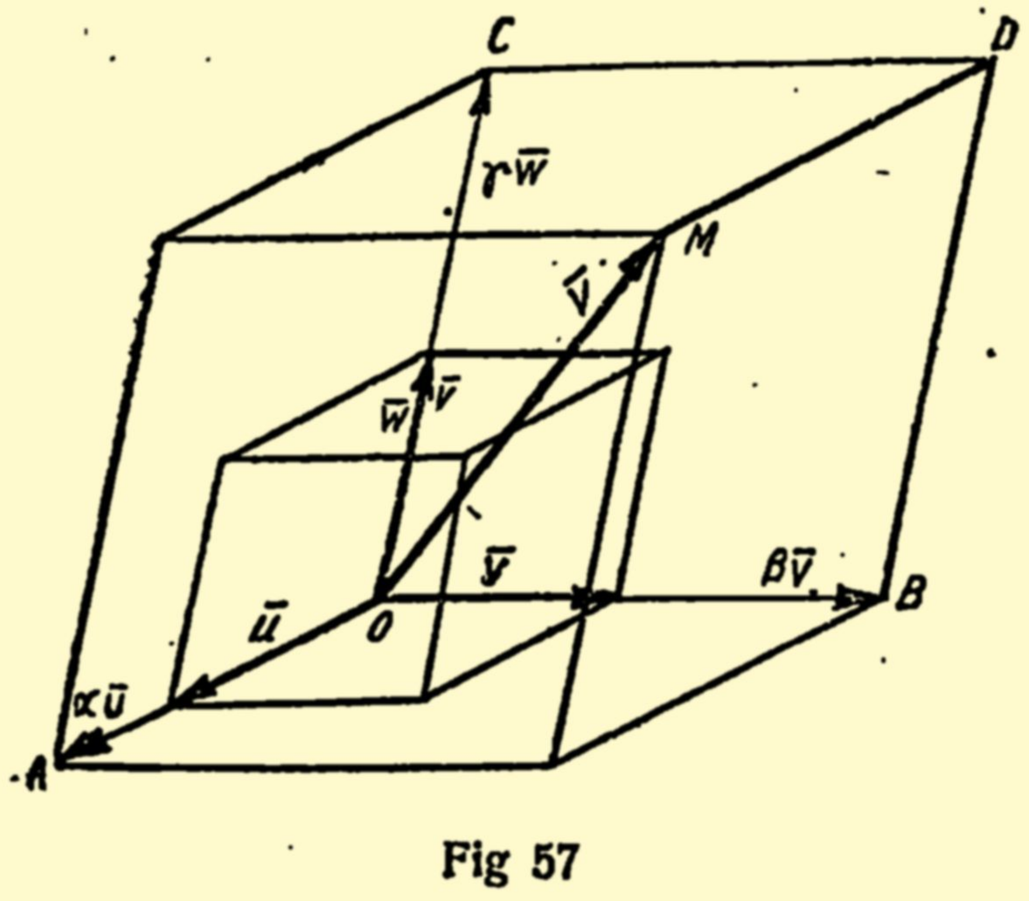


Fig 57

Dar descompunerea unui vector după trei direcții necoplanare este unică, deci componentele scalare ale lui $\overline{V}$, după direcțiile $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, vor fi

$$\alpha=\frac{\overline{v}\,\overline{w}\,\overline{V}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}; \quad \beta=\frac{\overline{w}\,\overline{u}\,\overline{V}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}; \qquad (54,II)$$

$$\gamma=\frac{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{V}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}.$$

Cantitățile α, β, γ sunt rapoarte de volume orientate, deci numere reale reprezentând măsurile volumelor dela numărător prin volumul $(\overline{u}\overline{v}\overline{w})$ dela numitori.

Se vede că dacă luăm ca vectori-unitate pe *fiecare* din cele trei direcții $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, vectorii respectivi $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, fără a-i compara între ei, volumul paralelipipedului $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ poate fi considerat ca volum-unitate, astfel încât α, β, γ *pot fi evaluate prin măsurare de volume*, lungimile respective luate pe cele trei direcții fundamentale nefiind comparate între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Vom reține deci, semnificația componentelor scalare α, β, γ dată de formulele (54); *ele sunt măsurile volumelor paralelipipedelor* $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{V})$, $(\bar{w}, \bar{n}, \bar{V})$ *și* $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{V})$ *în raport cu volumul-unitate* $\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}$.

Formula (53,II) este generală și cu interpretarea dată lui α, β, γ ea este valabilă și în geometria afină.

In cazul particular când $\bar{u}=\bar{i}$, $\bar{v}=\bar{j}$, $\bar{w}=\bar{k}$, ea se reduce la formula (41, II). In adevăr, vom avea

$$(\bar{j}\,\bar{k}\,\bar{V})=(\bar{j}\times\bar{k})\;\bar{V}=\bar{i}\,\bar{V},$$

deoarece $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$, cum ne putem asigura ușor ținând seamă de (39′, II). In același timp

$$\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}=(\bar{i}\times\bar{j})\,\bar{k}=\bar{i}\,(\bar{j}\times\bar{k})=\bar{i}\,\bar{i}=1.$$

Prin urmare formula:

$$\bar{V}=\frac{\bar{j}\,\bar{k}\,\bar{V}}{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}}\bar{i}+\frac{\bar{k}\,\bar{i}\,\bar{V}}{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}}\bar{j}+\frac{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{V}}{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}}\bar{k}$$

devine

$$\bar{V}=(\bar{i}\,\bar{V})\bar{i}+(\bar{j}\,\bar{V})\bar{j}+(\bar{k}\,\bar{V})\bar{k}.$$

Această formulă, deși mult mai simplă decât cea generală (53, II) *ascunde adevărata semnificație geometrică a componentelor scalare* α, β, γ, *înfățișându-le în cazul triedrului ortogonal ca simple proiecții ortogonale ale vectorului* $\bar{V}$ *pe cele trei axe.*

Această constatare merită să fie subliniată, deoarece se repetă și în alte împrejurări.

Alegerea unui sistem de referință particular aduce după sine simplificări considerabile, în cazul când ea este făcută judicios, adică ținându-se seama de fenomenul urmărit. In același timp, anumite mărimi, legate de alegerea acestui triedru, se particularizează, sau sunt înlocuite cu altele mai simple.

Intrepretarea formulelor se face atunci în termeni care nu mai sunt valabili în cazul general și anumite mărimi apar sub un aspect prea particular. Este destul să citățm toate mărimile care au fost introduse întâi ca scalare, pentru a se constata ulterior că în realitate sunt vectoriale sau chiar mai complexe.

Statica plană consideră momentul static ca un scalar, ceeace devine imposibil în spațiu, unde momentul este un bivector legat reprezentabil printr'un vector, ceeace la rândul său nu mai este posibil într'un spațiu cu patru dimensiuni.

Calculul vectorial, independent prin însăși structura sa, de alegerea unui sistem de referință, are calitatea de a scoate în lumină adevărata natură a unor mărimi, care apar uneori sub înfățișări ce conduc la confuzii.

Trebue, însă, să recunoaștem că el însuși este afectat de aceleași neajunsuri în unele privințe, deoarece desvoltându-se în spațiul cu trei dimensiuni, scapă adevărata semnificație a mărimilor ce provin din mărimi geometrice multidimensionale, prin particularizarea numărului de dimensiuni, cum este trivectorul, care este lipsit de mobilitate în spațiul cu trei dimensiuni, toți trivectorii având aceeași direcție, cum am observat anterior,

Scanned with OKEN Scanner

Deaceea, este necesar să examinăm toate mărimile fizice care apar în studiul fenomenelor, independent de alegerea vreunui sistem de referinţă, deoarece, prin însăşi natura lor, ele nu depind de modul particular în care sunt măsurate în raport cu spaţiul decât prin valorile numerice, obţinute pentru componentele lor scalare.

§ 54. Vectori reciproci şi triedre reciproce

Pentru a trece dela o expresie simplă, stabilită printr'o alegere particulară a sistemului de referinţă, la expresia corespunzătoare cazului general, este nevoie să redăm semnificaţia largă noţiunilor particularizate.

In acest caz, este posibil ca forma simplă a formulelor să se menţină şi în cazul general. Astfel, putem da formulei (53, II) de descompunere a unui vector în raport cu un triedru oarecare, înfăţişarea formulei (41, II), valabilă numai pentru un triedru $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ format de trei versori ortogonali.

In adevăr, notând componentele scalare cu λ, μ, ν, putem scrie conform cu (54, II).

$$\lambda = \frac{\bar{v}\bar{w}\bar{V}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}} = \frac{(\bar{v}\times\bar{w})\bar{V}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}} = \left(\frac{\bar{v}\times\bar{w}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}\right)\bar{V} = \bar{u}'\bar{V}.$$

dacă notăm

$$\bar{u}' = \frac{\bar{v}\times\bar{w}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}.$$

Vom avea deasemenea:

$$\mu = \bar{v}'\bar{V}, \quad \nu = \bar{w}'\bar{V},$$

dacă punem

$$\bar{v}' = \frac{\bar{w}\times\bar{u}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}; \quad \bar{w}' = \frac{\bar{u}\times\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}} \tag{55,II}$$

Cu aceste notaţii, formula (53,II) devine:

$$\bar{V} = (\bar{u}'\bar{V})\bar{u} + (\bar{v}'\bar{V})\bar{v} + (\bar{w}'\bar{V})\bar{w} \tag{56,II}$$

şi *reprezintă expresia unui vector* $\bar{V}$, *raportat la un triedru oarecare* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Analogia cu formula (41,II) este evidentă, deosebirea constând în introducerea vectorilor $\bar{u}'\ \bar{v}'\ \bar{w}'$ în produsele scalare.

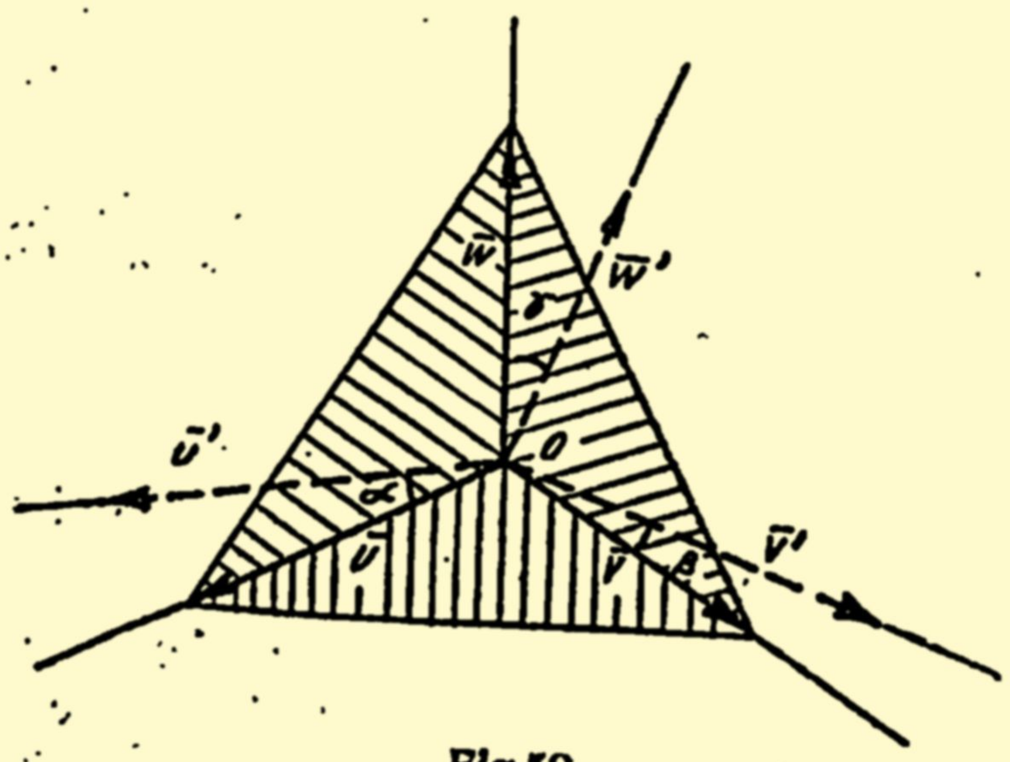


Fig.58

Vectorii $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$, determinaţi prin formulele (55,II), se numesc *reciprocii vectorilor* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Orice sistem de trei vectori liniar independenţi admite un sistem de vectori reciproci, deci oricărui triedru nedegenerat $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ *îi corespunde un triedru reciproc* $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$.

Vectorii reciproci sunt perpendiculari pe feţele triedrului $(\bar{v}, \bar{w})$, etc., deci $\bar{u}'$ corespunde bivectorului $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, şi anume: $\bar{u}'$ pe faţa $(\bar{v}, \bar{w})$, etc. (fig. 58).

Scanned with OKEN Scanner

In general, vectorii reciproci diferă de vectorii daţi. Pentru ca $\overline{u}'$ să fie coliniar cu $\overline{u}$, ar trebui ca $\overline{u}$ să fie perpendicular pe $(\overline{v}, \overline{w})$, deci în particular pe $\overline{v}$ şi $\overline{w}$.

Vectorii reciproci sunt coliniari cu vectorii daţi, dacă aceştia sunt ortogonali doi câte doi, deci dacă formează un triedru ortogonal. In acest caz, triedrul reciproc se suprapune pe triedrul dat, $\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}'$ fiind proporţionali respectiv cu $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$.

In particular, *reciprocii versorilor ortogonali* $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, sunt chiar $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

In adevăr, vom avea

$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}, \quad \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}, \quad \overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}, \quad \overline{i}\,\overline{j}\,\overline{k} = 1, \tag{57,II}$$

de unde

$$\overline{i}' = \overline{i}, \quad \overline{j}' = \overline{j}, \quad \overline{k}' = \overline{k}, \tag{58,II}$$

deci: *triedrul reciproc al triedrului* $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ *este el însuşi.* Ţinând seamă de (58,II), formula (56,II) se reduce imediat la (41,II), dând reprezentarea unui vector raportat la triedrul fundamental ortogonal $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$,

Să notăm cu α, β, γ unghiurile făcute respectiv de $\overline{u}'$ cu $\overline{u}$, $\overline{v}'$ cu $\overline{v}$, $\overline{w}'$ cu $\overline{w}$ (fig. 58).

Pentru a calcula aceste unghiuri vom face produsele scalare:

$$\overline{u}\,\overline{u}' = \overline{u}\,\frac{\overline{v} \times \overline{w}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}} = 1, \quad \overline{v}\,\overline{v}' = 1, \quad \overline{w}\,\overline{w}' = 1.$$

Aceste formule sunt importante. Din prima deducem

$$uu' \cos\alpha = 1, \quad \cos\alpha = \frac{1}{uu'} > 0 \quad (u, u' > 0).$$

Deci, unghiul α este ascuţit. Prin urmare: *unghiurile făcute de muchiile unui triedru cu muchiile reciprocului său sunt ascuţite.*

Pe de altă parte, α nu este decât unghiul făcut de muchia $\overline{u}$ cu înălţimea paralelipipedului format de $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, deci $u \cos\alpha = h$, de unde

$$u' = \frac{1}{h},$$

formulă care determină modulul lui $\overline{u}'$: *modulele reciprocilor* $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$ *sunt egale cu inversele înălţimilor paralelipipedului* $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ corespunzătoare alegerii bivectorilor $(\overline{v}, \overline{w})$, $(\overline{w}, \overline{u})$, $(\overline{u}, \overline{v})$ ca baze succesive ale paralelipipedului.

Dacă efectuăm produsele scalare de forma $\overline{u}\,\overline{v}'$ vom avea

$$\overline{u}\,\overline{v}' = \overline{u}\,\frac{\overline{w} \times \overline{u}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}} = \frac{\overline{u}\,\overline{w}\,\overline{u}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}} = 0, \text{ etc.}$$

Se vede deci, că vectorii reciproci sunt legaţi de cei daţi prin relaţiile următoare:

$$\begin{aligned} &\overline{u}\,\overline{u}' = \overline{v}\,\overline{v}' = \overline{w}\,\overline{w}' = 1; \\ &\overline{u}\,\overline{v}' = \overline{u}'\overline{v} = 0; \quad \overline{v}\,\overline{w}' = \overline{v}'\overline{w} = 0; \quad \overline{w}\,\overline{u}' = \overline{w}'\overline{u} = 0 \end{aligned} \tag{59,II}$$

care generalizează formulele (39,II), prin care sunt legaţi cei trei vectori ortogonali $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste formule vom putea deduce expresiile reciprocilor $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$ în funcţie de $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ pe cale pur algebrică.

Ecuaţiile $\bar{v}\bar{u}'=0$, $\bar{w}\bar{u}'=0$ arată că $\bar{u}'$ este perpendicular pe $\bar{v}$ şi $\bar{w}$, deci coliniar cu produsul vectorial $\bar{v}\times\bar{w}$, adică de forma

$$\bar{u}'=\lambda\ (\bar{v}\times\bar{w}).$$

Introducând în ecuaţia $\bar{u}\bar{u}'=1$, obţinem

$$1=\lambda\,\bar{u}\,(\bar{v}\times\bar{w});\quad \lambda=\frac{1}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}},$$

de unde

$$\bar{u}'=\frac{\bar{v}\times\bar{w}}{\bar{u}\,\bar{v}\bar{w}};\quad \bar{v}'=\frac{\bar{w}\times\bar{u}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}};\quad \bar{w}'=\frac{\bar{u}\times\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}\quad (\bar{u}\bar{v}\bar{w}\neq 0);$$

$$\bar{u}=\frac{\bar{v}'\times\bar{w}'}{\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}'};\quad \bar{v}=\frac{\bar{w}'\times\bar{u}'}{\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}'};\quad \bar{w}=\frac{\bar{u}'\times\bar{v}'}{\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}'}. \qquad (60,\text{II})$$

Formulele din linia a doua, care dau expresia vectorilor $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ în funcţie de reciprocii lor $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$, se obţin imediat, observând simetria relaţiilor (59,II), prin permutarea literelor accentuate cu cele neaccentuate. Ele arată reciprocitatea celor două sisteme de vectori $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ şi $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$, fiecare dintre ele fiind reciprocul celuilalt.

Pentru ca formulele (60,II) să fie valabile, este necesar ca produsul mixt $\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}'\neq 0$, deci, ca vectorii reciproci $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$ să fie linear independenţi. Această proprietate rezultă uşor din observaţia că vectorii $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$ sunt normali la feţele triedrului $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Dacă ei ar fi coplanari, ar trebui ca planele bivectorilor $(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{v}, \bar{w})$, $(\bar{w}, \bar{u})$ să fie paralele cu aceeaşi dreaptă, ceeace este exclus prin faptul că ele formează un triedru nedegenerat.

Să cercetăm mai amănunţit relaţiile între un triedru şi reciprocul său, punându-ne, de exemplu, problema: reciprocul unui triedru oarecare poate fi un triedru ortogonal?

Folosind produsul scalar pentru a calcula unghiul făcut de $\bar{u}'$ cu $\bar{v}'$, vom avea:

$$\bar{u}'\bar{v}'=\left(\frac{\bar{v}\times\bar{w}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}\right)\cdot\left(\frac{\bar{w}\times\bar{u}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}\right)=\frac{(\bar{v}\times\bar{w})\,(\bar{w}\times\bar{u})}{(\bar{u}\bar{v}\bar{w})^2}.$$

Suntem deci conduşi la calculul unor expresii vectoriale noi. Numărătorul este un *produs scalar de produse vectoriale, iar numitorul, pătratul unui produs mixt.*

Considerând expresia $(\bar{w}\times\bar{u})\,(\bar{v}\times\bar{w})$ ca un produs mixt, vom putea scrie

$$(\bar{w}\times\bar{u})\,(\bar{v}\times\bar{w})=\bar{w}\bar{u}(\bar{v}\times\bar{w})=\bar{w}\,[\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})]. \qquad (61,\text{II})$$

Suntem astfel conduşi să examinăm un produs vectorial în care *unul din factori este el însuşi produs vectorial.*

Dacă ne punem problema mai simplă a orientării triedrului reciproc în raport cu orientarea triedrului dat, va trebui să calculăm produsul mixt $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$. Vom scrie deci:

$$\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}'=(\bar{v}\times\bar{w})\,[(\bar{w}\times\bar{u})\times(\bar{u}\times\bar{v})], \qquad (62,\text{II})$$

Scanned with OKEN Scanner

relaţie care pune în evidenţă un produs vectorial de produse vectoriale, înparanteza mare.

Introducerea triedrului reciproc are drept consecinţă necesitatea examinării unor noi expresii vectoriale şi a calculului acestora cu ajutorul vectorilor daţi $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

§. 55. Dublul produs vectorial

Produsul vectorial

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$$

introdus prin formula (61,II), se numeşte *dublu produs vectorial* al vectorilor $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. El poate fi reprezentat printr'un vector a cărui construcţie geometrică este imediată.

Să presupunem că cei trei vectori $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ nu sunt coplanari şi că formează un triedru drept (fig. 59).

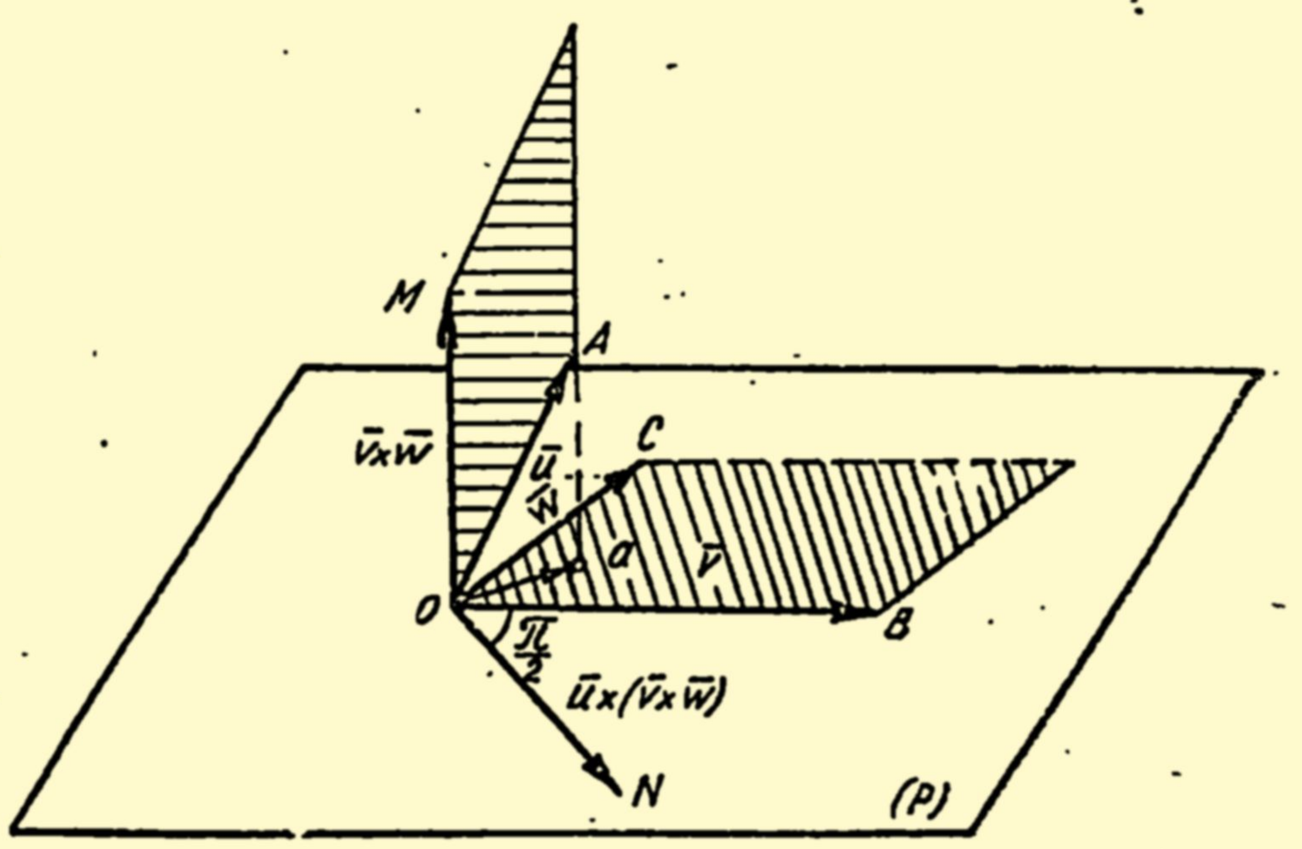


Fig. 59

Produsul vectorial $\bar{v} \times \bar{w}$ va fi figurat prin vectorul $\overline{OM}$, perpendicular pe planul P, format de $\bar{v}$ şi $\bar{w}$. Produsul vectorial $\bar{u} \times \overline{OM}$ va fi un vector $\overline{ON}$, perpendicular pe planul format de $\bar{u}$ şi $\overline{OM}$, cu orientarea determinată. Deoarece produsul vectorial este perpendicular pe fiecare din cei doi factori ai săi, $\overline{ON}$ va fi perpendicular pe $\overline{OM}$. Dar acesta este perpendicular pe planul P, care conţine orice vector perpendicular pe $\overline{OM}$. Prin urmare, $\overline{ON}$ este un vector din planul P, perpendicular pe $\overline{OA} = \bar{u}$.

Luând proiecţia $\overline{Oa}$ a lui $\overline{OA}$ pe planul P, putem preciza că $\overline{ON}$ este în acest plan şi perpendicular pe Oa.

Dublul produs vectorial $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ *este reprezentat printr'un vector din planul bivectorului* $(\bar{v}, \bar{w})$, *perpendicular pe* $\bar{u}$ *şi pe proiecţia lui* $\bar{u}$ *pe planul* $(\bar{v}, \bar{w})$.

El se exprimă ca o combinaţie liniară vectorială de forma

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \alpha\bar{v} + \beta\bar{w}, \qquad (63,II)$$

unde α, β sunt doi scalari determinaţi. Această expresie ne sugerează să punem produsul vectorial sub forma (63,II), *oricare* ar fi cei trei vectori $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Dublul produs vectorial s'a întrodus prin formula (61,II) în evaluarea produsului scalar $\bar{u}'\bar{v}'$. Să presupunem că $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sunt trei vectori oarecare şi să reducem membrul întâi al acestei formule la o expresie cunoscută, calculând $(\bar{w} \times \bar{u})(\bar{v} \times \bar{w})$.

Avem identic:

$$2(\bar{w}\times\bar{u})(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{w}\times\bar{u}+\bar{v}\times\bar{w})^2-(\bar{w}\times\bar{u})^2-(\bar{v}\times\bar{w})^2=$$
$$=[\bar{w}\times(\bar{u}-\bar{v})]^2-(\bar{w}\times\bar{u})^2-(\bar{v}\times\bar{w})^2. \qquad (64,II)$$

Să aplicăm identitatea lui Lagrange (38,II) celor trei termeni din membrul al doilea, scriind:

$$[\bar{w}\times(\bar{u}-\bar{v})]^2=w^2(\bar{u}-\bar{v})^2-[\bar{w}(\bar{u}-\bar{v})]^2=$$
$$=\bar{w}^2(u^2-2\,\bar{u}\bar{v}+v^2)-(\bar{w}\,\bar{u})^2+2\,(\bar{w}\,\bar{u})\,(\bar{w}\,\bar{v})-(\bar{w}\bar{v})^2;$$
$$(\bar{w}\times\bar{u})^2=w^2u^2-(\bar{w}\bar{u})^2;\quad (\bar{v}\times\bar{w})^2=v^2w^2-(\bar{v}\,\bar{w})^2.$$

Înlocuind în (64,II), după simplificări, obţinem identitatea

$$(\bar{w}\times\bar{u})(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{w}\,\bar{u})(\bar{w}\,\bar{v})-w^2(\bar{u}\,\bar{v})=\bar{w}\,[\bar{v}(\bar{u}\,\bar{w})-\bar{w}(\bar{u}\bar{v})],$$

astfel încât identitatea (61,II), dela care am plecat, se va scrie:

$$\bar{w}[\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})]=\bar{w}[\bar{v}(\bar{u}\,\bar{w})-\bar{w}(\bar{u}\,v)], \qquad (65,II)$$

sau trecând toţi termenii în primul membru:

$$\bar{w}[\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})-\bar{v}(\bar{u}\,\bar{w})+\bar{w}(\bar{u}\,\bar{v})]=0. \qquad (66,II)$$

Să notăm cu $\bar{\lambda}$ vectorul

$$\bar{\lambda}=\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})-\bar{v}(\bar{u}\,\bar{w})+\bar{w}(\bar{u}\,\bar{v}.) \qquad (67,II)$$

Identitatea (66,II) devine

$$\bar{w}\,\bar{\lambda}=0$$

şi este valabilă pentru trei vectori oarecare.

Permutând pe $\bar{v}$ cu $\bar{w}$, $\bar{\lambda}$ îşi schimbă doar semnul, astfel încât vom avea şi

$$\bar{v}\,\bar{\lambda}=0.$$

Pe de altă parte, se verifică uşor că avem şi

$$(\bar{v}\times\bar{w})\bar{\lambda}=0,$$

ţinând seama de proprietăţile produselor mixte.

Deci, vectorul $\bar{\lambda}$ este perpendicular pe $\bar{v}$, $\bar{w}$ şi $\bar{v}\times\bar{w}$.

Dacă $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ nu sunt colineari, produsul vectorial $\bar{v}\times\bar{w}$ este perpendicular pe $\bar{v}$ şi $\bar{w}$, deci $\bar{\lambda}$ este în acelaşi timp perpendicular şi paralel cu $\bar{v}\times\bar{w}$, ceeace nu este posibil, dacă $\bar{\lambda}\neq 0$. Urmează că, în cazul când $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ nu sunt colineari, $\bar{\lambda}=0$. Dacă $\bar{v}$ este colinear cu $\bar{w}$, vom avea $\bar{v}=k\bar{w}$, unde k este un scalar. Introducând în expresia lui $\bar{\lambda}$, se vede imediat că vom avea şi în acest caz $\bar{\lambda}=0$.

Ţinând seama de acest rezultat, expresia (67,II) a vectorului $\bar{\lambda}$ ne conduce la identitatea:

$$\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})=\bar{v}(\bar{u}\,\bar{w})-\bar{w}(\bar{u}\,\bar{v}) \qquad (68,II)$$

Scanned with OKEN Scanner

numită *formula de desvoltare* a dublului produs vectorial. Această formulă, fundamentală în Algebra vectorială are nenumărate aplicaţii.

Interpretarea sa geometrică este cuprinsă în formula (63,II). Există numeroase demonstraţii ale formulei de desvoltare, justificate prin importanţa acesteia, majoritatea bazate pe consideraţii şi artificii geometrice.

Nevoia acestor artificii rezultă din faptul că dublul produs vectorial reprezintă o mărime geometrică legată de figura formată de bivectorul $(\overline{u}, \overline{v})$ şi vectorul $\overline{w}$. Reprezentarea acestei mărimi în spaţiul metric euclidian printr'un vector este bazată pe reprezentarea în prealabil a bivectorului $(\overline{u}, \overline{v})$ prin vectorul axial $(\overline{u} \times \overline{v})$ şi apoi a produsului vectorial al acestuia cu vectorul $\overline{w}$.

Formula de desvoltare este o *consecinţă algebrică* a proprietăţilor produsului vectorial. Spre deosebire de produsul vectorial, ale cărui proprietăţi decurg din cele ale bivectorilor, proprietăţile dublului produs vectorial nu decurg direct din cele ale mărimii pe care o reprezintă, această mărime nefiind definită geometric direct ca bivectorii. Deaceea, am dat o demonstraţie algebrică formulei de desvoltare. Două alte demonstraţii algebrice se găsesc la sfârşitul capitolului, dar justificarea geometrică este dată în Cap. II, B, Nota II, ca o aplicaţie a teoriei mărimilor geometrice. Desvoltarea produsului $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w}$ nu cere o demonstraţie deosebită.

Este suficient să observăm că

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = -\overline{w} \times (\overline{u} \times \overline{v})$$

şi să aplicăm formula de desvoltare

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = \overline{v}(\overline{u}\,\overline{w}) - \overline{u}(\overline{v}\,\overline{w}). \qquad (69,II)$$

Regula desvoltării dublului produs vectorial este simplă: se ia factorul dela mijloc şi se amplifică prin produsul scalar al celorlalţi doi, apoi se scade factorul rămas în paranteză, amplificat cu produsul scalar al celorlalţi doi.

§. 56. Aplicaţii ale dublului produs vectorial

1. Descompunerea unui vector după două direcţii ortogonale. Fiind daţi doi vectori $\overline{A}$ şi $\overline{B}$, (fig. 60), pentru a descompune pe $\overline{A}$ după direcţia lui $\overline{B}$ şi o direcţie perpendiculară pe aceasta în planul $(\overline{A}, \overline{B})$, trebue să determinăm această direcţie printr'un vector. Fiind în planul $(\overline{A}, \overline{B})$, acesta va fi perpendicular pe $\overline{A} \times \overline{B}$ şi pe B, deci coliniar cu produsul vectorial $\overline{B} \times (\overline{A} \times \overline{B})$. Aplicând formula de desvoltare, vom putea scrie

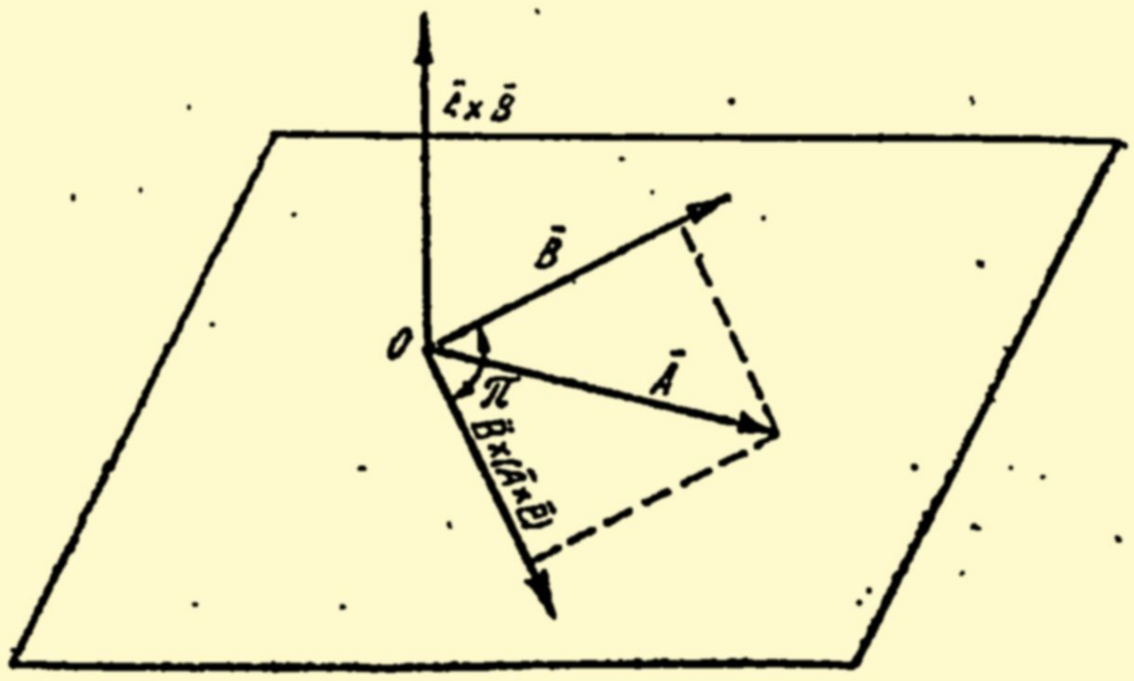


Fig. 60

$$\overline{B} \times (\overline{A} \times \overline{B}) = \overline{A}(\overline{B}\,\overline{B}) - \overline{B}(\overline{A}\,\overline{B}),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde urmează că putem exprima pe $\bar{A}$ prin formula:

$$\bar{A}=\frac{\bar{A}\bar{B}}{B^2}\bar{B}+\frac{1}{B^2}\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B}). \qquad (70,II)$$

2. Produs scalar de produse vectoriale. Formula prin care se exprimă produsul scalar a doi vectori reciproci, ne conduce la necesitatea de a evalua produse scalare de produse vectoriale de tipul

$$(\bar{A}\times\bar{B})(\bar{C}\times\bar{D}).$$

Calculul este o aplicaţie a produsului mixt şi a dublului produs vectorial. Vom scrie succesiv:

$$(\bar{A}\times\bar{B})(\bar{C}\times\bar{D})=\bar{A}\bar{B}(\bar{C}\times\bar{D})=\bar{A}[\bar{B}\times(\bar{C}\times\bar{D})]=\bar{A}[\bar{C}(\bar{B}\bar{D})-\bar{D}(\bar{B}\bar{C})],$$

de unde

$$(\bar{A}\times\bar{B})(\bar{C}\times\bar{D})=(\bar{A}\bar{C})(\bar{B}\bar{D})-(\bar{A}\bar{D})(\bar{B}\bar{C}). \qquad (71,II)$$

Membru al doilea se poate pune sub forma unui determinant, încât vom avea şi

$$(\bar{A}\times\bar{B})(\bar{C}\times\bar{D})=\begin{vmatrix}\bar{A}\bar{C} & \bar{A}\bar{D}\\ \bar{B}\bar{C} & \bar{B}\bar{D}\end{vmatrix}. \qquad (72,II)$$

Luând $\bar{C}=\bar{A}$, $\bar{D}=\bar{B}$, regăsim identitatea lui Lagrange

$$(\bar{A}\times\bar{B})^2=\begin{vmatrix}\bar{A}^2 & \bar{A}\bar{B}\\ \bar{B}\bar{A} & B^2\end{vmatrix}=A^2B^2-(\bar{A}\bar{B})^2.$$

3. Produs vectorial de produse vectoriale. Calculul volumului determinat de reciprocii a trei vectori daţi scoate deasemenea în evidenţă [formula (62,II)] un produs vectorial de produse vectoriale de forma

$$\bar{P}=(\bar{A}\times\bar{B})\times(\bar{C}\times\bar{D});$$

care poate fi redus la o combinaţie liniară vectorială prin aplicarea dublului produs vectorial. Vom pune pentru uşurinţă $\bar{C}\times\bar{D}=\bar{E}$ şi vom scrie:

$$(\bar{A}\times\bar{B})\times(\bar{C}\times\bar{D})=(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{E}=\bar{B}(\bar{A}\bar{E})-\bar{A}(\bar{B}\bar{E}),$$

de unde

$$(\bar{A}\times\bar{B})\times(\bar{C}\times\bar{D})=\bar{B}(\bar{A}\bar{C}\bar{D})-\bar{A}(\bar{B}\bar{C}\bar{D}). \qquad (73,II)$$

Se vede că vectorul $\bar{P}$ este paralel cu planele bivectorilor $(\bar{A},\bar{B})$, $(\bar{C},\bar{D})$ şi deci şi cu intersecţia lor.

Aceeaşi expresie se poate pune şi sub forma:

$$(\bar{A}\times\bar{B})\times(\bar{C}\times\bar{D})=\bar{C}(\bar{A}\bar{B}\bar{D})-\bar{D}(\bar{A}\bar{B}\bar{C}), \qquad (74,II)$$

înlocuind prin $\bar{E}$ primul factor: $\bar{E}=(\bar{A}\times\bar{B})$.

Pentru a reţine aceste două formule este suficient să observăm că regula dublului produs vectorial se menţine: *Se ia dintr'o paranteză factorul cel*

Scanned with OKEN Scanner

mai central şi se amplifică prin produsul mixt al celorlalţi, apoi se scade celălalt factor din aceeaşi paranteză, amplificat prin produsul mixt al celor rămaşi.

Din egalarea membrilor drepţi ai egalităţilor (73,II) şi (74,II) deducem relaţia

$$\bar{A}(\bar{B}\bar{C}\bar{D})-\bar{B}(\bar{C}\bar{D}\bar{A})+\bar{C}(\bar{D}\bar{A}\bar{B})-\bar{D}(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=0$$

găsită anterior între patru vectori din spaţiu, din care trei necoplanari, formula (52,II).

Aceasta relaţie fundamentală are loc între patru vectori oarecare deoarece nici o restricţie n'a fost impusă de data aceasta.

Presupunând, de exemplu, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\neq 0$, regăsim expresia unui vector raportat la un triedru dat:

$$\bar{D}=\frac{\bar{B}\bar{C}\bar{D}}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\bar{A}+\frac{\bar{C}\bar{A}\bar{D}}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\bar{B}+\frac{\bar{A}\bar{B}\bar{D}}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\bar{C}.$$

4. Formulele fundamentale ale trigonometriei sferice. Pe o sferă de centru O şi de rază 1 se consideră trei puncte A, B, C, neconţinute în acelaşi plan cu O, două oarecare nefiind diametral opuse pe sferă (fig. 61). Pe suprafaţă, drumul cel mai scurt dela A la B este arcul de cerc mare, mai mic decât π, care uneşte cele două puncte. Triunghiul format din arcele de cerc mare AB, BC, CA, se numeşte triunghi sferic. Aceasta corespunde triedrului $OABC$. Unghiurile diedre ale triedrului sunt unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ale triunghiului sferic, iar unghiurile feţelor triedrului sunt laturile $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, ale triunghiului. Fiecare latură a triunghiului sferic este mai mică decât suma celorlalte două şi mai mare decât diferenţa lor; fiecare unghi mărit cu π este mai mare decât suma celorlalte două, iar $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi=\varepsilon>0$.

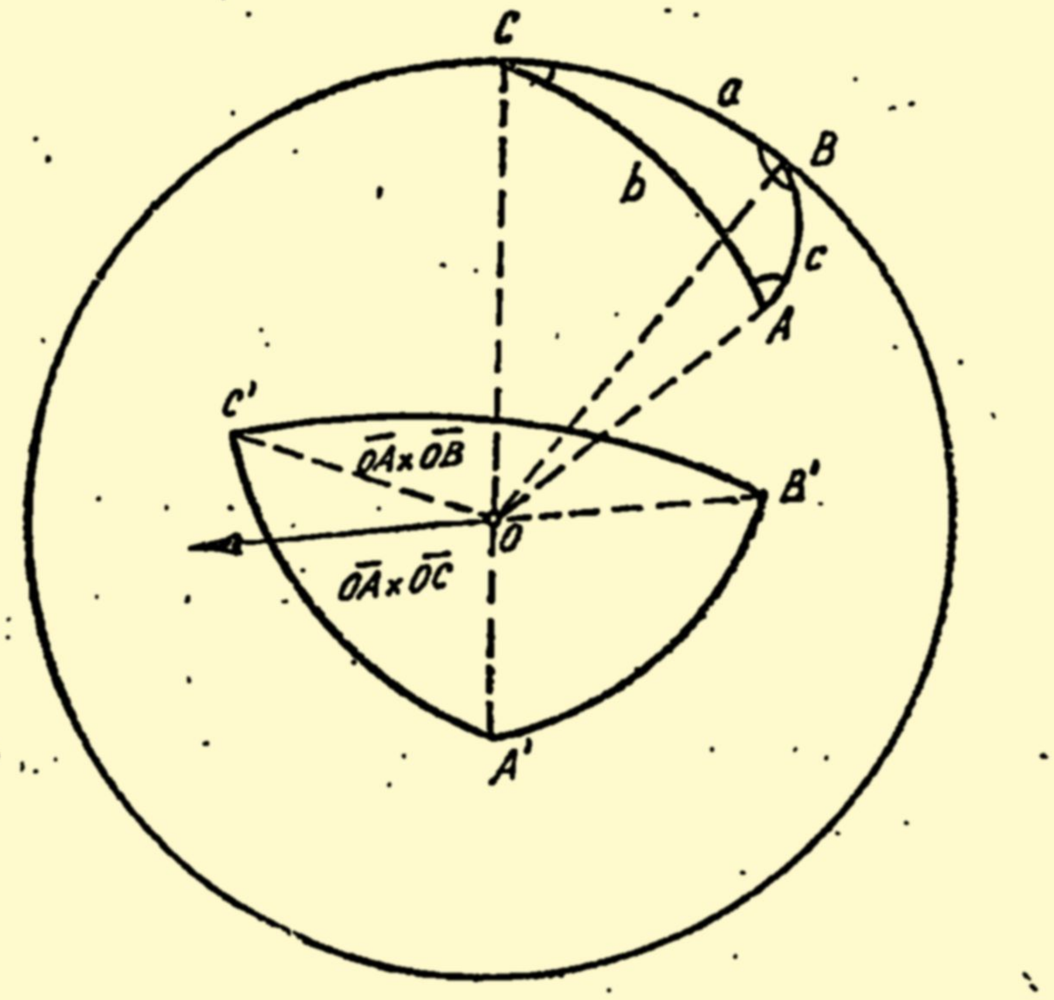


Fig. 61

Numărul ε se numeşte *excesul sferic* şi măsoară aria triunghiului sferic. Triedrul reciproc al triedrului $OABC$ determină triunghiul sferic $A'B'C'$, unde A', de exemplu, este polul cercului mare BC, şi anume polul situat pe aceeaşi emisferă (determinată de cercul BC) cu vârful A. Triunghiul sferic $A'B'C'$ se numeşte triunghiul polar al triunghiului sferic ABC şi reciproc, acesta este triunghiul polar al triunghiului sferic $A'B'C'$. Fiecare latură a unuia este suplimentul unghiului corespunzător al celuilalt.

Într'un triunghi sferic se pot găsi formule trigonometrice, analoage cu cele din triunghiul plan. Considerăm produsele multiple vectoriale şi desvoltările lor după formulele (72,II) şi (73,II):

$$(\overline{OA}\times\overline{OB})(\overline{OA}\times\overline{OC})=OA^2(\overline{OB}\cdot\overline{OC})-(\overline{OA}\cdot\overline{OC})(\overline{OA}\cdot\overline{OB}), \qquad (\alpha)$$

$$(\overline{OA}\times\overline{OB})\times(\overline{OA}\times\overline{OC})=(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC})\,\overline{OA}. \qquad (\beta)$$

Produsul vectorial $\overline{OA}\times\overline{OB}$ are ca modul $\sin c$ şi produsul vectorial $\overline{OA}\times\overline{OC}$ are ca modul $\sin b$. Unghiul acestor doi vectori este $\hat{A}$, deci valoarea primului membru din (α) este $\sin c \sin b \cos A$. Valoarea celui de al doilea membru este $\cos a-\cos b\cos c$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ (teorema cosinusului). (α')

In mod analog, formula (β) ne dă, luând modulele ambilor termeni,

$$\sin b \sin c \sin A = |(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})| \qquad (\beta')$$

sau

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{|(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})|} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$ (teorema sinusului).

Dacă formula (α') (și cele două analoage) este scrisă pentru triunghiul polar $A'B'C'$ pentru a reveni la triunghiul ABC se înlocuiesc laturile cu suplimentele unghiurilor corespunzătoare. Formula (α') devine

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

sau

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C. \qquad (\alpha'')$$

5. Acțiunea unui element de curent electric asupra altui element. Fie $I_1 d\bar{s}_1$ un element de curent în punctul M_1 (fig. 62). El creează în punctul M_2, determinat de vectorul de poziție $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_{12}$, un câmp magnetic, dat de legea lui Biot și Savart (§ 44).

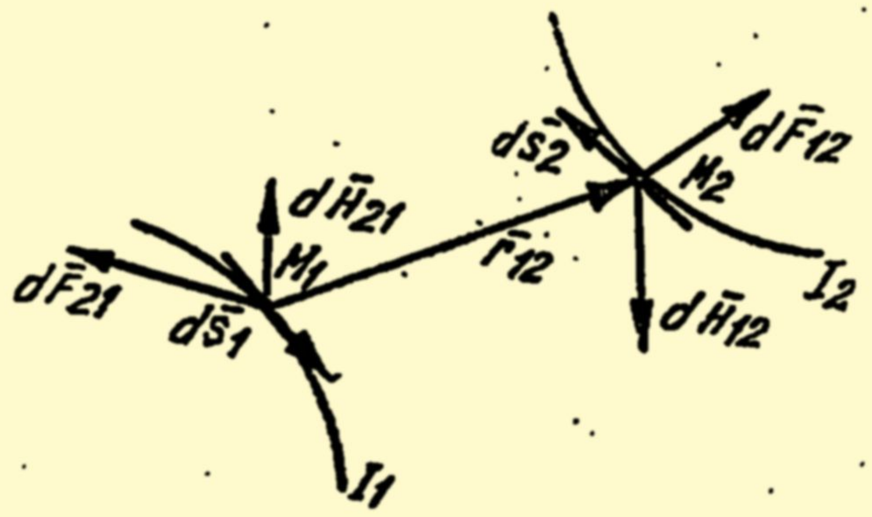


Fig. 62

$$d\bar{H}_{12} = \frac{I_1}{r_{12}^3} (d\bar{s}_1 \times \bar{r}_{12}) \qquad (a)$$

(H este exprimat în oersted, $d\bar{s}_1$, $\bar{r}_{12}$ în cm, iar I în unități CGS e.m).

Considerăm în punctul M_2 un alt element de curent $I_2 d\bar{s}_2$. Asupra acestuia va acționa o forță dată de relația vectorială

$$d\bar{F}_{12} = I_2 (d\bar{s}_2 \times d\bar{H}_{12}). \qquad (b)$$

Inlocuind pe $d\bar{H}_{12}$ prin valoarea sa din (a), avem

$$d\bar{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} [d\bar{s}_2 \times (d\bar{s}_1 \times \bar{r}_{12})]. \qquad (c)$$

Formula (c) ne dă acțiunea unui element de curent electric asupra altui element de

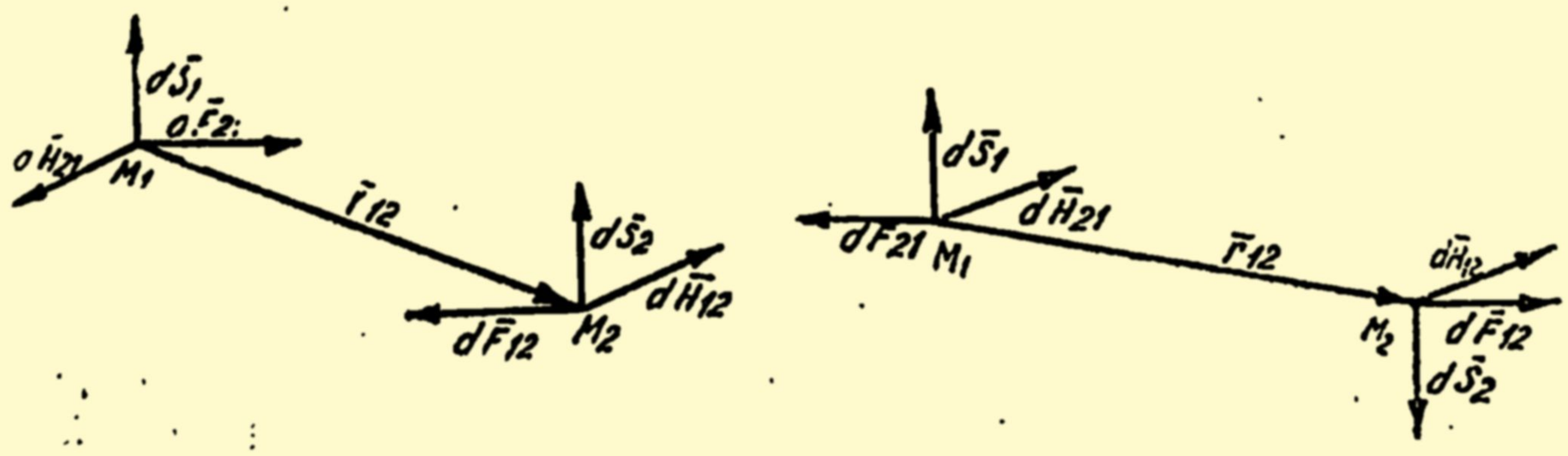


Fig. 63

curent electric. Considerând acum acțiunea elementului $I_2 d\bar{s}_2$ asupra lui $I_1 d\bar{s}_1$, obținem în mod similar

$$d\bar{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{r_{21}} [d\bar{s}_1 \times (d\bar{s}_2 \times \bar{r}_{21})] \qquad (d)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$\bar{r}_{21} = -\bar{r}_{12}. \qquad (e)$$

Se vede imediat din proprietățile dublului produs vectorial și ținând seama de (e) că

$$d\bar{F}_{12} + d\bar{F}_{21} \neq \bar{0}.$$

Să considerăm două cazuri particulare:

I. $d\bar{s}_1$ *echipolent cu* $d\bar{s}_2$, *sau* $d\bar{s}_1$ *echipolent cu* $-d\bar{s}_2$ (fig. 63).

In cazul elementelor paralele, avem atracție; în cazul firelor paralele, dar cu curenți de sens contrar, respingere. Deși în aceste două cazuri avem

$$d\bar{F}_{12} = -d\bar{F}_{21},$$

totuși principiul egalității acțiunii și reacțiunii nu este satisfăcut, deoarece direcțiile celor două forțe nu sunt în general pe aceeași dreaptă.

II. $d\bar{s}_1$ *perpendicular pe* $d\bar{s}_2$. In acest caz, contradicția cu principiul egalității acțiuni și reacțiunii iese în evidență și mai clar (fig. 64).

Deoarece

$$d\bar{s}_1 \times \bar{r}_{12} = 0,$$

avem $d\bar{F}_{12} = 0$, pe când $d\bar{F}_{21} \neq 0$. Elementul de curent $I_1 d\bar{s}_1$ este supus la o forță, datorită elementului $I_2 d\bar{s}_2$, pe când asupra acestuia nu acționează nicio forță din partea primului.

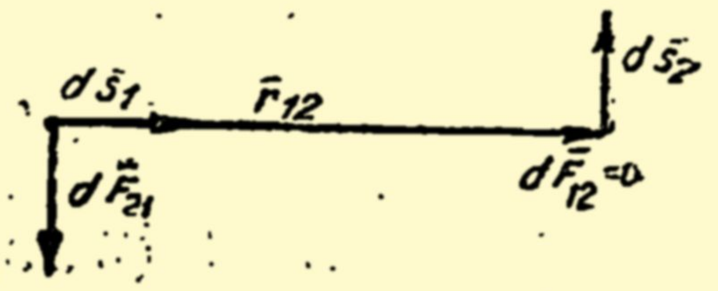


Fig. 64

Această aparentă nerespectare a legii a treia a lu Newton dispare, dacă, în cazul curenților continui, care sunt în mod obligator închiși, considerăm curentul în întregimea sa, integrând dealungul întregului circuit închis. Dealtfel, descompunerea unui curent în elemente nu este o operație univoc determinată, ceeace din punct de vedere matematic se exprimă prin faptul că adăugarea unor termeni la legea de interacțiune între curenți, termeni a căror integrală dealungul oricărui contur închis se anulează, nu modifică forța globală ce acționează asupra unui element din partea unui curent închis. Astfel, legea găsită de *Ampère* pentru acțiunea unui element asupra celuilalt și care satisface legea a treia a lui Newton, este (în notațiile noastre)

$$d\bar{F}_{12} = I_1 I_2 \left\{ \frac{3}{r_{12}^5} (d\bar{s}_1 \cdot \bar{r}_{12})(d\bar{s}_2 \cdot \bar{r}_{12}) - \frac{2}{r_{12}^3} (d\bar{s}_1 \cdot d\bar{s}_2) \right\} \bar{r}_{12}.$$

Se demonstrează ușor [1]) că întregrala forței dealungul curentului I_1 coincide cu cea obținută din aplicarea formulei (c).

In cazul curentilor variabili, care nu mai sunt în mod obligator închiși, este nevoie de o nouă formulare a legii de conservare a impulsului [2]), astfel ca ea să rămână valabilă și în electrodinamică.

§ 57. Aplicații ale produselor multiple

1. Proprietățile vectorilor reciproci. Relațiile (59, II) găsite între vectorii liniar independenți $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ și reciprocii lor pot fi complectate folosind expresiá dublului produs vectorial.

Vom arăta în primul rând că $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ sunt deasemenea liniar independenți. Pentru aceasta, este suficient să calculăm produsul mixt $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$.

[1]) Vezi *I. E. Tamm*, Bazele teoriei electricității, Edit. Tehnică Buc. 1952 p. 240.
[2]) Ibid., p. 614.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea:

$$\overline{u}'\,\overline{v}'\overline{w}' = \frac{(\overline{v}\times\overline{w})\,(\overline{w}\times\overline{u})\,(\overline{u}\times\overline{v})}{(\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w})^3} = \frac{[(\overline{v}\times\overline{w})\times(\overline{w}\times\overline{u})](\overline{u}\times\overline{v})}{(\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w})^3} =$$

$$= \frac{[\overline{w}\,(\overline{v}\,\overline{w}\,\overline{u}) - \overline{v}\,(\overline{w}\,\overline{w}\,\overline{u})](\overline{u}\times\overline{v})}{(\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w})^3},$$

de unde:

$$\overline{u}'\overline{v}'\overline{w}' = \frac{1}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}. \qquad (75,\text{II})$$

Volumul paralelipipedului construit pe vectorii reciproci este inversul volumului paralelipipedului construit pe cei trei vectori daţi.

Rezultă că: *Vectorii reciproci sunt liniar independenţi şi, deci, triedrul reciproc este nedegenerat şi are aceeaşi orientare ca triedrul* $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$.

In plus, vom avea

$$\overline{u}'\times\overline{v}' = \frac{(\overline{v}\times\overline{w})\times\overline{w}(\overline{w}\times\overline{u})}{(\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w})^2} = \frac{\overline{w}}{\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}}.$$

Ţinând seama de (75,II), vom putea scrie

$$\overline{u} = \frac{\overline{v}'\times\overline{w}'}{\overline{u}'\overline{v}'\overline{w}'};\quad \overline{v} = \frac{\overline{w}'\times\overline{u}'}{\overline{u}'\overline{v}'\overline{w}'};\quad \overline{w} = \frac{\overline{u}'\times\overline{v}'}{\overline{u}'\overline{v}'\overline{w}'}.$$

Prin urmare: *vectorii* $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ *se exprimă în funcţie de reciprocii lor prin aceleaşi formule prin care se exprimă reciprocii în funcţie de vectorii daţi.*

Raportând un vector oarecare la triedrul reciproc, formula de descompunere (56,II) se va scrie:

$$\overline{V} = (\overline{u}\,\overline{V})\overline{u}' + (\overline{v}\,\overline{V})\,\overline{v}' + (\overline{w}\,\overline{V})\overline{w}', \qquad (76,\text{II})$$

deci se obţine prin simpla permutare a literelor accentuate şi neaccentuate între ele.

2. Pătratele modulelor elementelor spaţiale. Pătratul modulului unui vector $\overline{A}$ este produsul scalar $\overline{A}\,\overline{A}$. Pătratul modulului unui bivector $(\overline{A}, \overline{B})$ este

$$(\overline{A}\times\overline{B}) = \begin{vmatrix} \overline{A}\cdot\overline{A} & \overline{A}\cdot\overline{B} \\ \overline{B}\cdot\overline{A} & \overline{B}\cdot\overline{B} \end{vmatrix}. \qquad (77,\text{II})$$

Aceasta analogie de formă ne îndeamnă să căutăm şi pentru pătratul modulului unui trivector $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ o expresie analoagă. Este uşor de stabilit formula:

$$[\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}]^2 = [(\overline{A}\times\overline{B})\,(\overline{B}\times\overline{C})\,(\overline{C}\times\overline{A})],$$

dar cum membrul al doilea se pune greu sub forma de determinant, vom folosi o altă expresie. Să calculăm:

$$[\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})]^2 = [\overline{B}(\overline{A}\,\overline{C}) - \overline{C}(\overline{A}\,\overline{B})]^2 = \overline{B}^2(\overline{C}\,\overline{A})^2 - 2(\overline{B}\,\overline{C})(\overline{C}\,\overline{A})(\overline{A}\,\overline{B}) + \overline{C}^2(\overline{A}\,\overline{B})^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punem $\bar{B}\times\bar{C}=\bar{D}$ şi aplicăm identitatea lui Lagrange, acelaşi pătrat se mai poate scrie şi astfel;

$$[\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})]^2=[\bar{A}\times\bar{D}]^2=A^2D^2-(\bar{A}\cdot\bar{D})^2=A^2[B^2C^2-(\bar{B}\bar{C})^2]-[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]^2.$$

Din egalarea celor două expresii deducem

$$(\bar{A}\bar{B}\bar{C})^2=A^2B^2C^2-A^2(\bar{B}\bar{C})^2-B^2(\bar{C}\bar{A})^2-C^2(\bar{A}\bar{B})^2+2(\bar{A}\bar{B})(\bar{B}\bar{C})(\bar{C}\bar{A}).$$

Insă,

$$A^2B^2C^2-A^2(\bar{B}\bar{C})^2=A^2[B^2C^2-(\bar{B}\bar{C})^2]=\bar{A}\bar{A}\begin{vmatrix}B\bar{B} & \bar{B}\bar{C}\\ \bar{C}\bar{B} & \bar{C}\bar{C}\end{vmatrix};$$

deasemeni

$$-B^2(\bar{C}\bar{A})^2+(\bar{A}\bar{B})(\bar{B}\bar{C})(\bar{C}\bar{A})=\bar{A}\bar{C}\begin{vmatrix}\bar{B}\bar{A} & \bar{B}\bar{B}\\ \bar{C}\bar{A} & \bar{C}\bar{B}\end{vmatrix};$$

şi

$$-C^2(\bar{A}\bar{B})^2+(\bar{A}\bar{B})(\bar{B}\bar{C})(\bar{C}\bar{A})=\bar{A}\bar{B}\begin{vmatrix}\bar{B}\bar{A} & \bar{B}\bar{C}\\ \bar{C}\bar{A} & \bar{C}\bar{C}\end{vmatrix},$$

astfel încât

$$(\bar{A}\bar{B}\bar{C})^2=\begin{vmatrix}\bar{A}\bar{A} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}\bar{C}\\ \bar{B}\bar{A} & \bar{B}\bar{B} & \bar{B}\bar{C}\\ \bar{C}\bar{A} & \bar{C}\bar{B} & \bar{C}\bar{C}\end{vmatrix}. \qquad (78,II)$$

Membrul al doilea se numeşte *determinantul lui Gram.* Comparând expresiile pătratelor modulelor vectorilor, bivectorilor şi trivectorilor observăm că ele au toate înfăţişarea unui determinant cu atâtea linii şi coloane, câte dimensiuni are spaţiul respectiv. Determinantul lui Gram conţine toate aceste expresii, astfel încât din punct de vedere formal, dacă în (78,II) suprimăm un factor din primul membru şi elementele corespunzătoare din membrul al doilea, obţinem o nouă identitate.

Putem deci spune că determinantul lui Gram exprimă pătratele modulelor elementelor spaţiale pentru $n=3, 2, 1$.

§ 58. Regula tetraedrului. Suprafeţe poliedrale orientate

Din cele expuse reiese că mărimile geometrice: vectorii, bivectorii şi trivectorii au un număr de proprietăţi comune rezultând din faptul că fiecare dintre ele este mărimea asociată unei porţiuni a spaţiului.

Astfel, prin adunarea vectorilor pe o dreaptă, puşi cap la cap, putem acoperi o porţiune oricât de mare a dreptei. Deasemenea, alăturând bivectori într'un plan, putem acoperi planul, iar însumând prin alipire trivectori, reprezentaţi prin tetraedre sau paralelipipede, putem acoperi tot spaţiul.

Determinantul lui Gram arată că modulele acestor elemente spaţiale au expresii comune, iar regula de adunare a bivectorilor extinde regulile de adunare ale vectorilor.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm, însă, că regula triunghiului are un caracter de regulă de închidere pentru adunarea a trei vectori necoplanari: aplicând fie regula paralelipipedului, fie aceea a conturului poligonal, în care vectorii sunt puși cap la cap, suma este vectorul ce închide un contur poligonal strâmb.

Această regulă se poate regăsi și în adunarea a trei bivectori. In adevăr: alăturând doi bivectori, planele lor formează un diedru. Alăturând al treilea bivector formăm un triedru. Vom arăta că *suma acestor trei bivectori este a patra față a unui tetraedru,* după cum suma a trei vectori este vectorul, care închide conturul lor poligonal.

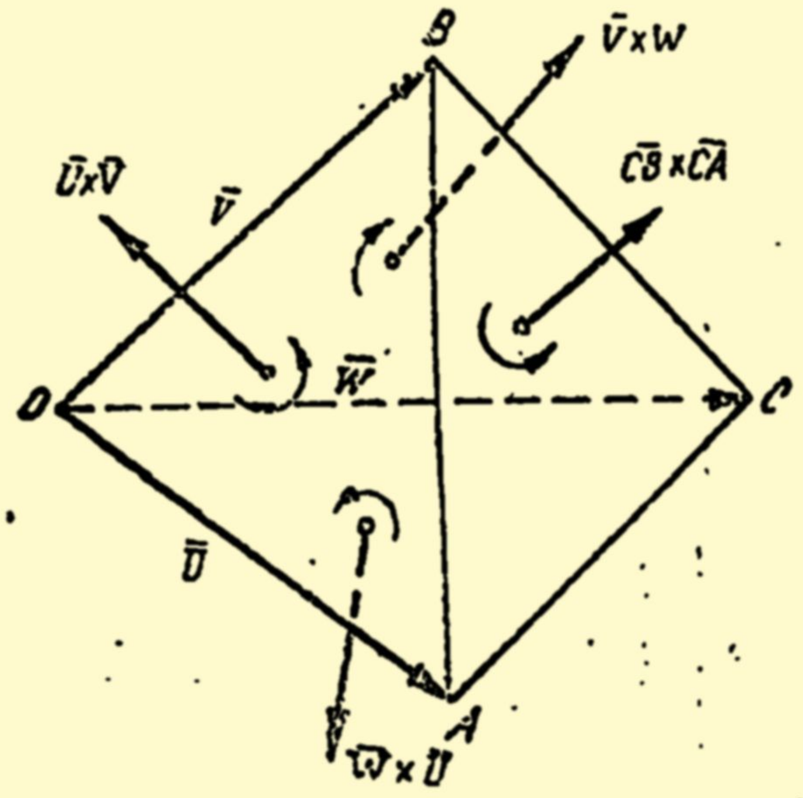


Fig. 65

Fie un tetraedru $OABC$, (fig. 65) format de trei vectori necoplanari $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ Să orientăm fețele tetraedrului, astfel ca fețele pozitive să fie exterioare și să considerăm cei trei bivectori $(\overline{OA}, \overline{OB})$, $(\overline{OB}, \overline{OC})$, $(\overline{OC}, \overline{OA})$.

Suma lor va fi bivectorul

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) + (\overline{OB}, \overline{OC}) + (\overline{OC}, \overline{OA}).$$

Putem reprezenta, pentru ușurință acești bivectori, prin vectorii reprezentativi $\overline{OA}\times\overline{OB}$, $\overline{OB}\times\overline{OC}$, $\overline{OC}\times\overline{OA}$ și vom avea

$$(\overline{OA}\times\overline{OB}) + (\overline{OB}\times\overline{OC}) + (\overline{OC}\times\overline{OA}) = \overline{OA}\times(\overline{OB}-\overline{OC}) + (\overline{OB}\times\overline{OC}) =$$
$$= \overline{OA}\times\overline{CB} + \overline{OB}\times\overline{OC} = \overline{OA}\times\overline{CB} + (\overline{OC}+\overline{CB})\times\overline{OC} = \overline{OA}\times\overline{CB} + \overline{CB}\times\overline{OC} =$$
$$= \overline{CB}\times(\overline{OC}-\overline{OA}) = \overline{CB}\times\overline{AC} = -\overline{CB}\times\overline{CA}.$$

Prin urmare, suma:

$$\overline{OA}\times\overline{OB} + \overline{OB}\times\overline{OC} + \overline{OC}\times\overline{OA} + \overline{CB}\times\overline{CA} = 0. \qquad (79,II)$$

Impărțind cu doi, fiecare dintre aceste produse vectoriale reprezintă o față exterioară a tetraedrului, astfel încât suma bivectorilor formați de cele patru fețe exterioare ale unui tetraedru este nulă.

Considerând fețele exterioare (sau interioare) ale unei suprafețe poliedrale ca *fețe orientate*, vom putea spune: *aria orientată a unui tetraedru este nulă*.

Deasemenea, din (79,II) deducem că suma celor trei fețe exterioare OAB, OBC și OCA este egală cu fața interioară ACB, pe care se sprijină triedrul $OABC$.

Vom numi *convex* un poliedru al cărui fețe, prelungite, nu-l intersectează în niciun punct. Un poliedru convex este în întregime de aceeași parte a fiecăreia din fețele sale și este intersectat de o dreaptă în cel mult două puncte. Această proprietate este dealtfel caracteristică pentru poliedrele convexe. Fețele unui poliedru convex sunt poligoane convexe. Orice poligon convex poate fi descompus în triunghiuri. Luând un punct oarecare O interior unui poliedru convex, putem descompune poliedrul într'o sumă de tetraedre având un vârf comun O și fața opusă acestui vârf formată de unul din triunghiurile în care se descompune suprafața poliedrului.

Scanned with OKEN Scanner

Fie P un poliedru convex având feţele orientate astfel, încât cele exterioare să fie pozitive. Fiecare faţă este un bivector F_k.

Suma geometrică a bivectorilor F_k este nulă. In adevăr, luând un punct O, interior poliedrului P, vom descompune acest poliedru în tetraedre T având vârful comun în O. Bivectorii, care corespund la două feţe plecând din O şi suprapuse, aparţinând la două tetraedre T, sunt egali şi de semn contrar.

Insumând toţi bivectorii relativi la toate tetraedrele T şi ţinând seama de rezultatul găsit mai sus, că suprafaţa orientată a unui tetraedru este nulă, se obţine că şi suma bivectorilor F_k este nulă.

Deoarece un poliedru neconvex poate fi descompus într'o sumă de poliedre convexe, teorema este adevărată în cazul general: *aria orientată a unui poliedru este nulă.*

O suprafaţă curbă poate fi aproximată printr'un poliedru ale cărui feţe, foarte numeroase şi foarte mici, sunt formate din porţiuni de plane tangente la suprafaţă. După un proces de trecere la limită, se poate stabili o teoremă analoagă celei de mai sus pentru suprafeţele curbe, şi anume; aria orientată a unei suprafeţe curbe închise este nulă.

NOTA I. FORMULA DE DESVOLTARE A DUBLULUI PRODUS VECTORIAL

Demonstraţia I. Pornind dela reprezentarea geometrică a dublului produs vectorial $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ printr'un vector din planul bivectorului $(\bar{v}, \bar{w})$ (§ 55), se poate da următoarea demonstraţie algebrico-geometrică formulei de desvoltare (fig. 59).

Punând

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \alpha \bar{v} + \beta \bar{w},$$

vom determina scalarii α şi β înmulţind scalar cu $\bar{u}$ ambii membri ai acestei identităţi. Vom avea

$$0 = \alpha (\bar{u}\bar{v}) + \beta (\bar{w}\bar{u}),$$

de unde

$$\alpha = \lambda (\bar{w}\bar{u}); \quad \beta = -\lambda (\bar{u}\bar{v}).$$

λ fiind un parametru scalar. Prin urmare, deducem

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \lambda [\bar{v} (\bar{w}\bar{u}) - \bar{w} (\bar{u}\bar{v})]. \qquad (\alpha)$$

Pentru a determina parametrul λ, *vom presupune că este independent de* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ şi vom verifica identitatea pentru $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ versori, $\bar{u} \perp \bar{v}$; $\bar{v} \perp \bar{w}$, iar unghiul format de $\bar{u}$ cu $\bar{w}$ de 45°. In acest caz, identitatea devine:

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \lambda \bar{v} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luând modulele ambilor membri, vom avea

$$|\bar{v} \times \bar{w}| = 1; \quad |\bar{u}| = 1; \quad |\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})| = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

deoarece unghiul format de $\bar{u}$ cu $\bar{v} \times \bar{w}$ este de 45°. Deducem imediat $\lambda = 1$ şi formula de desvoltare

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{v} (\bar{w}\bar{u}) - \bar{w} (\bar{u}\bar{v})$$

este stabilită.

Această demonstraţie rapidă trebue complectată cu stabilirea independenţei parametrului λ de alegerea vectorilor $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. In acest scop, vom pune în (α).

$$\bar{u} = \bar{p} + \bar{q},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\overline{p}$ și $\overline{q}$ sunt doi vectori oarecare și vom avea:

$$(\overline{p}+\overline{q})\times(\overline{v}\times\overline{w})=\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})[\overline{v}(\overline{p}+\overline{q})\cdot\overline{w}-\overline{w}(\overline{p}+\overline{q})\cdot\overline{v}]=$$
$$=\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})[\overline{v}(\overline{p}\overline{w})-\overline{w}(\overline{p}\overline{v})]+\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})[\overline{v}(\overline{q}\overline{w})-\overline{w}(\overline{q}\overline{v})].$$

In același timp, aplicând proprietatea de distributivitate, putem scrie:

$$(\overline{p}+\overline{q})\times(\overline{v}\times\overline{w})=\overline{p}\times(\overline{v}\times\overline{w})+\overline{q}\times(\overline{v}\times\overline{w})=\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w})[\overline{v}(\overline{p}\overline{w})-\overline{w}(\overline{p}\overline{v})]+$$
$$+\lambda(\overline{q},\overline{v},\overline{w})[\overline{v}(\overline{q}\overline{w})-\overline{w}(\overline{q}\overline{v})].$$

Egalând membrii ai doilea ai celor două identități, deducem:

$$[\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})-\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w})][\overline{v}(\overline{p}\overline{w})-\overline{w}(\overline{p}\overline{v})]+$$
$$+[\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})-\lambda(\overline{q},\overline{v},\overline{w})][\overline{v}(\overline{q}\overline{w})-\overline{w}(\overline{q}\overline{v}]=0.$$

Dacă vectorii

$$\overline{v}(\overline{p}\overline{w})-\overline{w}(\overline{p}\overline{v}) \quad \text{și} \quad \overline{v}(\overline{q}\overline{w})-\overline{w}(\overline{q}\overline{v})$$

sunt liniar independenți, deci necoliniari, pentru ca această relație să aibă loc, este necesar și suficient ca:

$$\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})-\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w})=0;$$
$$\lambda(\overline{p}+\overline{q},\overline{v},\overline{w})-\lambda(\overline{q},\overline{v},\overline{w})=0,$$

de unde $\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w})=\lambda(\overline{q},\overline{v},\overline{w})$ pentru orice $\overline{q}$, înafară poate de vectorii $\overline{q}$ pentru care

$$\overline{v}[(\overline{q}\,\overline{w})-\overline{w}(\overline{q}\,\overline{v})]=\mu[\overline{v}(\overline{p}\,\overline{w})-\overline{w}(\overline{p}\,\overline{v})],$$

unde μ este un scalar.

În acest caz deducem, însă,

$$\overline{v}[(\overline{q}-\mu\overline{p})\cdot\overline{w}]=\overline{w}[(\overline{q}-\mu\overline{p})\cdot\overline{v}].$$

Dacă $\overline{v}$ și $\overline{w}$ sunt liniar independenți, vom avea atunci

$$(\overline{q}-\mu\overline{p})\,\overline{w}=0; \quad (\overline{q}-\mu\overline{p})\,\overline{v}=0;$$

deci $\overline{q}-\mu\overline{p}$ va fi perpendicular pe $\overline{v}$ și $\overline{w}$, adică de forma

$$\overline{q}-\mu\overline{p}=\nu'(\overline{v}\times\overline{w}).$$

Prin urmare:

$$\overline{q}=\mu\overline{p}+\nu'(\overline{v}\times\overline{w}): \qquad (\beta)$$

Pe de altă parte, însă, înlocuind în (α) pe $\overline{u}$ prin $\mu\overline{p}$, deducem imediat

$$\lambda(\mu\overline{p},\overline{v},\overline{w})=\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w}), \qquad (\gamma)$$

deci λ este o funcție omogenă de gradul zero în raport cu $\overline{p}$.

Totodată, deoarece

$$(\overline{v}\times\overline{w})\times(\overline{v}\times\overline{w})=0,$$

înlocuind în (α) pe $\overline{u}$ prin $\overline{p}+\nu'(\overline{v}\times\overline{w})$, deducem deasemenea

$$\lambda[\overline{p}+\nu'(\overline{v}\times\overline{w}),\overline{v},\overline{w}]=\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w}). \qquad (\delta)$$

Ținând seama de (γ) și (δ), vom avea relația

$$\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w})=\lambda[\mu\overline{p}+\nu'(\overline{v}\times\overline{w}),\overline{v},\overline{w}]=\lambda(\overline{q},\overline{v},\overline{w}),$$

$\overline{q}$ fiind de forma (β).

Prin urmare, pentru orice pereche $\overline{p},\overline{q}$ de vectori din spațiu

$$\lambda(\overline{p},\overline{v},\overline{w})=\lambda(\overline{q},\overline{v},\overline{w})$$

și deci λ nu depinde de $\overline{p}$. In mod analog se demonstrează că λ nu depinde nici de celelalte două variabile $\overline{v},\overline{w}$, astfel încât formula de desvoltare a dublului produs vectorial este complect stabilită.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația.2. Dublul produs vectorial

$$\bar{p}=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} \qquad (\alpha)$$

se reduce la vectorul nul dacă, și numai dacă, una cel puțin dintre condițiile următoare este satisfăcută:

1° cel puțin unul dintre vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ este vectorul nul;
2° vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt coliniari;
3° vectorul $\bar{c}$ este perpendicular pe planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Excluzând aceste ipoteze, $\bar{p}$ este un vector situat în planul $(\bar{a}, \bar{b})$ și deci este o combinație liniară de acești doi vectori $\bar{p}=m\bar{a}+n\bar{b}$. Multiplicând scalar cu $\bar{c}$ ambii membri ai acestei egalități, avem $m(\bar{a}\bar{c})+n(\bar{b}\bar{c})=0$. Există deci un scalar λ, astfel ca:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\lambda[\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{a}(\bar{b}\bar{c})]. \qquad (\beta)$$

Vom demonstra că valoarea scalarului λ este 1, oricare ar fi vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, adică vom arăta că avem

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{a}(\bar{b}\bar{c}). \qquad (\gamma)$$

Deoarece formula (γ) se verifică în cazul când $\bar{p}$ este vectorul nul, vom presupune că nici una din condițiile 1°, 2°, 3° nu are loc. Presupunem deci că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ formează un plan și că $\bar{c}$ nu este perpendicular pe acest plan.

Dacă formula (γ) este adevărată și dacă se înlocuesc $\bar{a}$ și $\bar{b}$ prin combinațiile liniar independente $s\bar{a}+t\bar{b}$ și $s_1\bar{a}+t_1\bar{b}$ cu determinantul $st_1-ts_1\neq 0$, se obține, ținând seama de regulile de calcul — după simplificarea cu factorul $st_1-ts_1\neq 0$ — din nou formula (γ). Putem deci presupune, fără a restrânge generalitatea, că $\bar{a}$ și b sunt perpendiculari.

Dacă se înlocuește în (γ) vectorul $\bar{c}$ cu $r\bar{c}\times s(\bar{a}\times\bar{b})$, unde $r\neq 0$, după simplificare cu r se obține din nou formula (γ).

Deci, dacă ea este valabilă pentru un vector $\bar{c}$ arbitrar, neperpendicular pe planul $(\bar{a}, \bar{b})$, ceeace corespunde condiției $r\neq 0$, ea este valabilă pentru orice vector din planul determinat de acel vector și de vectorul $\bar{a}\times\bar{b}$. Putem deci presupune, fără a restrânge generalitatea formulei (γ), că vectorul $\bar{c}$ se află în planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Însă, în baza primei transformări, putem presupune că $\bar{a}$ și $\bar{c}$, sunt coliniari, căci dacă formula este valabilă în acest caz, ea rămâne valabilă pentru oricare pereche de vectori $\bar{a}$ și $\bar{c}$, unde $\bar{a}$ n'ar mai fi coliniar cu $\bar{c}$. Mai mult, pe baza aceluiași raționament putem presupune că $\bar{a}$ și $\bar{c}$ au același sens. Formula (γ) se reduce în acest caz la

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}(\bar{c}\bar{a}). \qquad (\delta)$$

Dacă formula (δ) este adevărată pentru vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, ea este adevărată și pentru vectorii $m\bar{a}, nb, p\bar{c}$, unde m, n, p sunt trei numere reale, pozitive. Este deci suficient să dovedim formula (δ) în cazul când $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt versori perpendiculari, iar $\bar{c}=\bar{a}$. In acest caz, formula (δ) se reduce la $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}$, care este evidentă, în baza definiției produsului vectorial a doi vectori.

Demonstrația 3.[1]) Presupunând că niciuna dintre condițiile 1°, 2°, 3°, nu sunt satisfăcute, considerăm vectorul b', reciprocul vectorului $\bar{b}$ față de triedrul nedegenerat $\bar{a}, b, \bar{a}\times\bar{b}$. Avem

$$\bar{b}'=\frac{(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{a}}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b})} \qquad (\varepsilon)$$

și deci $\bar{b}\bar{b}'=1$, $\bar{b}'\bar{a}=0$ și $\bar{b}'(\bar{a}\times\bar{b})=0$. Să evaluăm produsul mixt dela numitorul lui $\bar{b}'$.

Avem

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b})=(\bar{a}\times\bar{b})(\bar{a}\times\bar{b})=(\bar{a}\times\bar{b})^2. \qquad (\zeta)$$

Deasemenea

$$|(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{a}|=|\bar{a}\times\bar{b}||\bar{a}|$$

---

[1]) A treia demonstrație este inspirată de cea dată în tratatul *N. E. Cocin*, Vectornoie iscislenie i nacicla· tenzornogancislemia. Calcul Vectorial și Elemente de Calcul Tensorial Moscova 1950, p. 64.

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$|\bar{b}'| = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{a} \times \bar{b}|} .$$

Dacă multiplicăm scalar cu $\bar{b}'$ relația

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}, \qquad (\gamma)$$

vom avea

$$(\bar{b}', \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = n. \qquad (0)$$

Insă vectorul $\bar{b}' \times (\bar{a} \times \bar{b})$ este dirijat în direcția și sensul lui $\bar{a}$ și în plus

$$|(\bar{b}' \times (\bar{a} \times \bar{b})| = |\bar{b}'|\,|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|,$$

deci

$$\bar{b}' \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a}. \qquad (\iota)$$

Ținând seama de (ι), produsul mixt din (0) ne dă $\bar{a}\bar{c} = n$.
Pentru determinarea coeficientului m, este suficient să observăm că

$$(\bar{b} \times \bar{a}) \times \bar{c} = -n\bar{b} - m\bar{a} \text{ și deci că}$$

$\bar{b}\bar{c} = -m$. Formula (γ) este astfel dovedită pe o altă cale.

NOTA II. APLICAȚIILE VECTORILOR RECIPROCI ÎN TEORIA STRUCTURII CRISTALELOR [1].

După cum arată experiența, în majoritatea corpurilor solide (cele cristaline) atomii sau moleculele din care este format corpul sunt așezate într'un mod simetric în spațiu. Acest lucru este scos în evidență de cristale, care sunt elementele corpului solid.

In cristalele ideale, considerate în teoria corpului solid, atomii (moleculele, respectiv ionii) sunt așezați în nodurile unei rețele spațiale, care ia forme diferite dela caz la caz. Rețelele spațiale pot avea mai multe feluri de simetrii [2]; pe noi nu ne va preocupa decât *periodicitatea spațială* a rețelei. Aceasta constă în proprietatea rețelei de a coincide cu ea însăși la translații de o anumită mărime, numite *perioade* de translație.

Perioadele de translație ale rețelei pot fi reprezentate prin vectorii $\bar{a}$ corespunzători translațiilor.

Este evident că o rețea cristalină admite o infinitate de perioade de translație diferite, care nu sunt însă independente între ele. Vom putea totdeauna alege trei perioade (vectori) elementare necoplanare (deci o bază de vectori în spațiu), cu ajutorul cărora se exprimă orice altă perioadă. Dacă notăm cu $\bar{a}^1$, a^2, $\bar{a}^3$, vectorii perioadelor de bază, orice altă perioadă va fi

---

[1]) Pentru detalii, v. de exemplu *A. I. Chitaigorodschi*, Rentghenostructurnăi analiz (Analiză structurală cu Raze X), Moscova, 1950 articolul lui *P. Ewald* în vol. XXIII Geiger-Scheel „Handbuch der Physik", sau *L. Landau* și *E. Lifșiț*, Statisticescaia Fizica (Fizică statistică) Moscova 1951, cap. XIII. (IDT, București, 1952).

[2]) Studiul celorlaltor simetrii, utilizat la clasificarea cristalelor, se face cu ajutorul teoriei grupurilor, v. de exemplu *A. I. Chitaigorodschi*, cap. I, Op. cit.; *A. Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1928; *L. Landau* și *E. Lifșiț*, Op. cit., cap. XIII; *L. Landau, E. Lifșiț*, Cvantovaia mehanica (Mecanica cuantică) p. I, cap. XII, Moscova 1948.

Scanned with OKEN Scanner

exprimată ca o combinaţie liniară cu coeficienţi întregi a acestor vectori.

$$\bar{a} = n_1 \bar{a}^1 + n_2 \bar{a}^2 + n_3 \bar{a}^3 = \sum_{l=1}^{3} n_l \bar{a}^l, \qquad (\alpha)$$

n_l fiind numere întregi.

Prin alegerea perioadelor fundamentale punem în evidenţă un paralelipiped cu muchiile $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3$, *denumit celulă elementară.*

Alegerea vectorilor fundamentali nu este univocă; dimpotrivă, ei pot fi aleşi într'o infinitate de moduri, orice sistem rezultând din cel iniţial printr'o transformare liniară cu coeficienţi întregi

$$\bar{a}'^i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^i \bar{a}^k \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad (\beta)$$

α_k^i fiind întregi.

Pentru ca noii vectori $\bar{a}'^i$ să formeze şi ei o bază, trebue ca orice altă perioadă a reţelei să poată fi exprimată ca o combinaţie liniară cu coeficienţi întregi a acestor vectori. In particular, va trebui să fie posibil să exprimăm vectorii $\bar{a}^j$ prin $\bar{a}'^l$ printr'o formulă analoagă cu (α), respectiv (β)

$$\bar{a}^i = \sum_{k=1}^{3} \beta_k^l \bar{a}'^k, \qquad (\tau)$$

cu β_k^i — întregi. Insă, după cum se ştie, determinantul $|\beta_k^l|$ este inversul determinantului $|\alpha_k^l|$, iar amândoi determinanţii trebuind să fie întregi, rezultă, că

$$|\alpha_k^l| = \pm 1. \qquad (\delta)$$

Alegând unul dintre nodurile reţelei ca origine şi plasând în acest nod celula noastră elementară, vom putea reprezenta toată reţeaua ca formată din alăturarea pe cele trei direcţii, ale unor astfel de celule elementare toate celulele elementare fiind identice în proprietăţile lor geometrice şi fizice (fig. 66).

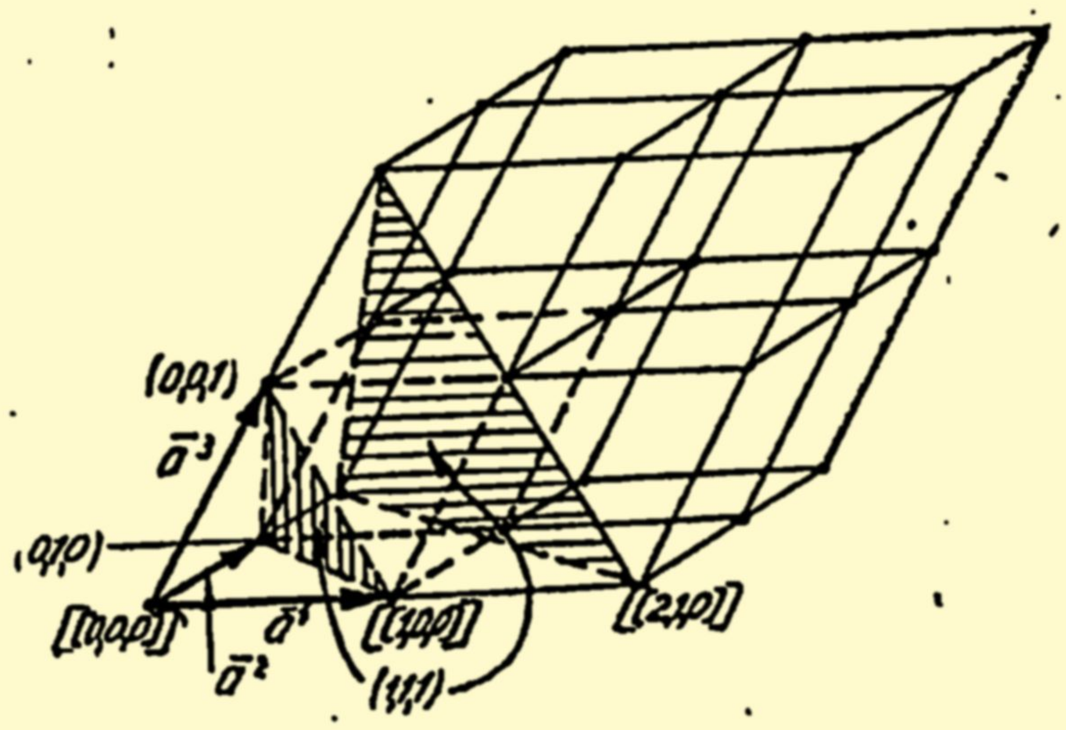


Fig. 66

In toate vârfurile unei celule elementare se vor găsi atomi de aceeaşi natură, iar nodurile respective sunt echivalente faţă de translaţie [1]). Mulţimea tuturor nodurilor echivalente, care pot deci fi aduse la suprapunere prin translaţii, formează o aşa numită *reţea Bravais* a cristalului. Este clar că reţeaua Bravais nu cuprinde toate nodurile reţelei cristaline şi că în cristal există mai multe reţele Bravais.

[1]) Pot fi aduse la suprapunere printr'o translaţie egală cu una din perioadele reţelei.

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul de poziţie $\bar{n}$ al oricărui nod din reţeaua Bravais poate fi exprimat ca o combinaţie liniară cu coeficienţi întregi a vectorilor de bază

$$\bar{r} = k_1 \bar{a}^1 + k_2 \bar{a}^2 + k_3 \bar{a}^3 = \sum_{l=1}^{3} k_l \bar{a}^l, \qquad (\varepsilon)$$

Numerele întregi k_1, k_2, k_3 determină complect nodul reţelei şi se numesc deobicei indicii nodului. Totalitatea celor trei indici se numeşte *simbolul nodului* şi se notează astfel $[[k_1, k_2, k_3]]$, de exemplu nodurile celulei elementare au simbolurile:

$$[[0,0,0]],\ [[1,0,0]],\ [[0,1,0]],\ [[0,0,1]],\ [[1,1,0]],\ [[1,0,1]],$$
$$[[0,1,1]],\ [[1,1,1]].$$

Toate mărimile fizice (densitatea de sarcină, probabilitatea poziţiei unui atom, etc.) legate de cristal, vor avea aceleaşi proprietăţi de periodicitate ca şi reţeaua cristalină. Fie F una dintre aceste mărimi, funcţie de vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului de coordonate x, y, z. Funcţia $F(\bar{r})$ trebue să fie periodică, cu aceleaşi perioade ca şi reţeaua, deci trebue să avem

$$F(\bar{r} + n_1 \bar{a}^1 + n_2 \bar{a}^2 + n_3 \bar{a}^3) = F(\bar{r}) \qquad (\zeta)$$

pentru n_1, n_2, n_3 întregi oarecare.

Funcţia $F(\bar{r})$ poate fi desvoltată [1]) în serie triplă Fourier, care poate fi scrisă vectorial sub forma

$$F(\bar{r}) = \sum_{\bar{b}} A_{\bar{b}}\, e^{2\pi i \bar{b}\bar{r}}, \qquad (\eta)$$

sumarea efectuându-se în raport cu toate valorile admise ale vectorului $\bar{b}$, valori care se determină din condiţia de periodicitate (ζ).

Din aceasta condiţie rezultă că factorii exponenţiali nu trebue să se modifice, dacă înlocuim $\bar{r}$ prin $\bar{r} + \bar{a}$, $\bar{a}$ fiind o perioadă oarecare a reţelei. Condiţia ca (ζ) să fie îndeplinită este ca produsul scalar $\bar{a}\,\bar{b}$ să fie un întreg; deci, luând pentru $\bar{a}$ cei trei vectori de bază, vom avea relaţiile

$$\bar{a}^1 \bar{b} = m^1; \quad \bar{a}^2 \bar{b} = m^2; \quad \bar{a}^3 \bar{b} = m^3 \qquad (\theta)$$

cu m^1, m^2, m^3 numere întregi.

Soluţia sistemului (θ) o căutăm sub forma

$$\bar{b} = m^1 \bar{b}_1 + m^2 \bar{b}_2 + m^3 \bar{b}_3 = \sum_{i=1}^{3} m^i \bar{b}_i. \qquad (\iota)$$

Este uşor de văzut că vectorii $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ sunt vectorii reciproci vectorilor $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3$:

$$\bar{b}_1 = \frac{\bar{a}^2 \times \bar{a}^3}{\bar{a}^1 \bar{a}^2 \bar{a}^3}; \quad \bar{b}_2 = \frac{\bar{a}^3 \times \bar{a}^1}{\bar{a}^1 \bar{a}^2 \bar{a}^3}; \quad \bar{b}_3 = \frac{\bar{a}^1 \times \bar{a}^2}{\bar{a}^1 \bar{a}^2 \bar{a}^3}. \qquad (\varkappa)$$

Dacă ţinem seama de sensul geometric al produselor. $v = \bar{a}^1 \bar{a}^2 \bar{a}^3$ este volumul celulei elementare, iar prcdusele $\bar{a}^2 \times \bar{a}^3$, $\bar{a}^3 \times \bar{a}^1$, $\bar{a}^1 \times \bar{a}^2$ sunt ariile

---

[1]) In general, funcţiile reprezentând mărimi fizice periodice satisfac condiţiilor lui Dirichlet, ceeace presupunem şi despre $F(\bar{r})$.

Scanned with OKEN Scanner

celor trei fețe ale paralelipipedului. Se vede deci că vectorii reciproci $\bar{b}_i$ au direcția înălțimilor paralelipipedului, dimensiunea inversului unei lungimi și ca modul—inversul înălțimilor paralelipipedului elementar.

Vectorii reciproci $\bar{b}_i$ sunt deci vectorii covarianți asociați celor trei biplane din care este formată celula elementară.

Cu vectorii reciproci putem construi formal o rețea cu perioadele de bază egale cu $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$. Această rețea se numește *rețea reciprocă* (sau inversă). Se vede ușor că pentru rețelele paralelipipedice (numite în cristalografie tricline), rețeaua reciprocă este tot paralelipipedică; în particular, pentru o rețea cubică (cum este de exemplu rețeaua sării de bucătărie), rețeaua reciprocă este tot cubică.

Volumul celulei elementare a rețelei reciproce este inversul volumului celulei elementare a rețelei:

$$v' = \bar{b}_1\,\bar{b}_2\,\bar{b}_3 = \frac{1}{v^3}(\bar{a}^2\times\bar{a}^3)\;(\bar{a}^3\times\bar{a}^1)\;(\bar{a}^1\times\bar{a}^2) =$$

$$= \frac{1}{v^3}(\bar{a}^2\,\bar{a}^3\,\bar{a}^1)\cdot(\bar{a}^3\,\bar{a}^1\,\bar{a}^2) = \frac{1}{v}.$$

Fiind dat un vector $\bar{b}$ constant, ecuația $\bar{b}\bar{r} = c$ (c fiind o constantă) reprezintă un plan perpendicular pe vectorul $\bar{b}$ și situat la distanța $\frac{c}{|\bar{b}|}$ dela origine.

Alegem, ca mai sus, originea într'un nod al rețelei Bravais, deci

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{3} n_i\,\bar{a}^i \qquad (n_i\text{—întregi}).$$

Fie

$$\bar{b} = \sum_{j=1}^{3} m^j\,\bar{b}_j \qquad (m^j\text{—întregi})$$

un vector al rețelei reciproce. Ecuația planului se scrie (folosind proprietatea vectorilor reciproci $\bar{a}^i\,\bar{b}_j = \delta^i_j$)

$$\bar{b}\bar{r} = \sum_{i=1}^{3} n_i\,m^i = n_1\,m^1 + n_2\,m^2 + n_3\,m^3 = c. \qquad (\lambda)$$

Pentru ca acest plan să fie un plan nodal al rețelei, deci să conțină o infinitate de noduri, (iar pentru aceasta este suficient să conțină trei noduri), trebue ca n_i, m^i și c să fie întregi. Pentru m^i fixați și pentru diferite valori întregi ale lui c vom obține o familie de plane nodale paralele între ele. Am pus astfel în corespondență fiecărui vector covariant al rețelei reciproce o familie de plane nodale paralele, și invers.

Numerele m^i determină complect familia de plane și pot fi alese prime între ele, deoarece orice factor comun poate fi inclus în c. Aceste numere se numesc indicii Miller ai familiei respective de plane și se notează (m^1, m^2, m^3).

Scanned with OKEN Scanner

Lungimile segmentelor tăiate pe axele de coordonate ale rețelei Bravais de planele familiei de indice (m^1, m^2, m^3) sunt între ele în raportul $\frac{1}{m^1}:\frac{1}{m^2}:\frac{1}{m^3}$ (§ 35). Este ușor de văzut că distanța dintre două plane consecutive din aceeași familie este egală cu $\frac{1}{b}$ ($\vec{b}$ fiind vectorul asociat familiei).

Indicii Miller ale planelor paralele cu cele trei fețe ale celulei elementare sunt respectiv (1 0 0), (0 1 0), (0 0 1). Planul diagonal principal are indicii Miller (1 1 1), etc.

Indicii Miller joacă un rol extrem de important în analiza structurală cu raze X a cristalelor.

Razele X, reflectate pe diferite plane ale aceleiași familii, interferează și se întăresc sau se anulează, după cum diferența de drum este un multiplu par sau impar al jumătății de lungime de undă. Studiind figurile de interferență formate, se pot trage concluzii asupra așezării planelor reticulare, a distanțelor dintre ele, etc. [1])

EXERCIȚII

1. Se dau trei puncte fixe A_1, A_2, A_3 și un punct mobil M în afara planului lor. Să se arate că

$$\overline{S}=\overline{MA_1}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{MA_2}\times\overline{A_3A_1}+\overline{MA_3}\times\overline{A_1A_2}=\overline{\text{const.}}$$

Interpretare geometrică.

Indicație. Se va descompune $\overline{MA_2}=\overline{MA_1}+\overline{A_1A_2}$, $\overline{MA_3}=\overline{MA_1}+\overline{A_1A_3}$.

2. Condiția necesară și suficientă pentru ca

$$\overline{V}_1+\overline{V}_2+\overline{V}_3=0 \quad \text{este} \quad \overline{V}_1\times\overline{V}_2=\overline{V}_2\times\overline{V}_3=\overline{V}_3\times\overline{V}_1.$$

Indicație. Înmulțind vectorial $\overline{V}_1+\overline{V}_2+\overline{V}_3=0$ pe rând cu $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ se dovedește că condiția este necesară. Pentru a dovedi că este și suficientă, din $\overline{V}_1\times\overline{V}_2=\overline{V}_2\times\overline{V}_3=\overline{V}_3\times\overline{V}_1$ se deduce că $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt coplanari, adică există α, β, γ, nu toți nuli, astfel că $\alpha\overline{V}_1+\beta\overline{V}_2+\gamma\overline{V}_3=0$ și se determină α, β, γ.

3. Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca trei puncte A, B, C să fie coliniare este ca pentru orice punct O să avem:

$$\overline{OA}\times\overline{OB}+\overline{OB}\times\overline{OC}+\overline{OC}\times\overline{OA}=0.$$

Indicație. Se va ține seamă de interpretarea geometrică a acestei sume sau se va scrie $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}$, $\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}$ și se va desvolta.

4. Să se arate că fiind date n puncte A_i, pentru orice punct O avem

$$\overline{S}=\overline{OA_1}\times\overline{OA_2}+\overline{OA_2}\times\overline{OA_3}+\cdots+\overline{OA}_{n-1}\times\overline{OA_n}+\overline{OA_n}\times\overline{OA_1}=\overline{\text{const.}}$$

Interpretare geometrică. Să se deducă de aci teorema: *suprafața orientată a unui poliedru este nulă.*

Indicație. Se va scrie $\overline{OA_i}=\overline{OA_1}+\overline{A_1A_i}$.

5. Să se arate că pentru trei versori coplanari $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{U}_3$, există relația

$$\overline{U}_1\sin(\overline{U}_2,\overline{U}_3)+\overline{U}_2\sin(\overline{U}_3,\overline{U}_1)+\overline{U}_3\sin(\overline{U}_1,\overline{U}_2)=0,$$

unde unghiurile $(\overline{U}_i,\overline{U}_j)$ se socotesc orientate.

---

[1]) *V. Chitalgorodschi*, Op. cit, sau *G. S. Landsberg*, Optica, Ed. Tehnică, București, 1950.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Vectorii $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{U}_3$, fiind coplanari, între ei există o relație de forma $\alpha\overline{U}_1+\beta\overline{U}_2+\gamma\overline{U}_3=0$. Se vor determina α, β, γ în afara unui factor, înmulțind această relație vectorial cu $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ și $\overline{U}_3$.

6. Să se arate că vectorii $\overline{V}_1(\overline{V}_2\overline{V}_3)-\overline{V}_2(\overline{V}_3\overline{V}_1)$ și $\overline{V}_3$ sunt ortogonali,

Indicație. Se va arăta că produsul lor scalar este nul.

7. Dacă $\overline{A}$ este un vector oarecare, iar $\overline{u}$ un versor oarecare, să se arate că vectorii $\overline{A}-(\overline{A}\overline{u})\overline{u}$ și $\overline{u}$ sunt ortogonali. Să se dea și o demonstrație geometrică,

8. In ce caz suma și diferența a doi vectori sunt vectori perpendiculari? Interpretare geometrică.

Indicație. $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=a^2-b^2=0$; rezultă $\overline{a}=\overline{b}$. Interpretare: Dacă diagonalele unui paralelogram sunt perpendiculare, paralelogramul este un romb.

9. In ce caz $(\overline{a}\overline{b})\overline{c}=\overline{a}(\overline{b}\overline{c})$.

R. 1°, $\overline{a}$ și $\overline{c}$ perpendiculari pe $\overline{b}$; 2°. $\overline{a}$ și $\overline{c}$ coliniari.

10. Să se demonstreze vectorial că diagonalele unui dreptunghi sunt egale.

Indicație. Se va scrie $(\overline{a}+\overline{b})^2=(\overline{a}-\overline{b})^2=a^2+b^2$.

11. Suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor.

Indicație. $(\overline{a}+\overline{b})^2+(\overline{a}-\overline{b})^2=2(\overline{a}^2+\overline{b}^2)$.

12. Să se arate că pentru patru puncte A_0, A_1, A_2, A_3, situate oricum în spațiu, există relația lui Euler generalizată:

$$\overline{A_0A_1}\cdot\overline{A_2A_3}+\overline{A_0A_2}\cdot\overline{A_3A_1}+\overline{A_0A_3}\cdot\overline{A_1A_2}=0.$$

Indicație. Se va scrie $\overline{A_0A_2}=\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_0A_3}=\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}$.

Observație. Se deduce de aici că dacă două perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sunt perpendiculare, atunci și a treia pereche este formată din muchii perpendiculare. Deasemenea, dacă cele patru puncte sunt coplanare, se deduce că înălțimile unui triunghi sunt concurente.

13. Se dau cinci puncte A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 situate oricum în spațiu. Să se demonstreze relația $\overline{A_0A_1}\cdot\overline{A_2A_4}+\overline{A_0A_2}\cdot\overline{A_3A_1}+\overline{A_0A_3}\cdot\overline{A_4A_2}+\overline{A_0A_4}\cdot\overline{A_1A_3}=0$.

Indicație. Se va proceda ca în problema precedentă.

14. Se dă o sferă cu centrul O și de rază R, și P, P' două puncte de pe sferă, diametral opuse. Să se arate că oricare ar fi punctul M din spațiu

$$\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=\overline{MO}^2-R^2=\text{const.}$$

Indicație. Se va scrie $\overline{MP}=\overline{MO}+\overline{OP}$, etc.

15. Să se demonstreze vectorial că dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte neparalele ale unui plan, ea este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

Indicație. Dacă $\overline{u}$ și $\overline{v}$ sunt vectorii neparaleli, care determină planul, orice vector $\overline{w}$ se scrie $\overline{w}=\lambda\overline{u}+\mu\overline{v}$. Fie $\overline{A}$ un vector perpendicular pe $\overline{u}$ și $\overline{v}$. Inmulțind scalar relația de mai sus cu $\overline{A}$, deducem $\overline{A}\overline{w}=0$.

16. Să se calculeze medianele unui triunghi în funcție de laturi și unghiuri.

Indicație. Fie A' mijlocul lui BC din triunghiul ABC. $\overline{AA'}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$, de unde se deduce prin ridicare la pătrat $m_a^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cos A.)$ Pe de altă parte, avem

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad\text{deci}\quad m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

17. Să se calculeze mărimea rezultantei a doi vectori.

Indicație. Fie $\overline{R}=\overline{V}_1+\overline{V}_2$. Ridicând la pătrat, avem

$$R^2=V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos(\overline{V}_1,\overline{V}_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

18. Să se calculeze mărimea rezultantei a n vectori.

Indicație. $\bar{R}=\bar{V}_1+\bar{V}_2+\cdots+\bar{V}_n=\Sigma\bar{V}_i$; procedând ca mai sus, se obține $R^2=\Sigma V_i^2+2\sum_{i\neq j}V_iV_j\cos(\bar{V}_i,\bar{V}_j)$.

19. Să se adune la vectorul $\bar{u}$ un multiplu al vectorului $\bar{v}$, astfel ca suma $\bar{u}+\lambda\bar{v}$ să fie perpendiculară pe un al treilea vector $\bar{w}$.

R. Dacă $\bar{v}\bar{w}\neq 0$, $\lambda=-\dfrac{\bar{u}\bar{w}}{\bar{v}\bar{w}}$; dacă $\bar{v}\bar{w}=0$, condiția nu poate fi satisfăcută decât dacă și $\bar{u}\bar{w}=0$ și atunci este satisfăcută pentru orice λ.

20. Care este locul geometric al extremităților vectorilor, care au originea comună O și aceeași proiecție pe direcția unui vector dat $\bar{n}$.

R. Un plan perpendicular pe $\bar{n}$.

21. Să se arate că $ab\geq\bar{a}\bar{b}\geq -ab$ sau, ceeace este tot una, $(\bar{a}\bar{b})^2\leq a^2b^2$. In ce caz are loc egalitatea? Ce rezultă din relația $\bar{a}\bar{b}=\bar{a}\bar{c}$ $(\bar{a}\neq 0)$?

R. $\bar{a}$ perpendicular pe $\bar{b}-\bar{c}$ sau $\bar{b}=\bar{c}$.

22. Să se demonstreze identitatea:

$$(\bar{b}-\bar{a})^2+(\bar{c}-\bar{b})^2+(\bar{d}-\bar{c})^2+(\bar{a}-\bar{d})^2=(\bar{c}-\bar{a})^2+(\bar{d}-\bar{b})^2+(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d})^2.$$

Considerând vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ ca vectori de poziție ai vârfurilor unui patrulater strâmb, să se deducă teorema: Suma pătratelor laturilor unui patrulater strâmb este egală cu suma pătratelor diagonalelor plus de patru ori pătratul segmentului, care unește mijloacele diagonalelor.

23. Se dau trei versori doi câte doi ortogonali, $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$. Să se afle unghiul φ format de bisectoarele unghiurilor $(\bar{a},\bar{b})$ și $(\bar{a},\bar{c})$, precum și unghiul θ format de vectorul $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ cu această bisectoare.

Indicație. $\cos\varphi=\dfrac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{c}|}=1/2$;

$$\cos\theta=\frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}};\quad\theta\cong 35^\circ 16'.$$

24. Se dă vectorul $\bar{a}$. Să se determine toți vectorii $\bar{b}$, care au proprietatea ca proecția vectorului $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ să fie egală cu proiecția vectorului $\bar{b}$ pe $\bar{a}$.

Indicație. Se scrie $\dfrac{\bar{a}\bar{b}}{a}=\dfrac{\bar{a}\bar{b}}{b}$; rezultă fie $\bar{a}\bar{b}=0$, fie $a=b$.

25. Fie n puncte A_i de mase m_i și G centrul lor de greutate. Să se arate că pentru orice punct P are loc relația $\Sigma m_i\overline{PA}_i^2=\Sigma m_i\overline{GA}_i^2+\overline{PG}^2\Sigma m_i$ (Stewart-Leibnitz).

Indicație. Se va scrie $\overline{PA}_i=\overline{PG}+\overline{GA}_i$ și se va ține seamă că $\Sigma m_i\overline{GA}_i=0$. Această relație conduce, în mecanică, la o teoremă importantă asupra momentelor de inerție.

26. Fie A_i, $(i=1,2,\ldots,p)$ p puncte în spațiu, de mase m_i și G baricentrul lor. Să se demonstreze relația

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}m_im_k\overline{A_iA_k}^2=2m\sum_{i=1}^{p}m_i\overline{GM}_i^2.$$

Indicație. Făcând punctul P din relația lui Stewart să coincidă cu A_i, avem

$$\sum_{k=1}^{p}m_k\overline{A_iA_k}^2=mA_iG^2+\sum_{k=1}^{p}m_k\overline{GA}_k^2,\quad\text{unde}\quad m=\Sigma m_k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se multiplică relația precedentă cu m_i și se sumează relativ la i.
Introducând punctul de referință P, relația se mai poate scrie

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} m_i m_k \overline{A_iA_k}^2 = 2m\sum_{k=1}^{p} m_k \overline{OA}_k^2 - 2m^2\overline{OG}^2 .$$

27. Fie $M_1, M_2, \ldots, M_n$ n puncte din spațiu și $m_1, m_2, \ldots, m_n$, n scalari. Să se găsească locul geometric al punctelor X care verifică relația:

$$\Sigma m_i \overline{XM}_i^2 = \lambda^2,$$

atât în cazul $\Sigma m_i \neq 0$, cât și în cazul $\Sigma m_i = 0$.

Indicație. Se va ține seamă de exercițiul 25.

28. Să se calculeze produsele mixte:

$$[\bar{a}, \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}],\quad [\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}],\quad [\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}+\bar{c}, \bar{c}+\bar{a}]$$

și să se interpreteze geometric rezultatul:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\,;\ 0\,;\ 2[\bar{a}\bar{b}\bar{c}].$$

29. Să se arate că produsul mixt $\overline{AA'}\,(\overline{AB}\times\overline{A'B'})$ rămâne invariant când vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$ alunecă pe liniile lor de acțiune. Interpretare geometrică.

30. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori liniar independenți și $\bar{v}$ un vector paralel cu planul lor. Să se arate că

$$\bar{v} = \frac{(\bar{a}\times\bar{b})(\bar{v}\times\bar{b})}{(\bar{a}\times\bar{b})^2}\bar{a} + \frac{(\bar{b}\times\bar{a})(\bar{v}\times\bar{a})}{(\bar{b}\times\bar{a})^2}\bar{b}.$$

Indicație. Avem $\bar{v}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$. Multiplicând vectorial cu $\bar{a}$ și $\bar{b}$, obținem: $\bar{v}\times\bar{a} = \mu(\bar{b}\times\bar{a})$; $\bar{v}\times\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$, λ și μ se vor determina multiplicând aceste relații scalar cu $\bar{b}\times\bar{a}$ și $\bar{a}\times\bar{b}$.

31. Fie $\bar{a}$ un vector dat și $\bar{b}$ un vector arbitrar. Să se arate că orice vector $\bar{v}$, perpendicular pe $\bar{a}$, se poate scrie sub forma

$$\bar{v} = \lambda\left(\bar{a}\frac{\bar{a}\bar{b}}{a^2} - \bar{b}\right);\ \lambda \text{ fiind arbitrar.}$$

Indicație. Se efectuează produsul scalar $\bar{a}\cdot\bar{v}$.

32. Dacă $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}\times\bar{d}$ și $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{d}$, atunci vectorii $\bar{a}-\bar{d}$ și $\bar{b}-\bar{c}$ sunt paraleli

Indicație. Se va arăta că $(\bar{a}-\bar{d})\times(\bar{b}-\bar{c})=0$.

33. In ce caz $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

Indicație. Se va desvolta după formula dublului produs vectorial și se va ține seama de exercițiul 9.

34. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{\bar{a}\bar{b}}\cdot\frac{\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} + 1 = 0.$$

Indicație. Se va desvolta dublul produs vectorial și apoi se vor calcula produsele mixte, care rezultă din înmulțirea cu $\bar{a}\times\bar{b}$.

35. Să se arate că pentru orice vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ liniar independenți

$$\frac{(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{a}\times\bar{c})}{(\bar{a}\times\bar{b},\ \bar{b}\times\bar{c},\ \bar{c}\times\bar{a})} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

36. Să se demonstreze identitatea

$$\{[(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}]\times\bar{d}\}\times\bar{e} = \bar{d}[(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{e})] - (\bar{d}\bar{e})[(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}].$$

Scanned with OKEN Scanner

37. Fie $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n+2}$, $n+3$ vectori și $\bar{p}_0 = \bar{a}_0 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)$, $\bar{p}_1 = \bar{a}_0 \times (\bar{p}_0 \times \bar{a}_3)$, $\bar{p}_2 = \bar{a}_0 \times (\bar{p}_1 \times \bar{a}_4) \ldots \bar{p}_n = \bar{a}_0 \times (\bar{p}_{n-1} \times \bar{a}_{n+2})$.

Să se demonstreze că

$$\bar{p}_n = (\bar{a}_0\bar{a}_3)(\bar{a}_0\bar{a}_4)\ldots(\bar{a}_0\bar{a}_n)\,\bar{p}_0.$$

Indicație. Se va demonstra prin inducție completă.

38. Fie $OABC$ un triedru cu vârful în O. Să se arate că planele P_A, P_B, P_C, duse respectiv prin OA, OB, OC, perpendicular pe planele OBC, OCA, OAB, se taie după o aceeași dreaptă Δ.

Indicație. Planul P_A este perpendicular pe vectorul dublu produs vectorial $\bar{S}_A = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, unde $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, sunt versorii muchiilor OA, OB, OC. Deoarece

$$[\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})] + [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a})] + [\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})] = 0,$$

rezultă că $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$ sunt coplanari și deci planele P_A, P_B, P_C se taie după o perpendiculară pe planul vectorilor $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$.

Fie $\bar{d}$ un vector coliniar cu Δ și α, β, γ unghiurile fețelor triedrului. Avem

$$\bar{d} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}.$$

Multiplicând scalar, pe rând, relația precedentă, cu $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$, vectori perpendiculari pe $\bar{d}$, se găsește că

$$\bar{d} = \lambda\left(\frac{\bar{a}}{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma} + \frac{\bar{b}}{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha} + \frac{\bar{c}}{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}\right).$$

39. Fie $OABC$ și $OA_1B_1C_1$ două triedre cu același vârf O. Dacă planele P_A, P_B, P_C, duse respectiv prin muchiile OA, OB, OC, perpendicular pe fețele OB_1C_1, OC_1A_1, OA_1B_1 sunt concurente, atunci și planele P_{A_1}, P_{B_1}, P_{C_1} duse prin muchiile OA_1, OB_1, OC_1, perpendicular pe fețele OBC, OCA, OAB, sunt deasemenea concurente.

Indicație. Planul P_A este perpendicular pe dublul produs vectorial

$$\bar{S}_A = \bar{a} \times (\bar{b}_1 \times \bar{c}_1),$$

unde $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$ sunt versorii muchiilor celor două triedre.

Condiția din problemă cere ca vectorii $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$, să fie coplanari, deci ca produsul mixt $(\bar{S}_A, \bar{S}_B, \bar{S}_C) = 0$. Se găsește imediat că

$$(\bar{S}_A, \bar{S}_B, \bar{S}_C) = (\bar{a}_1\bar{b}_1\bar{c}_1)[(\bar{a}\bar{c}_1)(\bar{b}\bar{a}_1)(\bar{c}\bar{b}_1) - (\bar{a}\bar{b}_1)(\bar{b}\bar{c}_1)(\bar{c}\bar{a}_1)]$$

și deci, schimbând indicii

$$(\bar{S}_{A_1}, \bar{S}_{B_1}, \bar{S}_{C_1}) = (\bar{a}\bar{b}\bar{c})[(\bar{a}_1\bar{c})(\bar{b}_1\bar{a})(\bar{c}_1\bar{b}) - (\bar{a}_1\bar{b})(\bar{b}_1\bar{c})(\bar{c}_1\bar{a})],$$

de unde se scoate rezultatul cerut, deoarece parantezele drepte sunt egale și de semn contrar. Triedrele $(OABC)$, $(OA_1B_1C_1)$ fiind nedegenerate, avem în general

$$\frac{(\bar{S}_A\bar{S}_B\bar{S}_C)}{(\bar{a}_1\bar{b}_1\bar{c}_1)} + \frac{(\bar{S}_{A_1}\bar{S}_{B_1}\bar{S}_{C_1})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})} = 0.$$

40. Care este expresia proecției unui vector $\bar{v}$ pe un plan dat prin versorul normalei sale $\bar{n}$ și un punct al său?

Indicație. Se va descompune vectorul $\bar{v}$ după $\bar{n}$ și după un vector din plan. $\bar{v} = \bar{n}(\bar{v}\bar{n}) + \bar{n} \times u$, unde $\bar{u} = \bar{v} \times \bar{n} + \lambda\bar{n}$. Proiecția lui $\bar{v}$ pe plan va fi $\bar{n} \times (\bar{v} \times \bar{n})$.

41. Să se demonstreze că condiția necesară și suficientă, pentru ca un unghi drept să se proiecteze în adevărata mărime pe un plan, este ca una din laturile unghiului drept să fie paralelă cu planul.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Se va folosi exercițiul 40.

42. Să se demonstreze prin calcul vectorial teorema celor trei perpendiculare.

43. Să se arate că, oricare ar fi vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, vectorii $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{c}$, $\bar{a}\times\bar{d}$ sunt coplanari. Să se deducă apoi coeficienții β, γ, δ din relația

$$\beta(\bar{a}\times\bar{b})+\gamma(\bar{a}\times\bar{c})+\delta(\bar{a}\times\bar{d})=0.$$

Indicație. $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{c}$, $\bar{a}\times\bar{d}$ sunt perpendiculari pe $\bar{a}$, iar $\beta:\gamma:\delta=\bar{a}\bar{c}\bar{d}:\bar{a}\bar{d}\bar{b}:\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

44. Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca patru puncte A,B,C,D, de vectori de poziție $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, să fie în același plan este

$$\bar{a}\bar{b}\bar{d}+\bar{a}\bar{d}\bar{c}+\bar{d}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

Indicație. Se va scrie că produsul mixt $(\bar{d}-\bar{a},\ \bar{d}-\bar{b},\ \bar{d}-\bar{c})=0$.

45. Să se demonstreze relațiile:

$$(\bar{b}\times\bar{c})(\bar{a}\times\bar{d})+(\bar{c}\times\bar{a})(\bar{b}\times\bar{d})+(\bar{a}\times\bar{b})(\bar{c}\times\bar{d})=0;$$

$$(\bar{b}\times\bar{c})\times(\bar{a}\times\bar{d})+(\bar{c}\times\bar{a})\times(\bar{b}\times\bar{d})+(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=-2(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})\,\bar{d}.$$

$$(\bar{d}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{c})+(\bar{d}-\bar{b})(\bar{c}-\bar{a})+(\bar{d}-\bar{c})(\bar{a}-\bar{b})=0;$$

$$(\bar{a}-\bar{d})\times(\bar{b}-\bar{c})+(\bar{b}-\bar{d})\times(\bar{c}-\bar{a})+(\bar{c}-\bar{d})\times(\bar{a}-\bar{b})=2[\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}].$$

46. Să se calculeze produsul

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\{(\bar{c}\times\bar{d})\times(\bar{e}\times\bar{f})\}.$$

47. Să se arate că

$$(\bar{p}\bar{q}\bar{r})(\bar{a}\times\bar{b})=\begin{vmatrix}\bar{a}\bar{p} & \bar{b}\bar{p} & \bar{p}\\ \bar{a}\bar{q} & \bar{b}\bar{q} & \bar{q}\\ \bar{a}\bar{r} & \bar{b}\bar{r} & \bar{r}\end{vmatrix};\quad (\bar{p}\bar{q}\bar{r})\neq 0.$$

Indicație. Se va scrie $\bar{a}\times\bar{b}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r}$. Din determinarea coeficienților va rezulta relația cerută.

48. Să se demonstreze relația

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})(\bar{p}\bar{q}\bar{r})=\begin{vmatrix}\bar{a}\bar{p} & \bar{a}\bar{q} & \bar{a}\bar{r}\\ \bar{b}\bar{p} & \bar{b}\bar{q} & \bar{b}\bar{r}\\ \bar{c}\bar{p} & \bar{c}\bar{q} & \bar{c}\bar{r}\end{vmatrix}.$$

Se va deduce de aici regula de înmulțire a determinanților.

49. Să se demonstreze relațiile:

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}'+\bar{b}'+\bar{c}')=3;$$

$$\bar{a}'[\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{a}')]=1-a^2a'^2;$$

$$[\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})][\bar{a}'\times(\bar{b}'\times\bar{c})]=(\bar{a}\bar{b})(\bar{a}'\bar{b}')+(\bar{a}\bar{c})(\bar{a}'\bar{c}');$$

$$\bar{a}\times\bar{a}'+\bar{b}\times\bar{b}'+\bar{c}\times\bar{c}'=0,$$

unde $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ sunt reciprocii vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

50. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ fiind trei vectori liniar independenți, iar $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, reciprocii lor, pentru orice vector $\bar{v}$ avem relația

$$v^2=(\bar{a}\bar{v})(\bar{a}'\bar{v})+(\bar{b}\bar{v})(\bar{b}'\bar{v})+(\bar{c}\bar{v})(\bar{c}'\bar{v}).$$

Indicație. Se va descompune $\bar{v}$ după $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ și apoi se va calcula $\bar{v}\,\bar{v}$

Scanned with OKEN Scanner

51. Cu $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ca vectori de bază şi $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, reciprocii lor, condiţia de ortogonalitate a doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ se poate scrie în unul din următoarele două moduri:

$$(\bar{a}\bar{u})(\bar{a}'\bar{v})+(\bar{b}\bar{u})(\bar{b}'\bar{v})+(\bar{c}\bar{u})(\bar{c}'\bar{v})=0;$$

$$(\bar{a}\bar{u})(\bar{v}\bar{b}\bar{c})+(\bar{b}\bar{u})(\bar{a}\bar{v}\bar{c})+(\bar{c}\bar{u})(\bar{a}\bar{b}\bar{v})=0.$$

52. Analog, condiţia de paralelism a doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ se poate exprima prin

$$(\bar{a}\times\bar{u})(\bar{a}'\bar{v})+(\bar{b}\times\bar{u})(\bar{b}'\bar{v})+(\bar{c}\times\bar{u})(\bar{c}'\bar{v})=0.$$

53. Intre $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ şi reciprocii lor $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ există relaţia

$$(\bar{a}'\bar{b}\bar{c})+(\bar{a}\bar{b}'\bar{c}')+(\bar{a}\bar{b}\bar{c}')=(\bar{a}\bar{b}\bar{c})(a'^2+b'^2+c'^2).$$

54. Deasemenea

$$(a\bar{a}'\bar{b}')+(\bar{b}\bar{b}'\bar{c})+(\bar{c}\bar{c}'\bar{a}')=\frac{\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

55. $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ fiind reciprocii vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, avem relaţia

$$(\bar{a}\times\bar{b},\ \bar{b}\times\bar{c},\ \bar{c}\times\bar{a})=(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^4(\bar{a}'\times\bar{b}',\ \bar{b}'\times\bar{c}',\ \bar{c}'\times\bar{a}').$$

Indicaţie. Se va scrie $\bar{a}\times\bar{b}=(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{c}'$; $\bar{a}'\times\bar{b}'=(\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}')\bar{c}$, etc.

56. Să se arate că dacă $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ sunt reciprocii vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, atunci vectorii

$$\bar{p}'=\bar{b}'\times\bar{c}',\quad \bar{q}'=\bar{c}'\times\bar{a}',\quad \bar{r}'=\bar{a}'\times\bar{b}'$$

sunt reciprocii vectorilor

$$\bar{p}=\bar{b}\times\bar{c},\quad \bar{q}=\bar{c}\times\bar{a},\quad \bar{r}=\bar{a}\times b.$$

Indicaţie. Se va arăta că $\bar{p}'=\dfrac{\bar{q}\times\bar{r}}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}}$, etc.

*B. OPERAŢII VECTORIALE ÎN SPAŢIUL AFIN

*§ 59. Produse de mărimi geometrice şi fizice [1])

Operaţia de compunere a mărimilor aparţinând unei anumite specii conduce la formarea unei mărimi cu ajutorul a două mărimi date. Suma obţinută este sau o mărime de aceeaşi specie cu cele două mărimi, sau nu aparţine acelei specii. In acest ultim caz, suntem conduşi la o nouă mărime, dacă există o relaţie de egalitate şi putem forma o nouă specie mai largă, ce va cuprinde pe cea iniţială, în care vom putea compune mărimile. Un astfel de exemplu este în spaţiul euclidian, specia versorilor în care suma a doi versori nu mai este în general un versor, ci un vector având un modul oarecare cel mult egal cu 2. Vom putea aduna însă, versorii ca vectori obişnuiţi în specia vectorilor. Un alt exemplu va fi constituit de vectorii alunecători, a căror sumă, deasemeni, nu este în general un vector alunecător, ci un sistem de vectori alunecători, constituind o mărime mai generală, numită torsor.

Operaţiile metrice introduse asupra vectorilor ne-au condus la noui mărimi, ca produsul vectorial, produsul mixt, sau dublul produs vectorial, precum şi

[1]) Intreg punctul *B* poate fi lăsat pentru a doua lectură.

Scanned with OKEN Scanner

la produsul scalar, care este o mărime scalară. *In general, prin aceste operaţii obţinem mărimi de specii diferite de cele cărora le aparţin cei doi factori* şi aceste mărimi sunt asociate unor obiecte geometrice, deasemenea diferite de cele asociate factorilor. Astfel, produsul vectorial este o mărime asociată unui element plan format cu cele două segmente orientate, corespunzătoare factorilor săi, produsul mixt este asociat unui paralelipiped, dublul produs vectorial unui element plan orientat şi unui segment orientat, etc.

Reprezentarea prin vectori a produselor obţinute nu înseamnă înglobarea acestor mărimi în specia mărimilor vectoriale ale spaţiului, ci numai un mijloc de reducere a calculului algebric cu aceste mărimi la calcule cu vectori. Folosirea operaţiilor metrice pentru introducerea produselor vectoriale, scalare, etc. ascunde natura specifică a unora din aceste mărimi, astfel încât conduce la atribuirea eronată a caracterului de mărime vectorială unor mărimi de o natură fizică mai complexă. Astfel, momentul unei forţe în raport cu un punct este considerat ca un vector în spaţiu şi ca un scalar în plan (momentul static).

In realitate, momentul este un bivector legat care, măsurat în spaţiul cu trei dimensiuni, are trei componente ca şi vectorul, iar în plan are o singură componentă. Extensiunea acestei noţiuni la spaţiul cu patru dimensiuni arată că în acel spaţiu momentul va avea şase componente, deci nu va mai fi un vector. Prin urmare, asimilarea momentului cu un vector este posibilă numai în spaţiul cu trei dimensiuni.

Este deci necesar să considerăm mărimile obţinute prin operaţiile de produs vectorial şi scalar, *independent de reprezentarea lor vectorială sau scalară*, deci *independent de operaţiile metrice*, care ne-au condus la aceste reprezentări. Pentru produsul vectorial, această considerare a fost făcută dela început, stabilindu-se pentru mărimile bivectoriale o relaţie de egalitate şi operaţia de adunare. Atrăgând atenţia asupra acestui punct de vedere, vom face observaţia că bivectorul a fost considerat ca o mărime geometrică a spaţiului afin ca şi vectorul şi că reprezentarea sa printr'un *vector normal* este posibilă numai în spaţiul euclidian. Deci; *pentru a elimina coincidenţele accidentale, va trebui să considerăm produsele de mărimi vectoriale în spaţiul afin.*

Dacă examinăm operaţiile de produs scalar şi vectorial în analogie cu produsul algebric de numere, constatăm că o proprietate comună a acestor operaţii este *distributivitatea* faţă de adunare.

In acelaşi timp, în ambele operaţii, cei doi factori sunt două mărimi asociate la două obiecte geometrice. In produsul vectorial cei doi vectori sunt asociaţi la două perechi de puncte $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ având aceeaşi origine, iar produsul vectorial este asociat figurii formate de cele trei puncte O, A, B, care determină un element plan orientat. In produsul scalar deasemenea, unul din vectori este asociat unei perechi de puncte (sau unui segment orientat), iar celălalt unui biplan perpendicular pe el. Prin urmare, *în ambele produse, operaţia geometrică asociază o nouă mărime geometrică figurii formate din două figuri, cărora le sunt asociate anticipat două mărimi geometrice, cei doi factori ai produsului.*

Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru produsul mixt, în care paralelipipedul este format de un element plan orientat şi un vector. Acestui paralelipiped i se asociază o mărime nouă, care este volumul său orientat.

Deasemenea, atât produsul vectorial, cât şi cel scalar se bucură de proprietatea că prin amplificarea unuia din factori printr'un scalar, produsul însuşi se amplifică prin acel scalar. Vom numi această proprietate *omogenitate*.

Scanned with OKEN Scanner

In ceeace privește proprietatea de *comutativitate*, aceasta nu se regăsește decât la produsul scalar, produsul vectorial fiind anticomutativ sau alternat.

Produsul scalar nu se poate repeta, operația $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ nefiind un produs scalar, pe când produsul vectorial este *iterativ* în două moduri, ca dublu produs vectorial prin operațiile

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) \quad \text{și} \quad (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c},$$

In sfârșit, nici produsul scalar, nici cel vectorial nu sunt *asociative*, operația $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}$ neavând sens pentru primul, iar

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})\neq(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$$

în general, pentru al doilea.

Din aceste observații asupra caracterelor algebrice ale produselor de mărimi fizice, introduse ca urmare a necesității de a exprima matematic mărimi fizice și geometrice dintre cele mai importante, ca lucrul mecanic, momentul unei forțe, aria orientată, volumul orientat, etc., se desprinde constatarea că *singurele proprietăți comune tuturor produselor menționate sunt distributivitatea și omogenitatea.*

Procedeul prin care se obțin produsele scalare și vectoriale poate fi extins și aplicat la formarea de noi mărimi asociate unor noi obiecte geometrice.

Fiind date două obiecte geometrice $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$, cărora le sunt asociate două mărimi geometrice U și V, fie $\mathcal{W}$ un obiect geometric determinat de obiectele $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$, iar W mărimea geometrică asociată lui $\mathcal{W}$. Prin aceasta înțelegem că oricărei figuri din $\mathcal{U}$ și oricărei figuri din $\mathcal{V}$ îi va corespunde o nouă figură și că mulțimea acestor noi figuri se bucură de anumite proprietăți comune, astfel încât formează un obiect geometric $\mathcal{W}$. Dacă în raport cu una dintre aceste proprietăți obiectul $\mathcal{W}$ poate fi împărțit în clase, deci dacă se stabilește o relație de echivalență între figurile sale, *înafară de relațiile de echivalență din obiectele $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$*, obiectului $\mathcal{W}$ i se asociază o nouă mărime W.

Să urmărim acest proces de formare a unei mărimi cu ajutorul bivectorului. Cele două obiecte geometrice $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$ sunt mulțimea tuturor bipunctelor (O, A) considerată de două ori. Unei figuri (O, A) și unei figuri (O, B) facem să le corespundă paralelogramul $OACB$, unde C este al patrulea vârf, orientându-l prin sensul pozitiv de rotație $\overline{OA}$ spre $\overline{OB}$. Figurii (O,A) i se asociază vectorul $\bar{u}=\overline{OA}$, iar figurii (O,B) vectorul $\bar{v}=\overline{OB}$. Paralelogramul $OACB$ este mulțimea punctelor M determinate de vectorul de poziție

$$\overline{OM}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v} \qquad (0\leqq\lambda\leqq1, \quad 0\leqq\mu\leqq1).$$

Se vede deci că figura $OACB$ este determinată de cele două figuri (O,A) și (O,B) punct cu punct și orientată cu ajutorul lor.

Cum toate paralelogramele $OACB$ sunt construite in același mod, ele au un număr de proprietăți comune și constitue un obiect geometric numit paralelogramul orientat. Fiindcă două segmente orientate sunt echivalente când se suprapun prin translație, toate paralelogramele ce se suprapun prin translație vor fi echivalente. Această relație de echivalență, consecință a celei caracteristice vectorilor, nu ne conduce la o nouă mărime.

Să considerăm însă ca echivalente paralelogramele din același plan, cu aceeași orientare și cu aceeași arie. Clasele de paralelograme echivalente se vor lărgi, cuprinzând și paralelograme ce nu se suprapun prin translație, deci

Scanned with OKEN Scanner

vor fi caracterizate printr'o mărime nouă, care nu mai este o consecinţă exclusivă a echivalenţei vectorilor prin translaţie. Această mărime este *bivectorul.*

Se vede deci, că *pentru obţinerea unei noi mărimi asociate obiectului* $\mathcal{W}$ *s'a introdus o nouă relaţie de echivalenţă între figurile acestui obiect* şi că *această relaţie conţine ca un caz particular echivalenţa prin translaţie,* adică echipolenţa.

Dacă în specia formată de mărimile W putem defini operaţia de adunare, corespunzând deasemenea unei operaţii geometrice de compunere a figurilor lui $\mathcal{W}$ şi operaţia de amplificare, mărimile W sunt măsurabile. Dacă în plus, suma a două mărimi W este o mărime de aceeaşi specie cu ele, suntem conduşi la o nouă specie măsurabilă W de mărimi formate printr'o operaţie geometrică asupra a două obiecte geometrice $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$.

Intre mărimile U şi V, pe de o parte, şi mărimea W, pe de altă parte, există o corespondenţă *univocă,* în sensul că fiind date U şi V, W este determinată, deci putem spune că W este *funcţie* de U şi V.

Această corespondenţă *nu este însă biunivocă*, în sensul că fiind dată mărimea W, mărimile U şi V nu pot fi unic determinate. In adevăr, deoarece relaţia de echivalenţă pentru W este mai largă decât cea pentru U şi V, orice pereche U şi V, corespunzătoare unui W dat, poate fi înlocuită cu alta echivalentă, formată cu două mărimi $U_1 \neq U$ şi $V_1 \neq V$.

Din consideraţiile făcute rezultă că, din punct de vedere teoretic, putem forma mărimi geometrice, care sunt funcţii de alte mărimi date. Cum însă aceste mărimi nu sunt numere, *pentru a se putea preciza corespondenţa univocă între* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, *pe de o parte, şi* $\mathcal{W}$ *pe de altă parte, este necesar să se cunoască operaţiile geometrice prin care se obţine obiectul* $\mathcal{W}$ *din obiectele* $\mathcal{U}$ *şi* $\mathcal{V}$. In consecinţă, orice cercetare a proprietăţilor mărimilor, funcţii de alte mărimi, trebue să înceapă prin exprimarea efectivă a mărimilor W în funcţie de mărimile U şi V din care sunt deduse. *Aceasta revine la studiul operaţiilor cu mărimi, deci la calculul algebric cu mărimi geometrice şi fizice.*

Vom numi *produs* a două mărimi geometrice U şi V, asociate la două obiecte geometrice $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$, orice *operaţie* asupra acestor mărimi, corespunzătoare unei operaţii geometrice prin care din $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ se obţine un obiect $\mathcal{W}$, dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

1) *determină o mărime* W *măsurabilă*;
2) *este distributivă faţă de adunare pentru fiecare din factori;*
3) *este omogenă.*

Definiţia se extinde dela sine la produse de mai mulţi factori.

Dacă notăm cu P operaţia de produs de mărimi, vom putea exprima condiţiile impuse astfel:

a) La orice pereche de elemente U, V, corespunde un element $W = P(U, V)$.

b) $P(U_1, V_1) = W_1$ şi $P(U_2, V_2) = W_2$ fiind două elemente din specia W, suma lor este un element determinat:

$$\left.\begin{array}{ll} P(U_1, V_1) + P(U_2, V_2) = W_1 + W_2 = W & \\ k\,P(U,V) + k'P(U, V) = (k + k')\,P(U, V) & \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} \textit{(măsurabilitate)}; \\ \text{c)}\ P(U, V_1 + V_2) = P(U, V_1) + P(U, V_2) & \\ P(U_1 + U_2, V) = P(U_1, V) + P(U_2, V) & \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} \textit{(distributivitate)}; \\ \text{d)}\ P(\lambda U, \mu V) = \lambda\mu P(U, V) & \textit{(omogenitate).} \end{array}\right\} \quad (80,\text{II})$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculul vectorial folosește ca operații asupra mărimilor scalare și vectoriale, înafară de adunare și produs printr'un scalar, produsul scalar și produsul vectorial. Aceste produse se mai bucură și de alte proprietăți, cum sunt comutativitatea produsului scalar, sau alternanța produsului vectorial. Ele au fost introduse ca operații metrice asupra vectorilor din spațiul euclidian, mărimile obținute fiind reprezentate prin scalari sau vectori. Aceste operații au fost extinse și la bivectori, obținându-se produsele multiple, reprezentabile deasemenea prin vectori și scalari.

După cum am atras atenția din momentul introducerii noțiunii de bivector, produsul vectorial conduce la o mărime nouă, deosebită de vector în esența sa și numai formal analoagă cu acesta. *Degajând noțiunea de produs de mărimi de caracterele particulare prezentate de diversele produse definite fiecare în parte și de reprezentarea produsului prin scalari sau vectori, se poate ajunge la înțelegerea prezenței in Calculul vectorial a unor mărimi, care nu sunt vectoriale și care, de altfel, formează majoritatea mărimilor asupra cărora operează acest calcul.* Fixându-ne ca operații adunarea, amplificarea, produsul scalar și produsul vectorial, la care suntem conduși prin cercetarea fenomenelor fizice simple, ca și prin studiul proprietăților geometrice ale spațiului, vom putea trasa cadrul Calculului vectorial și-l vom putea situa în cadrul mai general al calculului cu mărimi geometrice și fizice din care face parte ca și Calculul tensorial.

*§ 60. Produsul scalar în spațiul afin

Interpretarea proiecției ortogonale a unui vector $\overline{V}$ pe o direcție Δ ca o operație, care face să corespundă lui $\overline{V}$ și versorului $\overline{n}$ al lui Δ o mărime scalară, ne-a condus să punem în evidență un vector covariant reprezentat printr'un biplan perpendicular pe Δ (§ 46).

Deși această operație nu îndeplinește complect condițiile impuse unui produs de mărimi decât când este considerată ca un caz particular de produs scalar, o vom putea folosi pentru a defini produsul scalar de vectori ca o operație în spațiul afin, deci independent de orice noțiune de geometrie metrică.

Operația de produs scalar de vectori va fi definită între un vector contravariant $\bar{u}=\overline{OA}$ *și un vector covariant* $\overline{p}'=(P_1, P_2)$ (fig. 67). Vom măsura vectorul $\bar{u}$ cu o unitate oarecare pe direcția sa și vom folosi aceeași unitate și pentru măsura segmentului $\overline{OI}$, interceptat de $\bar{u}$ pe cele două plane P_1 și P_2.

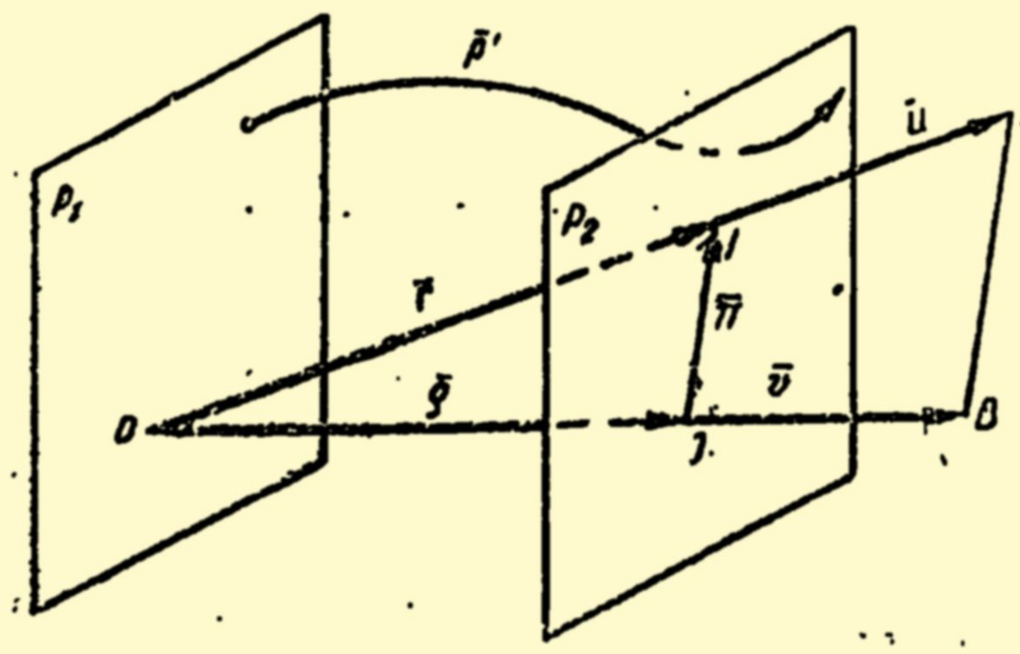


Fig. 67

Măsura vectorului covariant $\overline{p}'$ pe direcția vectorului $\bar{u}$ este inversa măsurii segmentului $\overline{OI}$ (§ 33), măsurat cu aceeași unitate. Vom numi *produs scalar* al vectorului contravariant $\bar{u}$ cu vectorul covariant $\overline{p}'$ produsul măsurilor lor pe direcția lui $\bar{u}$ și vom scrie deci

$$(\bar{u}\,\overline{p}') = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} \cdot \qquad (81,II)$$

Scanned with OKEN Scanner

Observând că raportul $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}$ reprezintă măsura vectorului $\bar{u}$ cu unitatea $\overline{OI}$, *putem defini produsul scalar al unui vector contravariant* $\bar{u}$ *cu un vector covariant* $\bar{p}'$ *ca măsura lui* $\bar{u}$ *cu segmentul interceptat de vector pe cele două plane ale lui* $\bar{p}'$ *ca unitate.*

Putem defini în mod analog produsul scalar al vectorului covariant $\bar{p}'$ *cu vectorul contravariant* $\bar{u}$ *ca măsura lui* $\bar{p}'$ *pe direcţia vectorului* $\bar{u}$ *cu segmentul* $\overline{OA}$ *ca unitate.*

In adevăr, măsura lui $\bar{p}'$ pe direcţia $\overline{OA}$ este inversa măsurii segmentului OI deci inversul raportului $\frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}$ adică $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}$.

Prima definiţie este independentă de unitatea aleasă şi se aplică ambelor produse scalare. Putem deci enunţa următoarea proprietate:

Produsul scalar al unui vector contravariant $\bar{u}$ *cu un vector covariant* $\bar{p}'$ *este comutativ.*

Vom putea scrie

$$(\bar{u}\bar{p}') = (\bar{p}'\bar{u}).$$

Din relaţia (81,II) deducem, presupunând $\overline{OI}=\overline{OA}$,

$$(\bar{u}\bar{p}')=1.$$

Prin urmare: *Produsul scalar al unui vector covariant* $\bar{p}'$ *cu un vector oarecare contravariant* $\bar{u}$, *care are extremităţile pe planele lui* $\bar{p}'$, *este egal cu unitatea:*

$$(\bar{u}\bar{p}')=1. \qquad (82, II)$$

Ţinând fixă originea O, putem considera vectorul $\overline{OI}$ ca vector de poziţie al punctului I de pe planul P_2. In acest caz, notând $\overline{OI}=\bar{r}$, relaţia

$$(\bar{p}'\bar{r})=1 \qquad (83, II)$$

determină punctele planului P_2, deci este *ecuaţia vectorială a acestui plan în spaţiul afin,* analoagă cu ecuaţia normală din spaţiul euclidian.

Dacă în (81,II) înlocuim vectorul $\bar{u}$ prin $\lambda\bar{u}$, unde λ este un parametru, vom avea

$$(\lambda\bar{u}\bar{p}')=\frac{\lambda\overline{OA}}{\overline{OI}}=\lambda\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}=\lambda(\bar{u}\bar{p}').$$

Deasemenea, dacă înlocuim vectorul $\bar{p}'$ prin $\mu\bar{p}'$, segmentul $\overline{OI}$ se reduce în raportul μ, deci devine $\frac{1}{\mu}\overline{OI}$ şi vom avea

$$(\bar{u}\cdot\mu\bar{p}')=\frac{\overline{OA}}{\frac{1}{\mu}\overline{OI}}=\mu\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}=\mu(\bar{u}\bar{p}').$$

Prin urmare: *Produsul scalar* $(\bar{u}\bar{p}')$ *este omogen:*

$$(\lambda\bar{u}\bar{p}')=\lambda\cdot(\bar{u}\bar{p}');\quad (\mu\bar{p}'\bar{u})=\mu(\bar{p}'\bar{u}). \qquad (84, II)$$

Semnificaţiile relaţiilor (84, II) sunt uşor de obţinut, fiindcă *produsul scalar este prin definiţie un număr, deci o mărime.*

Scanned with OKEN Scanner

Expresia $\lambda(\bar{u}\bar{p}')$, care înseamnă produsul lui $(\bar{u}\bar{p}')$ prin numărul λ, presupune definită în prealabil adunarea mărimilor $(\bar{u}\bar{p}')$, deci operaţia

$$(\bar{u}\bar{p}')+(\bar{u}\bar{p}')+\cdots+(\bar{u}\bar{p}')=n(\bar{u}\bar{p}'),$$

şi extensiunea sa la un număr real λ.

In cazul produselor scalare de forma $(\bar{u}\bar{p}')$, *relaţiile de omogenitate* (84, II) *definesc şi adunarea.* Observăm însă că prin aceasta n'am definit adunarea a două produse scalare oarecare $(\bar{u}\bar{p}')$ şi $(\bar{v}\bar{q}')$.

Din relaţiile

$$\left(\lambda\bar{u}\cdot\frac{1}{\lambda}\bar{p}'\right)=\lambda\frac{1}{\lambda}(\bar{u},\bar{p}')=(\bar{u}\bar{p}') \qquad (85,II)$$

deducem: *Produsul scalar nu se schimbă prin amplificarea cu acelaşi factor a vectorului* $\bar{u}$ *şi a segmentului* $\overline{OI}$, *interceptat pe vectorul covariant* $\bar{p}'$.

Relaţiile de omogenitate fiind valabile pentru orice λ real, să presupunem succesiv $\bar{u}=0$, $\bar{p}'=0$. Dacă $\bar{u}=0$, vom putea scrie $\bar{u}=0\bar{u}=0$, şi deci

$$(\bar{u}\bar{p}')=(0\bar{u},\bar{p}')=0\,(\bar{u}\bar{p}')=0.$$

Deasemenea, dacă $\bar{p}'=0$, punând $\bar{p}'=0\bar{p}'$, vom avea

$$(\bar{p}'\bar{u})=(0\bar{p}'\cdot\bar{u})=0\,(\bar{p}'\bar{u})=0$$

şi prin urmare:

Produsul scalar $(\bar{u}\bar{p}')$ *este nul când unul dintre factori este nul.*

Deşi produsul scalar este un număr, deci o mărime, el nu îşi găseşte întreaga semnificaţie ca mărime geometrică, decât legat de obiectul geometric din care provine. Acest obiect este mulţimea tuturor figurilor formate dintr'un segment orientat $\overline{OA}$ şi un biplan orientat (P_1, P_2).

O translaţie oarecare aplicată lui $\overline{OA}$ sau lui (P_1, P_2) lasă produsul scalar $(\bar{p}'\bar{u})$ neschimbat, deoarece nu modifică segmentele $\overline{OI}$ şi $\overline{OA}$. Două figuri astfel obţinute prin translaţie vor fi deci echivalente, corespunzând aceluiaşi produs scalar: Vom putea însă obţine o relaţie de echivalenţă mai largă pe baza următoarelor proprietăţi:

a) *Produsul scalar* $(\bar{p}'\bar{u})$ *nu se schimbă, când punctul* A *descrie un plan* P *paralel cu* (P_1, P_2).

In adevăr, fie $\bar{v}=\overline{OB}$ (fig. 67) vectorul de poziţie al unui punct B din planul P şi $\bar{\rho}=\overline{OJ}$ vectorul de poziţie al punctului J, în care $\overline{OB}$ intersectează planul P_2. Din asemănarea triunghiurilor OAB şi OIJ deducem

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}}.$$

Deci, conform cu definiţia produsului scalar

$$(\bar{p}'\bar{u})=(\bar{p}'\bar{v}).$$

b) *Produsul scalar nu se schimbă când biplanul* (P_1, P_2) *este înlocuit printr'un biplan* $(Q_1, Q_2)=\bar{q}'$, *care interceptează pe* $\overline{OA}=\bar{u}$ *acelaşi segment* $\overline{OI}=\bar{r}$.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea decurge din definiția produsului scalar ca raport al măsurilor segmentelor $\overline{OA}$ și $\overline{OI}$. Biplanul (Q_1, Q_2) interceptând același segment $\overline{OI}$, vom avea

$$(\bar{q}'\bar{u}) - (\bar{p}'\bar{u}) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}.$$

Ținând seama de aceste proprietăți și de cele menționate anterior, relația de echivalență în obiectul geometric considerat este următoarea: *toate figurile deduse din $\overline{OA}$ și $(P_1 P_2)$ prin translație, omoteție în raport cu punctul 0, deplasarea lui A într'un plan paralel cu (P_1, P_2), înlocuirea lui (P_1, P_2) printr'un biplan (Q_1, Q_2) ce intercepteză pe $\overline{OA}$ același segment (sau are aceeași măsură pe direcția $\overline{OA}$), precum și prin combinații ale acestor transformări, sunt echivalente, deci corespund aceluiași produs scalar.*

Dacă notăm prin $\bar{\pi}$ un vector contravariant paralel cu $\bar{p}'$ și prin $\bar{\omega}'$ un vector covariant paralel cu $\bar{u}$, relația de echivalență a acestor figuri se exprimă prin următoarea egalitate între mărimile corespunzătoare:

$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\lambda\bar{p}' + \alpha\bar{\omega}', \quad \frac{1}{\lambda}\bar{u} + \beta\bar{\pi}), \qquad (86, II)$$

unde λ, α, β; sunt parametri scalari.

In adevăr $\bar{p}' + \bar{\omega}'$ interceptează pe $\bar{u}$ același segment $\overline{OI}$ ca și $\bar{p}'$, cum se poate vedea imediat (fig. 68), planele Q_1, Q_2 ale lui $\bar{p}' + \bar{\omega}'$ trecând prin O și I, conform cu construcția sumei a două biplane. Evident, putem înlocui $\bar{\omega}'$ prin $\alpha\bar{\omega}'$, fără a modifica segmentul interceptat OI (vectorul $\bar{\omega}'$ este reprezentat prin biplanul Ω_1, Ω_1).

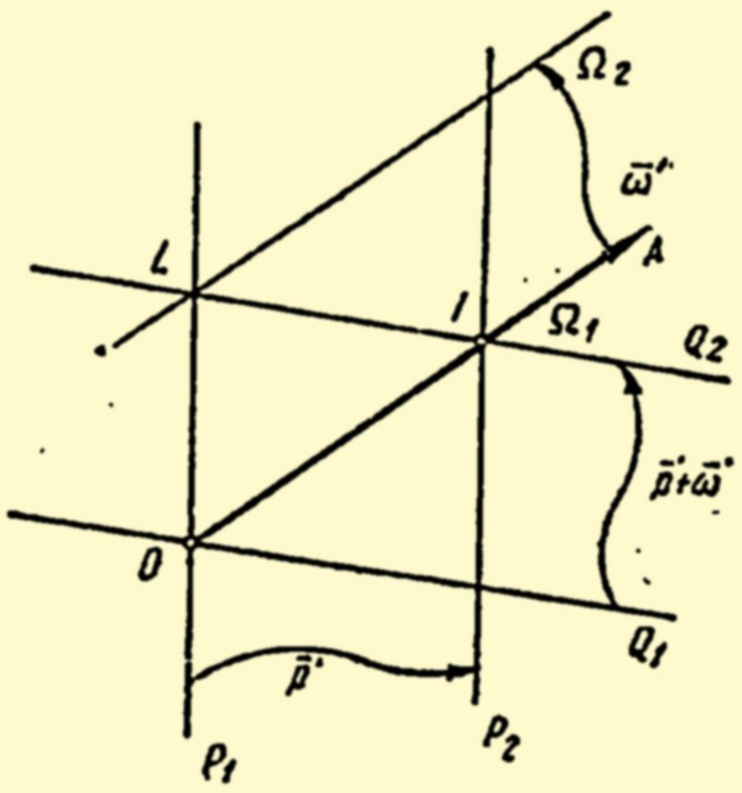


Fig. 68

Pe de altă parte, vectorul $\bar{u} + \beta\bar{\pi}$ se obține din $\bar{u}$ prin deplasarea punctului A paralel cu planele (P_1, P_2), ceeace nu modifică produsul scalar.

Astfel vom putea scrie:

$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\bar{p}' + \alpha\bar{\omega}', \bar{u});$$
$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\bar{p}', \bar{u} + \beta\bar{\pi}).$$

Cum însă

$$(\bar{p}'\bar{u}) = \left(\lambda\bar{p}', \frac{1}{\lambda}\bar{u}\right),$$

aplicând acestei relații primele două proprietăți, vom avea

$$(\bar{p}'\bar{u}) = \left(\lambda\bar{p}' + \alpha\bar{\omega}', \frac{1}{\lambda}\bar{u} + \beta\bar{\pi}\right),$$

adică relația (86, II).

Obiectul geometric $\overline{OA}$, (P_1, P_2) fiind împărțit în clase în raport cu această relație de echivalență, fiecărei clase corespunzându-i un produs scalar, vom putea enunța propoziția: *Produsul scalar este o mărime geometrică asociată unui obiect geometric.*

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea decurge din definiția produsului scalar ca raport al măsurilor segmentelor $\overline{OA}$ și $\overline{OI}$. Biplanul (Q_1, Q_2) interceptând același segment $\overline{OI}$, vom avea

$$(\bar{q}'\bar{u}) = (\bar{p}'\bar{u}) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}.$$

Ținând seama de aceste proprietăți și de cele menționate anterior, relația de echivalență în obiectul geometric considerat este următoarea: *toate figurile deduse din $\overline{OA}$ și $(P_1 P_2)$ prin translație, omoteție în raport cu punctul 0, deplasarea lui A într'un plan paralel cu (P_1, P_2), înlocuirea lui (P_1, P_2) printr'un biplan (Q_1, Q_2) ce intercepteză pe $\overline{OA}$ același segment (sau are aceeași măsură pe direcția $\overline{OA}$), precum și prin combinații ale acestor transformări, sunt echivalente, deci corespund aceluiași produs scalar.*

Dacă notăm prin $\bar{\pi}$ un vector contravariant paralel cu $\bar{p}'$ și prin $\bar{\omega}'$ un vector covariant paralel cu $\bar{u}$, relația de echivalență a acestor figuri se exprimă prin următoarea egalitate între mărimile corespunzătoare:

$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\lambda\bar{p}' + \alpha\bar{\omega}', \frac{1}{\lambda}\bar{u} + \beta\bar{\pi}), \qquad (86, II)$$

unde λ, α, β, sunt parametri scalari.

In adevăr $\bar{p}' + \bar{\omega}'$ interceptează pe $\bar{u}$ același segment $\overline{OI}$ ca și $\bar{p}'$, cum se poate vedea imediat (fig. 68), planele Q_1, Q_2 ale lui $\bar{p}' + \bar{\omega}'$ trecând prin O și I, conform cu construcția sumei a două biplane. Evident, putem înlocui $\bar{\omega}'$ prin $\alpha\bar{\omega}'$, fără a modifica segmentul interceptat OI (vectorul $\bar{\omega}'$ este reprezentat prin biplanul Ω_1, Ω_1).

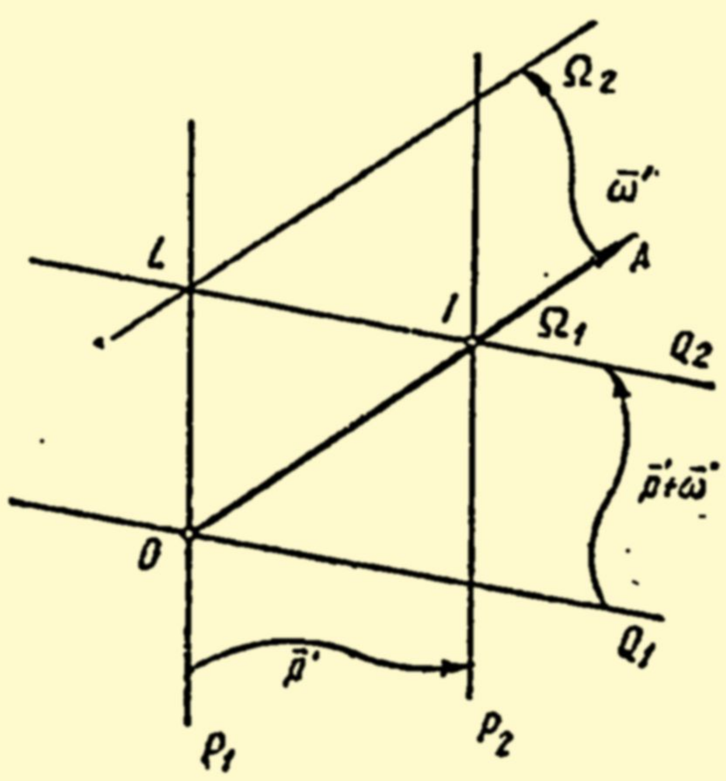


Fig. 68

Pe de altă parte, vectorul $\bar{u} + \beta\bar{\pi}$ se obține din $\bar{u}$ prin deplasarea punctului A paralel cu planele (P_1, P_2), ceeace nu modifică produsul scalar.

Astfel vom putea scrie:

$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\bar{p}' + \alpha\bar{\omega}', \bar{u});$$
$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\bar{p}', \bar{u} + \beta\bar{\pi}).$$

Cum însă

$$(\bar{p}'\bar{u}) = \left(\lambda\bar{p}', \frac{1}{\lambda}\bar{u}\right),$$

aplicând acestei relații primele două proprietăți, vom avea

$$(\bar{p}'\bar{u}) = \left(\lambda\bar{p}' + \alpha\bar{\omega}', \frac{1}{\lambda}\bar{u} + \beta\bar{\pi}\right),$$

adică relația (86, II).

Obiectul geometric $\overline{OA}$, (P_1, P_2) fiind împărțit în clase în raport cu această relație de echivalență, fiecărei clase corespunzându-i un produs scalar, vom putea enunța propoziția: *Produsul scalar este o mărime geometrică asociată unui obiect geometric.*

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ținem seamă de definiția speciei de mărimi ca mulțimea tuturor mărimilor obținute prin împărțirea în clase a unui obiect geometric cu ajutorul unei relații de echivalență, vom putea spune:

Mulțimea tuturor produselor scalare formează o specie de mărimi geometrice.

Această specie este în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor reale, fiecărui produs scalar corespunzându-i un număr real, și reciproc. Nu putem însă afirma fără demonstrație că produsul scalar este o mărime măsurabilă, deoarece nu am definit suma a două produse scalare. Deși produsul scalar este reprezentat printr'un număr, nu putem considera în mod obligator ca sumă a două produse scalare suma numerelor ce le reprezintă. Vom stabili următoarea teoremă: *Mulțimea produselor scalare este o specie de mărimi măsurabile cu o singură unitate.*

In adevăr, fie $(\bar{p}'\bar{u})$ un produs scalar dat și $(\bar{q}'\bar{v})$ un alt produs scalar oarecare. Planul determinat de $\bar{u}$ și $\bar{v}$, presupuși liniar independenți, intersectează biplanul (Q_1, Q_2) după două drepte paralele, astfel încât putem descompune vectorul $\bar{v}$ după direcția lui $\bar{u}$ și direcția $\bar{\pi}$ a acestor drepte, scriind

$$\bar{v}=\alpha\bar{u}+\beta\bar{\pi},$$

vectorul $\bar{\pi}$ fiind paralel cu biplanul $\bar{q}'$.

Deasemenea biplanele $\bar{p}'$ și $\bar{q}'$ se intersectează după patru drepte paralele. Prin $\bar{u}$ și una din aceste drepte ducem un plan R. Biplanul (Q_1, Q_2) poate fi descompus în două biplane paralele cu (P_1, P_2) și (R_1, R_2). Vom putea deci scrie

$$\bar{q}'=\lambda\bar{p}'+\mu\bar{\omega}',$$

vectorul $\bar{\omega}'$ fiind paralel cu (R_1, R_2) și deci cu vectorul $\bar{u}$.

In aceste condiții vom avea:

$$(\bar{q}'\bar{v})=(\bar{q}', \alpha\bar{u}+\beta\bar{\pi})=(\bar{q}', \alpha\bar{u})=\alpha(\bar{q}'\bar{u})=$$
$$=\alpha(\lambda\bar{p}'+\mu\bar{\omega}', \bar{u})=\alpha(\lambda\bar{p}', \bar{u})=\alpha\lambda(\bar{p}', \bar{u}), \qquad (87,II)$$

prin aplicarea relației de egalitate (86, II). Prin urmare, *orice produs scalar* $(\bar{q}'\bar{v})$ *este un multiplu al lui* $(\bar{p}'\bar{u})$, ceeace arată că putem măsura cu unitatea $(\bar{p}'\bar{u})$ orice alt element al speciei.

Această proprietate a mulțimii produselor scalare ne permite să definim *suma a două produse scalare oarecare.* In adevăr, relația de omogenitate (84,II) definește suma produselor de forma $\lambda(\bar{p}'\bar{u})$, iar pe de altă parte, orice produs scalar este reductibil la această formă. Vom avea deci

$$(\bar{q}'\bar{v})=\alpha(\bar{p}'\bar{u}); \quad (\bar{r}'\bar{\omega})=\beta(\bar{p}'\bar{u}),$$

unde α, β sunt parametri scalari, ținând seama de (87, II). Insă

$$\alpha(\bar{p}'\bar{u})+\beta(\bar{p}'\bar{u})=(\alpha+\beta)(\bar{p}'\bar{u}).$$

Inlocuind în această relație termenii din primul membru prin mărimi egale cu ei, relația trebue să aibă loc. Vom avea deci

$$(\bar{q}'\bar{v})+(\bar{r}'\bar{\omega})=(\alpha+\beta)(\bar{p}'\bar{u}), \qquad (88,II)$$

Scanned with OKEN Scanner

relație care definește suma a două produse scalare oarecare. Ținând seamă și de faptul că amplificarea cu un număr conduce tot la un produs scalar, putem stabili proprietatea:

Suma a două produse scalare este un produs scalar, deci mulțimea produselor scalare este o specie măsurabilă cu o singură unitate.

Adunarea produselor scalare se reduce astfel la adunarea numerelor reprezentative, adică a valorilor lor.

Produsul scalar a doi vectori este distributiv. Această proprietate rezultă din relațiile de omogenitate și echivalență a produselor scalare. Fie produsele scalare $(\overline{p}'\overline{u})$, $(\overline{p}'\overline{v})$, și $(\overline{p}', \overline{u}+\overline{v})$. Vectorul $\overline{v}$ poate fi descompus într'un singur mod, după direcția lui $\overline{u}$ și a unei paralele la $\overline{p}'$, deci este de forma

$$\overline{v}=\alpha\overline{u}+\overline{\pi},$$

vectorul $\overline{\pi}$ putând fi eventual nul. Vom avea

$$(\overline{p}', \overline{u}+\overline{v})=(\overline{p}', \overline{u}+\alpha\overline{u}+\overline{\pi})=[\overline{p}', (\alpha+1)\overline{u}]=(\alpha+1)(\overline{p}'\overline{u})=\alpha(\overline{p}'\overline{u})+(\overline{p}'\overline{u}).$$

In același timp

$$(\overline{p}'\overline{v})=(\overline{p}', \alpha\overline{u}+\overline{\pi})=(\overline{p}', \alpha\overline{u})=\alpha(\overline{p}'\overline{u}).$$

Introducând în egalitatea precedentă valoarea lui $\alpha(\overline{p}'\overline{u})$, obținem

$$(\overline{p}', \overline{u}+\overline{v})=(\overline{p}'\overline{u})+(\overline{p}'\overline{v}). \qquad (89,II)$$

O demonstrație analoagă (Exercițiu) arată că avem și

$$(\overline{p}'+\overline{q}', \overline{u})=(p'\overline{u})+(\overline{q}'\overline{u}). \qquad (90,II)$$

Egalitățile (89,II) și (90,II) stabilesc complecta distributivitate a produsului scalar de vectori.

In sfârșit, putem stabili și următoarea proprietate:

Produsul scalar a doi vectori este nul când cei doi factori sunt paraleli.

In adevăr fiind dat produsul $(\overline{p}'\overline{u})$, dacă notăm prin $\overline{\pi}$ un vector contravariant paralel cu $\overline{p}'$ și prin $\overline{\omega}'$ un vector covariant paralel cu $\overline{u}$, avem în baza echivalenței și distributivității

$$(\overline{p}'\overline{u})=(\overline{p}', \overline{u}+\overline{\pi})=(\overline{p}'\overline{u})+(\overline{p}'\overline{\pi})$$
$$(\overline{p}'\overline{u})=(\overline{p}'+\overline{\omega}', \overline{u})=(\overline{p}'\overline{u})+(\overline{\omega}'\overline{u}),$$

de unde

$$(\overline{p}'\overline{\pi})=0 \quad \text{și} \quad (\omega'\overline{u})=0.$$

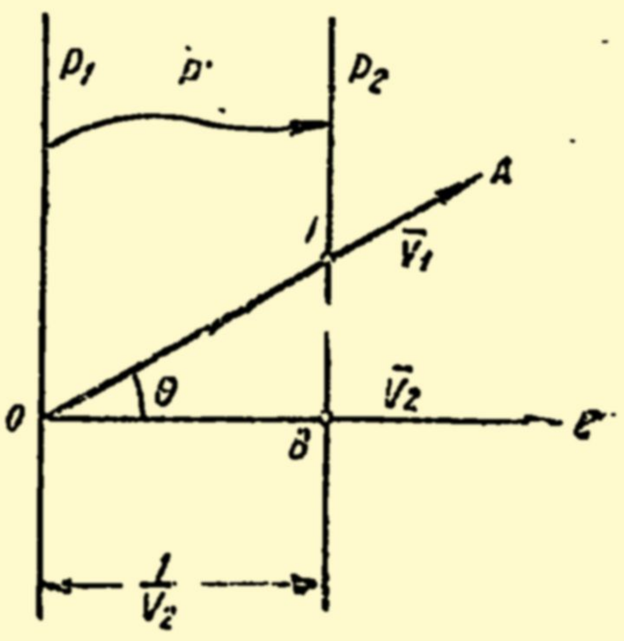


Fig. 69

Am regăsit astfel toate proprietățile produsului scalar, definit ca o operație metrică, înafară de ultima, care are o înfățișare complect deosebită, deoarece produsul scalar metric este nul când factorii sunt perpendiculari. Vom putea însă, stabili relațiile ce există între cele două produse scalare explicând și această aparentă deosebire.

In adevăr, presupunând spațiul euclidian, fie doi vectori contravarianți $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$. Să considerăm pe $\overline{V}_2$ ca vectorul reprezentativ al unui vector covariant: $\overline{p}'=(P_1, P_2)$ (fig. 69).

Scanned with OKEN Scanner

Distanța dintre P_1 și P_2 va fi $OB = \frac{1}{V_2}$, iar unghiul dintre $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ va fi notat prin θ.

Produsul scalar $(\overline{p}'\overline{V}_1)$ va avea expresia:

$$(\overline{p}'\overline{V}_1) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}},$$

segmentele $\overline{OA}$ și $\overline{OI}$ fiind orientate pe direcția $\overline{OA}$. Vom avea însă, dacă notăm cu $\overline{v}$ versorului lui $\overline{OA}$

$$\overline{OI} = \frac{OB}{\cos\theta}\,\overline{v} = \frac{1}{V_2\cos\theta}\,\overline{v}$$

de unde

$$(\overline{p}'\overline{V}_1) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} = V_1\,(V_2\cos\theta) = V_1\,V_2\cos\theta = (\overline{V}_1\overline{V}_2),$$

conform cu definiția produsului scalar din geometria metrică.

Prin urmare: *Produsul scalar a doi vectori contravarianți în spațiul euclidian este produsul scalar al unui vector contravariant cu vectorul reprezentativ al unui vector covariant.*

Trebue însă, să observăm că *în geometria metrică produsul scalar nu este un număr, ci are dimensiunile unei lungimi la pătrat.* Aceasta provine din faptul că $\overline{p}'$ este măsurat printr'o lungime V_2, în loc de a fi măsurat prin inversa unei lungimi (§ 47).

*§ 61. Produsul scalar ca operație cu mărimi geometrice

Din analiza demonstrațiilor folosite pentru stabilirea proprietăților produsului scalar a doi vectori rezultă că definiția și demonstrațiile omogenității și echivalenței au un caracter geometric, pe când demonstrațiile următoare sunt pronunțat algebrice.

Demonstrațiile geometrice nu sunt complect riguroase decât atunci când se consideră toate cazurile care se prezintă. Pe de altă parte, ele se complică pe măsură ce intervin mai multe figuri. *Calculul vectorial, ca și orice alt calcul geometric, are ca scop înlocuirea obiectelor geometrice prin mărimile asociate și, deci, a raționamentului geometric pur printr'un raționament algebrico-geometric.*

In cele ce urmează, vom prezenta produsul scalar ca o mărime geometrică obținută sub forma unui *produs de mărimi geometrice* în sensul definiției date acestei noțiuni, scoțând în evidență caracterele algebrice ale acestei operații. In acest scop vom folosi rezultatele precedente, dar vom pleca dela o definiție mai generală.

Mulțimea tuturor segmentelor orientate și mulțimea tuturor biplanelor orientate constitue două obiecte geometrice, cărora li se asociază ca mărimi geometrice mulțimea vectorilor contravarianți $\overline{u}$ și mulțimea vectorilor covarianți $\overline{p}'$. Cu aceste două obiecte geometrice formăm un alt obiect geometric având ca reprezentant figura formată dintr'un segment $\overline{OA}$ și un biplan (P_1, P_2). Acestui obiect geometric îi vom asocia o nouă mărime geometrică, pe care o vom nota $(\overline{p}', u)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a împărţi obiectul format în clase *vom impune o relaţie de echivalenţă figurilor sale, folosind o operaţie geometrică ce transformă obiectul în el însuşi.* O astfel de operaţie este adunarea vectorială, prin care fiecărei perechi de vectori îi corespunde un alt vector. Regula de transformare trebue să nu depindă *decât de figurile obiectului geometric* considerat, pentru a nu introduce elemente străine de acesta.

Notând prin $\overline{\pi}$ un vector contravariant paralel cu $\overline{p}'$ şi prin $\overline{\omega}'$ un vector covariant paralel cu $\overline{u}$, aceşti vectori nu depind decât de figura $\overline{OA}$, (P_1, P_2). Vom impune relaţia de echivalenţă definită prin:

$$(\overline{p}' + \overline{\omega}', \overline{u}) = (\overline{p}', \overline{u}); \quad (\overline{p}', \overline{u} + \overline{\pi}) = (\overline{p}', \overline{u}) \tag{91,II}$$

şi a cărei semnificaţie geometrică a fost dată anterior. Cum această relaţie este mai largă decât echivalenţa prin translaţie, vom obţine o nouă mărime, diferită de reunirea lui $\overline{p}'$ şi $\overline{u}$.

Pentru această mărime vom defini *parţial* adunarea prin relaţiile:

$$(\overline{p}', \overline{u}) + (\overline{p}', \overline{u}) = (2\overline{p}', \overline{u}) = 2(\overline{p}', \overline{u}),$$
$$(\overline{p}', \overline{u}) + (\overline{p}', \overline{u}) = (\overline{p}', 2\overline{u}) = 2(\overline{p}', \overline{u}),$$

pe care, extinzându-le prin procedeul cunoscut, suntem conduşi la următoarea *proprietate de omogenitate:*

$$(\lambda\overline{p}', \overline{u}) = \lambda(\overline{p}', \overline{u}); \quad (\overline{p}', \mu\overline{u}) = \mu(\overline{p}', \overline{u}), \tag{92,II}$$

care arată că prin amplificare cu un număr se obţine tot un produs scalar.

Din (92,II) deducem o nouă relaţie de echivalenţă:

$$(\lambda\overline{p}', \frac{1}{\lambda}\overline{u}) = (\overline{p}', \overline{u})$$

care, combinată cu (91,II) ne conduce la (86,II).

Relaţiile (91,II) şi (92,II) ne vor permite apoi să stabilim că *mărimile obţinute formează o specie de mărimi măsurabile cu o unitate.*

In adevăr orice vector $\overline{v}$ se descompune în mod unic într'un vector paralel cu $\overline{u}$ şi un vector paralel cu $\overline{p}'$, deasemenea orice vector covariant $\overline{q}'$ se descompune în mod unic într'un vector covariant paralel cu $\overline{p}'$ şi un vector covariant paralel cu $\overline{u}$, ceeace ne conduce la relaţia (87,II)

$$(\overline{q}'\overline{v}) = \alpha\lambda(\overline{p}', \overline{u}).$$

Este demn de subliniat că o consecinţă a faptului că specia de mărimi $(\overline{p}', \overline{u})$ admite o singură unitate este că *din relaţia de omogenitate rezultă adunarea a două mărimi oarecare* prin relaţia (88,II)

$$(\overline{q}', \overline{v}) + (\overline{r}', \overline{w}) = (\alpha + \beta)(\overline{p}', \overline{u}).$$

Se arată astfel *că suma este o mărime din aceeaşi specie, deci mulţimea acestor mărimi formează o specie măsurabilă.*

O consecinţă importantă a relaţiilor de echivalenţă şi omogenitate este aceea că mărimile $(\overline{p}', \overline{u})$ au proprietăţile (89,II) şi (90,II):

$$(\overline{p}', \overline{u} + \overline{v}) = (\overline{p}', \overline{u}) + (\overline{p}', \overline{v})$$
$$(\overline{p}' + \overline{q}', \overline{u}) = (\overline{p}', \overline{u}) + (\overline{q}', \overline{u}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Când o mărime, ce depinde de alte două mărimi, are aceste proprietăţi şi proprietatea (92,II), zicem că este *o funcţie biliniară* de mărimile de care depinde, respectiv de $\bar{p}'$ şi $\bar{u}$.

Considerând mărimea $(\bar{p}', \bar{u})$ ca obţinută din $\bar{p}'$ şi $\bar{u}$ printr'o operaţie algebrică ce corespunde operaţiilor geometrice prin care obiectul este împărţit în clase, *această operaţie este omogenă şi distributivă, deci este un produs de mărimi geometrice, pe care îl numim produs scalar al vectorilor* $\bar{p}'$ *şi* $\bar{u}$.

Pentru uşurinţa scrierii, produsul scalar va fi notat prin $(\bar{p}'\bar{u})$, $(\bar{p}' \cdot \bar{u})$ sau suprimând parantezele: $\bar{p}' \cdot \bar{u}$, $\bar{p}'\bar{u}$.

Din relaţia de echivalenţă şi din proprietatea de distributivitate rezultă că: *Produsul scalar este nul când cei doi factori sunt paraleli,* în particular când unul dintre factori este nul.

O consecinţă importantă pentru semnificaţia geometrică a produsului scalar este următoarea: *Produsul scalar are aceeaşi valoare pentru toţi vectorii* $\bar{r} = \overline{OI}$, *care unesc două puncte ale biplanului* $\bar{p}' = (P_1, P_2)$.

Fie, în adevăr, O un punct al lui P_1, iar I şi J două puncte ale lui P_2 (fig. 67). Vom pune

$$\bar{r} = \overline{OI}, \quad \bar{\rho} = \overline{OJ} = \bar{r} + \overline{IJ}.$$

Cum însă $\overline{IJ} = \bar{\pi}$ este paralel cu $\bar{p}'$, vom avea

$$(\bar{p}'\bar{\rho}) = (\bar{p}', \bar{r} + \overline{IJ}) = (\bar{p}'\bar{r});$$

deci produsul scalar rămâne invariant pentru toţi vectorii $\bar{r}$ care au extremităţile pe biplanul reprezentativ al vectorului covariant $\bar{p}'$.

Semnificaţia geometrică a produsului scalar rezultă din propoziţia următoare: *Produsul scalar al unui vector contravariant* $\bar{u}$ *cu un vector covariant* $\bar{p}'$ *este proporţional cu măsura lui* $\bar{u}$ *prin segmentul orientat interceptat de acest vector pe cele două plane ale lui* $\bar{p}'$.

In adevăr, din fig. 67 rezultă

$$\bar{u} = \lambda \bar{r}; \quad \lambda = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}},$$

unde λ este măsura lui $\bar{u}$ prin $\bar{r}$. Produsul scalar $(\bar{p}'\bar{u})$ se pune sub forma:

$$(\bar{p}'\bar{u}) = (\bar{p}' \cdot \lambda \bar{r}) = \lambda (\bar{p}'\bar{r}), \qquad (93,II)$$

pentru orice vector $\bar{u}$, neparalel cu $\bar{p}'$, cu $\lambda \neq 0$. Când $\bar{u}$ este paralel cu $\bar{p}'$, relaţia (93,II) rămâne valabilă cu $\lambda = 0$, deci cu membrul al doilea nul.

Produsul scalar al unui vector covariant $\bar{p}'$ *cu un vector contravariant* $\bar{r}$, *cu extremităţile pe* $\bar{p}'$, *este acelaşi pentru toate perechile de vectori* $\bar{p}', \bar{r}$ *neparaleli şi nul pentru perechile de vectori paraleli, dacă* $\bar{r}$ *este orientat la fel pentru toţi vectorii* $\bar{p}'$.

Fie, în adevăr $\bar{p}', \bar{r}$ şi $\bar{q}', \bar{\rho}$ două perechi de vectori neparaleli între ei. Prin aplicarea relaţiei de echivalenţă putem face ca $\bar{p}'$ şi $\bar{q}'$, pe de o parte, $\bar{r}$ şi $\bar{\rho}$, pe de altă parte, să fie paraleli fără a schimba valorile produselor scalare $(\bar{p}'\bar{r})$ şi $(\bar{q}'\bar{\rho})$. (Exerciţiu).

Vom presupune că $\bar{r}$ şi $\bar{\rho}$ au originile pe planele iniţiale şi extremităţile pe planele finale ale biplanelor $\bar{p}'$ şi $\bar{q}'$[1]), ceeace nu micşorează generalitatea

[1]) Vom folosi adesea obiectul geometric în locul mărimii şi invers, pentru simplificarea expunerii.

Scanned with OKEN Scanner

rezultatului, modificându-i eventual semnul. Vectorul $\bar{q}'$ fiind paralel cu $\bar{p}'$, vom avea

$$\bar{q}' = \alpha \bar{p}'.$$

Cum măsurile vectorilor covarianți pe o direcție sunt invers proporționale cu segmentele interceptate de planele lor, între vectorii paraleli $\bar{r}$ și $\bar{\rho}$ vom avea relația

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\alpha} \bar{r}$$

deoarece $\bar{r}$ și $\bar{\rho}$ au aceeași orientare relativă față de $\bar{p}'$ și $\bar{q}'$. Prin urmare:

$$(\bar{q}'\bar{\rho}) = \left(\alpha \bar{p}' \cdot \frac{1}{\alpha} \bar{r}\right) = \frac{\alpha}{\alpha} (\bar{p}'\bar{r}) = (\bar{p}'\bar{r}).$$

In cazul când perechile $\bar{p}', \bar{r}$ și $\bar{q}', \bar{r}$ sunt formate din vectori paraleli, produsele scalare sunt nule și deci, deasemenea, egale.

Din propoziția stabilită rezultă că *putem cunoaște valoarea tuturor produselor scalare, dacă este determinată valoarea unui singur produs scalar de forma* $(\bar{p}'\bar{r})$.

Deoarece mulțimea produselor scalare este o specie măsurabilă cu o singură unitate și deoarece măsura tuturor produselor scalare a fost redusă la aceea a unuia singur dintre ele, vom da valoarea unu produsului scalar $(\bar{p}'\bar{r})$, definit de o anumită pereche de vectori $\bar{p}', \bar{r}$ și vom spune că am *normalizat produsul* scalar. *Folosind produsul scalar normalizat, mulțimea produselor are două valori fundamentale: zero* pentru vectorii paraleli și *unu* pentru vectorii neparaleli:

$$\bar{p}'\bar{\pi} = 0; \quad \bar{p}'\bar{r} = 1. \tag{94, II}$$

Fiind dată o origine fixă O, prin care trec toate planele inițiale ale biplanelor, putem considera numai planele lor finale. In acest caz, $\bar{r}$ este vectorul de poziție al unui punct și relația $\bar{p}'\bar{r} = 1$ reprezintă *ecuația normală* a unui plan definit prin vectorul covariant $\bar{p}'$. Acest plan nu trece prin origine. Relația $\bar{p}'\bar{\pi} = 0$ va reprezenta condiția ca vectorul $\bar{\pi}$ să fie paralel cu planul $\bar{p}'$.

Considerații analoage celor de mai sus ne conduc la produsul scalar $\bar{u}\bar{p}'$. Impunând condițiile:

$$\bar{r}\bar{p}' = 1 \quad \text{și} \quad \bar{\pi}\bar{p}' = 0$$

vom avea

$$\bar{r}\bar{p}' = \bar{p}'\bar{r},$$

de unde

$$\bar{p}'\bar{u} = \bar{u}\bar{p}' \tag{95, II}$$

pentru orice pereche de vectori $\bar{u}, \bar{p}'$. Relația (95, II) exprimă faptul că: *Produsul scalar este comutativ.*

Prin normalizarea introdusă, produsul scalar are următoarea semnificație geometrică: *Produsul scalar al vectorului contravariant* $\bar{u}$ *cu vectorul covariant* $\bar{p}'$ *este egal cu măsura* lui $\bar{u}$ *prin segmentul orientat interceptat de acest vector pe cele două plane ale lui* $\bar{p}'$.

Regăsim astfel definiția dată inițial produsului scalar a doi vectori, ca o consecință a proprietăților algebrice impuse operației definite între $\bar{u}$ și $\bar{p}'$.

Scanned with OKEN Scanner

In aplicații apar mărimi fizice, care au proprietățile vectorilor contravarianți și covarianți, și între care există relații, care conduc la o operație, ce are toate proprietățile algebrice ale produsului scalar, fără ca acesta să fie raportul a două segmente. Considerațiile făcute mai sus ne permit să dăm o interpretare geometrică acestui produs scalar, după cum am dat și lucrului mecanic al unei forțe. Deasemenea, vom putea extinde noțiunea de produs scalar și la alte mărimi, când vom recunoaște în operația, care are loc între ele, caracterele algebrice ale produsului scalar.

Prin aceasta, *operația de produs scalar devine una din operațiile de bază ale Calculului vectorial, fiind aplicabilă și unor mărimi mai complexe decât mărimile vectoriale.*

Vom numi *produs scalar* orice operație asupra a două mărimi geometrice măsurabile cu trei unități, care este:

1) *omogenă,*
2) *distributivă,*
3) *comutativă,*

și al cărui rezultat este o mărime geometrică aparținând unei specii măsurabile cu o singură unitate.

Cu alte cuvinte, *produsul scalar este un produs de mărimi geometrice măsurabile cu trei unități, comutativ și măsurabil cu o singură unitate.*

Ținând seama de definiția dată mărimilor scalare, din faptul că o mărime face parte dintr'o specie măsurabilă cu o singură unitate, nu putem deduce că este o mărime scalară, deoarece caracterul scalar presupune invarianța mărimii față de sistemul de referință al spațiului. Vom vedea că *nu orice produs scalar este o mărime scalară.* Astfel, produsul mixt conduce la o mărime pseudo-scalară, ca și produsul scalar de produse vectoriale, introdus anterior. Totuși, din cauza analogiilor formale dintre produsul scalar de vectori și produsul scalar *vom folosi denumirea de produs scalar chiar și pentru cazul produselor pseudo-scalare.*

*§ 62. Produsul mărimilor prin scalari sau pseudo-scalari

Cele mai simple exemple de produse de mărimi geometrice se prezintă în geometria euclidiană. Astfel, în teorema lui Pitagora intervine noțiunea de pătrat al catetelor și al ipotenuzei unui triunghi dreptunghi.

Deasemenea, în mecanică, energia cinetică a unui punct material de masă m având o viteză $\bar{v}$ este $\frac{1}{2} mv^2$, deci un produs de mărimi; tot un produs de mărimi este și cantitatea de mișcare $m\bar{v}$.

In toate aceste exemple, unul din factori, cel puțin, este o mărime scalară. Dacă ne fixăm atenția asupra celuilalt, vom spune că mărimea respectivă a fost amplificată printr'un scalar.

Să considerăm întâi cazul mărimilor geometrice, care sunt mărimi asociate unor obiecte geometrice. De exemplu, în teorema lui Pitagora lungimile sunt mărimi asociate unor segmente, iar pătratele acestora pot fi considerate ca ariile pătratelor construite pe ele. Relația

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Scanned with OKEN Scanner

poate fi interpretată sub forma următoare: pătratul construit pe ipotenuză este echivalent cu suma pătratelor construite pe cele două catete. Operaţia a^2 corespunde unei operaţii geometrice asupra a două segmente perpendiculare de lungime a, prin care se obţine un obiect geometric, în speţă un pătrat. Mărimea a^2 asociată acestui pătrat este aria sa, deci o mărime măsurabilă.

In mod analog putem defini operaţia mai generală ab, adică produsul a două segmente perpendiculare, prin care se obţine aria unui dreptunghi. Această operaţie este distributivă şi omogenă, deci este un produs de mărimi geometrice, după definiţia adoptată anterior.

Mărimile fizice scalare nu sunt totdeauna reprezentabile printr'o mărime geometrică, sau necesită o reprezentare mai complicată într'un spaţiu reprezentativ. Astfel, diferenţiala energiei cinetice poate fi reprezentată geometric cu ajutorul unui element de arc ds^2, dar în cazul unui sistem format din mai multe puncte materiale, reprezentarea geometrică necesită introducerea unui spaţiu cu mai multe dimensiuni.

Deaceea, în operaţia de amplificare a mărimilor geometrice sau fizice prin scalari nu se urmăreşte reprezentarea geometrică a factorului scalar, considerându-se analog cu un factor numeric. *In mod practic, se consideră amplificarea prin scalari (sau pseudo-scalari) ca o amplificare prin numere.* Un exemplu în acest sens este calculul grafic al ariilor şi momentelor statice, în care ariile sunt reduse la segmente.

Astfel, formulele lui Cebâşev pentru calculul aproximativ al ariilor sunt de forma

$$S=2c\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},$$

în care $2c$ este diametrul maxim al domeniului închis de curba care mărgineşte aria S, iar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt anumite ordonate, măsurate perpendicular pe diametrul $2c$. Dacă se alege c ca unitate, calculul revine la însumarea ordonatelor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deci este redus la calculul unui segment. Dealtfel şi celelalte reguli de calcul al ariilor, precum şi folosirea planimetrelor sunt bazate pe reprezentarea geometrică a produselor de lungimi prin segmente.

Considerarea operaţiei de amplificare a mărimilor fizice sau geometrice prin mărimi scalare sau pseudo-scalare sub aspectul său algebric, aşa cum rezultă din practică, ne va permite să justificăm asimilarea acestei operaţii cu amplificarea numerică.

Fie l o mărime dintr'o specie L măsurabilă cu o unitate (scalară sau pseudo-scalară), iar U o mărime dintr'o specie măsurabilă cu p unităţi. Fie deasemenea $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{U}$ obiectele corespunzătoare acestor mărimi.

Vom face să corespundă unui element $\mathcal{L}_0$ din $\mathcal{L}$ şi unui element $\mathcal{U}_0$ din $\mathcal{U}$ un nou element $(\mathcal{L}_0, \mathcal{U}_0)$. Notând prin $\mathcal{W}$ mulţimea acestor elemente o vom împărţi în clase, *strângând în aceeaşi clasă toate elementele* $(\mathcal{L}_0, \mathcal{U}_0)$, *care corespund unui l şi unui U date.*

Prin împărţirea în clase a mulţimii $\mathcal{W}$ *suntem conduşi la o nouă mărime,* pe care o vom nota

$$W=lU.$$

Presupunând l dat, între specia W şi specia U există o corespondenţă biunivocă: oricărui U dat îi corespunde un W şi numai unul, fiindcă toate

Scanned with OKEN Scanner

elementele corespunzătoare unui l şi unui U, şi numai acelea au constituit o clasă, deci au determinat mărimea lU.

Deasemenea, unui $W=lU$ îi corespunde un singur U, fiindcă într'o clasă a lui $\mathcal{W}$ intră numai elemente ce provin dintr'o clasă a lui $\mathcal{L}$ şi o clasă a lui $\mathcal{U}$.

Prin urmare:

$$\text{Dacă } U+V\neq U, \text{ atunci } l(U+V)\neq lU.$$

Vom arăta cum putem introduce în mod natural operaţia de adunare a mărimilor lU, astfel încât specia $W=lU$ să fie măsurabilă.

Pentru ca mărimea $W=lU$ să fie măsurabilă, *l fiind dat,* va trebui să definim adunarea în specia lU. *Folosind corespondenţa biunivocă stabilită, între speciile U şi W, vom impune ca regulă de adunare:*

$$lU+lV=l(U+V). \tag{96,II}$$

Din relaţia (96,II) rezultă deasemenea

$$l(\lambda U)=\lambda(lU) \tag{97,II}$$

unde λ este un număr real oarecare (Exerciţiu).

Astfel: *sumei a două mărimi U şi V îi corespunde suma mărimilor lU şi lV, iar specia $W=lU$ este măsurabilă.*

Când între două specii măsurabile de mărimi există o corespondenţă biunivocă, astfel încât sumei a două elemente dintr'una îi corespunde suma elementelor respective din a doua, spunem că cele două specii sunt *isomorfe.*

Speciile U şi lU sunt isomorfe.

Din relaţia (96, II) deducem, luând $V=0$:

$$lU+l0=l(U+0)=lU,$$

de unde

$$l0=0.$$

Prin urmare: *mărimii nule $U=0$ îi corespunde în specia W deasemenea mărimea nulă $0=l0$.*

Invers, dacă $lU=0$, vom avea obligator $U=0$, deoarece mărimii nule 0 din specia W nu îi corespunde în specia U decât o singură mărime şi aceasta este, cum am văzut, $U=0$. Vom putea condensa aceste rezultate în propoziţia:

Singura mărime nulă în specia W este $l0$, unde 0 este mărimea nulă din specia mărimilor U.

Dealtfel, aceste proprietăţi sunt generale pentru toate speciile isomorfe cu o specie măsurabilă.

Să presupunem că U este o mărime *dată* din specia sa şi că l este o mărime oarecare din specia L. Se formează o specie de mărimi Ω în corespondenţa biunivocă cu specia L prin procedeul utilizat mai sus (Exerciţiu).

Impunând condiţia de omogenitate,

$$(\lambda l)\,U=\lambda(lU), \tag{98, II}$$

care extinde relaţia $(2l)\,U=lU+lU$ şi defineşte parţial adunarea pentru elementele lU, *suntem conduşi la regula de adunare a mărimilor lU, mU, etc. în specia Ω.*

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, specia L fiind măsurabilă cu o singură unitate, vom putea scrie

$$l=\lambda a, \quad m=\mu a, \tag{99, II}$$

unde a este o mărime aleasă ca unitate în această specie. Vom avea deci

$$(l+m)\,U=(\lambda a+\mu a)\,U=[(\lambda+\mu)\,a]\,U=(\lambda+\mu)aU \tag{100, II}$$

aplicând regula de adunare în specia L şi proprietatea (98, II). Pe de altă parte, însă, aceeaşi proprietate (98, II) ne permite să scriem

$$(\lambda+\mu)\,(aU)=\lambda\,(aU)+\mu\,(aU)=(\lambda a)\,U+(\mu a)\,U,$$

deoarece λa şi μa sunt multipli ai lui a. Dacă ţinem seama de valorile lui λa şi μa date de (99, II), vom avea

$$(\lambda a)\,U+(\mu a)\,U=lU+mU=(\lambda+\mu)\,aU,$$

deci suma $lU+mU$ este *definită* prin aceste egalităţi. Ţinând seama de (100, II), vom putea deduce relaţia

$$(l+m)\,U=lU+mU \tag{101, II}$$

care constitue *regula de adunare a mărimilor* lU.

Mărimile lU, mU, *etc. pentru* U *dat constitue o specie* Ω *măsurabilă cu o singură unitate isomorfă cu specia mărimilor* L, având ca mărime nulă unică mărimea $0U$, unde 0 este mărimea nulă din L. Astfel, în cazul cantităţilor de mişcare $m\bar{v}$, dacă vectorul $\bar{v}$ este dat, mulţimea tuturor mărimilor $m\bar{v}$, $m'\bar{v}$, etc. este o specie isomorfă cu aceea a maselor m, m', m'', ... Această specie este reprezentabilă geometric prin mulţimea vectorilor coliniari cu $\bar{v}$. Să examinăm acum operaţia prin care se obţin mărimile $W=lU$.

Vom defini mărimea Ul *prin relaţia*

$$lU=Ul \tag{102, II}$$

deci mărimile lU şi Ul vor fi considerate egale.

Operaţia, prin care se obţin mărimile lU, are toate proprietăţile unui produs de mărimi, adică determină o mărime măsurabilă, este distributivă faţă de ambii factori l şi U şi omogenă. *Ea este un produs*, pe care îl vom numi: *produs al unei mărimi printr'o mărime scalară sau pseudo-scalară*. Acest produs este comutativ, după cum arată condiţia impusă (102, II).

Vom putea rezuma proprietăţile sale prin relaţiile:

$$\begin{aligned}
&(l+m)\,U=lU+mU && \textit{(distributivitate)};\\
&l(U+V)=lU+lV &&\\
&(\lambda l)\,(\mu U)=\lambda\mu\,(lU) && \textit{(omogenitate)}; \qquad (103, II)\\
&lU=Ul && \textit{(comutativitate)};\\
&l0=0, \quad 0U=0. && \textit{(elementul nul)}.
\end{aligned}$$

Dacă $lU=0$, atunci $l=0$ sau $U=0$

Este de observat faptul că un *produs de mărimi printr'un scalar nu poate fi nul decât dacă unul din factori este nul.*

Scanned with OKEN Scanner

Specia $W=lU$, formată de *toate* produsele lU, este măsurabilă cu p unităţi ca şi specia U, cu alte cuvinte în această specie există p elemente liniar independente şi numai p ca şi în specia U. Vom putea demonstra chiar proprietatea următoare: *Specia W, formată de mulţimea produselor lU, este isomorfă cu specia U.*

In adevăr, specia L a mărimilor l fiind măsurabilă cu o singură unitate, orice mărime $m \epsilon L$ poate fi pusă sub forma $m=\mu l$, unde l este o unitate aleasă pentru toată specia.

Prin urmare, orice mărime $mV \epsilon W$ poate fi pusă sub forma

$$mV=\mu l V=l(\mu V).$$

Dacă notăm $\mu V=U$, orice mărime mV este de forma

$$mV=lU,$$

unde l este determinat. Astfel, specia W este formată din mărimi de forma lU, unde l *este fix*, iar U o mărime oarecare din specia U. După cum am arătat mai sus, speciile U şi lU sunt isomorfe, când l este dat, deci propoziţia este stabilită.

Este uşor de arătat că *două specii măsurabile isomorfe au acelaşi număr de unităţi* (Exerciţiu). In cazul speciilor, U şi lU, aceasta rezultă imediat din forma produselor. In adevăr dacă $U_1, U_2, \ldots, U_p$ sunt liniar independente, atunci şi $lU_1, lU_2, \ldots, lU_p$ vor fi liniar independente, deoarece

$$\alpha_1 lU_1+\alpha_2 lU_2+\cdots+\alpha_p lU_p=l(\alpha_1 U_1+\cdots+\alpha_p U_p)\neq 0,$$

dacă

$$l\neq 0 \quad \text{şi} \quad \alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2+\cdots+\alpha_p U_p\neq 0.$$

Invers, dacă $U_1, U_2, \ldots, U_q$ sunt liniar dependente, atunci şi $lU_1, lU_2, \ldots lU$ sunt liniar dependente. In specia lU nu pot exista, deci, decât cel mult p elemente liniar independente, ca şi în specia U şi există p elemente liniar independente $lU_1, \ldots, lU_p$.

Dealtfel, orice element mV va putea fi reprezentat sub forma

$$mV=(\mu l)U=l(\mu U)=\mu l(\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2+\cdots+\alpha_p U_p)=\beta_1(lU_1)+\cdots+\beta_p(lU_p)$$

cu ajutorul celor p unităţi $lU_1, lU_2, \ldots, lU_p$.

Din isomorfismul speciilor U şi lU rezultă că *specia $W=lU$ are din punct de vedere algebric, aceleaşi proprietăţi ca şi specia U.* Prin urmare, fiind dată o altă specie M de mărimi m măsurabile cu o unitate, mulţimea produselor mW va fi isomorfă cu W, deci cu U şi vom putea scrie

$$mW=m(lU).$$

Pe de altă parte, produsul ml fiind o mărime măsurabilă cu o singură unitate, să considerăm specia formată de mulţimea elementelor (ml) şi să formăm produsele $(ml)U$. Specia S, astfel formată, este isomorfă cu U, ca şi specia $\sum$ formată cu produsele $m(lU)$. Cum două specii isomorfe cu o a treia sunt isomorfe între ele (Exerciţiu), *speciile S şi $\sum$ vor fi isomorfe.*

Corespondenţa

$$m(lU) \longleftrightarrow (ml)U$$

arată clar acest isomorfism.

Scanned with OKEN Scanner

Să comparăm cele două specii S şi $\sum$ astfel formate, din punctul de vedere al măsurii elementelor corespunzătoare: $m(lU)$ şi $(ml)U$. Presupunând unităţile alese în speciile respective L, M, U, *măsurile acestor două elemente în* $\sum$ *şi* S *vor fi deasemenea egale,* cum se vede imediat şi această proprietate are loc independent de alegerea acestor unităţi.

In aceste condiţii, *ţinând seama că măsura mărimilor* $m(lU)$ *şi* $(ml)U$ *este aceeaşi pentru orice sistem de unităţi dedus din unităţile cu care sunt măsuraţi factorii, vom considera aceste mărimi ca egale, vom scrie*

$$m(lU)=(ml)U \quad \textit{(asociativitate)} \qquad (103',\text{II})$$

şi vom spune: *produsul mărimilor prin mărimi măsurabile cu o singură unitate este asociativ.*

Vom extinde astfel proprietatea, care rezultă din adunarea mărimilor de aceeaşi specie: *produsul unei mărimi printr'un număr este asociativ.* Este necesar să facem observaţia că această proprietate este tot o consecinţă a faptului că elementele $\alpha(\beta U)$ şi $(\alpha\beta)U$, unde α şi β sunt numere, au aceeaşi măsură *în specia* U. In cazul general al factorilor scalari l şi m, mărimile $m(lU)$ şi $(ml)U$ aparţin la *două specii* S şi $\sum$ isomorfe. *Proprietatea de asociativitate* (103', II) *impusă şi justificată prin egalitatea măsurilor în orice sistem de unităţi, identifică cele două specii* S *şi* $\sum$.

Din consideraţiile făcute asupra operaţiei de produs al unei mărimi printr'o mărime scalară sau pseudo-scalară, rezultă că pentru a se considera această operaţie ca o amplificare a mărimilor prin numere, este necesar în primul rând *să o definim,* aşa cum s'a făcut mai sus şi apoi să verificăm — *în specia de mărimi obţinută* — proprietăţile adunării. Faptul că aceste proprietăţi se verifică este o consecinţă a isomorfismului speciilor U şi lU, care nu este menţionat în lucrările de specialitate, considerându-se amplificarea prin scalari sau pseudo-scalari ca o amplificare prin numere.

In realitate, *ea este o operaţie distinctă de amplificare prin numere,* care revine la măsura în specia considerată, deoarece conduce la formarea unei specii noui de mărimi, *isomorfă, dar nu identică* cu cea dată.

*§ 63. Produsul vectorial şi aria orientată

Bivectorul a fost introdus ca o mărime asociată unui element plan orientat, definit prin doi vectori $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ şi având o direcţie, o orientare şi un modul, aria paralelogramului format de $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$. Comparaţia bivectorilor şi operaţiile liniare, ca adunarea şi amplificarea prin scalari, au putut fi efectuate fără a se compara măsurile ariilor din diversele plane ale spaţiului, cu alte cuvinte fără a introduce noţiunea de distanţă, deci în spaţiul afin.

Totuşi, pentru nevoile aplicaţiilor şi pentru simplificarea imaginilor geometrice, bivectorul a fost înlocuit printr'un vector reprezentativ, produsul vectorial, cu menţiunea că această reprezentare implică folosirea noţiunilor de distanţă şi unghi, fiind valabilă în spaţiul metric euclidian. Numele de produs vectorial, dat acestei mărimi, arată că ea este obţinută ca rezultat al unei *operaţii* asupra celor doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, care se bucură de proprietăţi ale produsului de numere.

Scanned with OKEN Scanner

Cum aceste proprietăţi aparţin în primul rând bivectorului, vom arăta că *această mărime poate fi introdusă ca un produs de vectori fără a recurge la reprezentarea sa vectorială*, folosind exclusiv proprietăţile algebrice ale egalităţii şi adunării mărimilor geometrice.

Vom observa că, după cum în definiţia iniţială vectorul a fost *caracterizat* prin direcţie, orientare şi *modul*, tot aşa şi bivectorul a fost *caracterizat* prin direcţie, orientare şi *aric*. Când, însă, am considerat vectorul ca o mărime geometrică asociată unui obiect geometric, adică unei perechi orientate de puncte în spaţiul afin, noţiunea de modul nu a mai fost necesară, fiind înlocuită *în comparaţia vectorilor coliniari* prin *măsura* cu ajutorul unei vector ales ca unitate, iar *în comparaţia vectorilor oarecare* — prin *însuşi vectorul* considerat ca mărime caracteristică unei clase.

Deasemenea, introducând bivectorul ca o mărime geometrică asociată în spaţiul afin unei perechi de segmente orientate, nu vom mai presupune cunoscută noţiunea de arie, ci o vom înlocui prin măsura bivectorului considerat printr'un bivector coplanar cu el, ales ca unitate.

In spaţiu, vom defini aria orientată a unui paralelogram prin însuşi bivectorul asociat acestui paralelogram.

In geometria elementară, aria este o mărime scalară, astfel încât calculul cu arii revine la calculul numeric. Aria este reprezentată printr'un număr, care în geometria în spaţiu este dat de rădăcina pătrată a sumei pătratelor ariilor proiecţiilor paralelogramului pe trei plane ortogonale. Vom face observaţia că, astfel concepută, aria *presupune* cunoaşterea planului paralelogramului considerat, astfel încât, împreună cu acest plan, ea defineşte un bivector, (mai corect un bivector sau opusul său). Prin urmare, definirea ariei *orientate* printr'un bivector este conformă cu definiţia elementară rezultată din nevoile practicei, constituind doar sinteza între caracterele geometrice ale acestei mărimi şi măsura sa.

Desfacerea caracterelor geometrice ale unei mărimi, ca direcţia şi orientarea, de caracterele numerice legate de măsura sa (cum este modulul) şi exprimarea mărimii numai prin măsura sa are ca efect ruperea unităţii noţiunii de mărime măsurabilă şi tendinţa de a se confunda acea mărime cu o mărime scalară.

In adevăr, când o mărime geometrică sau fizică se întroduce în ştiinţă, ea apare, deobicei, sub o formă particulară, astfel încât este considerată numai cu o parte restrânsă dintre valorile pe care le poate lua. Astfel, momentul unei forţe a fost considerat la început numai pentru forţele coplanare.

Deoarece, astfel definite, mărimile formează, deobicei, o specie măsurabilă cu o singură unitate, ele sunt asimilate cu mărimi scalare, deci cu numere şi sunt considerate exclusiv sub aspectul măsurii.

Dimpotrivă, *introducerea unei mărimi măsurabile prin proprietăţile algebrice ale relaţiei de egalitate şi ale adunării pentru această mărime, permite definirea ei precisă şi extinderea unora dintre proprietăţile sale la mărimi mai generale.*

Pentru a exemplifica observaţiile precedente, vom defini bivectorul ca mărime asociată unui obiect geometric *dintr'un anumit plan*, rămânând ca după aceasta să extindem noţiunea la cazul când acest plan este considerat în spaţiu şi, deci, când mulţimea bivectorilor cuprinde elemente, care trebue legate între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Fiind date trei puncte O, A şi B necoliniare, bipunctele orientate (O, A) şi (O, B) formează două obiecte geometrice $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$, cărora li se asociază vectorii contravarianţi

$$\bar{u} = \overline{OA}, \quad \bar{v} = \overline{OB}.$$

Mulţimea punctelor M având ca vector de poziţie

$$\bar{r} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \qquad (104, II)$$

în raport cu punctul de reper O, formează un plan P determinat de O, A şi B, când α şi β iau toate valorile reale.

Mulţimea punctelor (104, II) cu restricţia

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 1,$$

formează un paralelogram în planul P. Mulţimea tuturor paralelogramelor definite prin trei puncte necoliniare O, A şi B din planul P formează un obiect geometric $\mathcal{W}$, pe care îl vom complecta şi cu paralelogramele degenerate, formate cu puncte coliniare sau confundate. Acestui obiect geometric, care a rezultat din obiectele $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ *printr'o operaţie geometrică,* îi vom asocia o mărime geometrică măsurabilă W, funcţie de $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, pe care o vom nota la început

$$W = (\bar{u}, \bar{v}). \qquad (105, II)$$

Pentru ca obiectului W — adică mulţimii paralelogramelor din planul P — să-i putem asocia o mărime, este necesar să-l împărţim în clase, în raport cu o relaţie de echivalenţă. Evident că pentru ca $W = W$, deci ca egalitatea să fie reflexivă, rezultă din (105, II) că înlocuind segmentele $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ prin segmente echipolente vom obţine paralelograme echivalente, deoarece $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ rămân neschimbaţi. Prin urmare: *paralelogramele echipolente sunt echivalente.* Ca şi în cazul produsului scalar, *vom lărgi însă relaţia de echivalenţă, folosind o nouă transformare geometrică, ce transformă obiectul $\mathcal{W}$ în el însuşi, adică paralelogramele în paralelograme.*

Vom admite că paralelogramele $OACB$ şi $OAC'C$ sunt echivalente, ultimul fiind obţinut din primul prin deplasarea vârfului B în C prin translaţia laturii BC, deci cu $\overline{CC'} = \overline{BC}$. Aceeaşi proprietate o au şi paralelogramele $OACB$ şi $OCC''B$ (fig. 70).

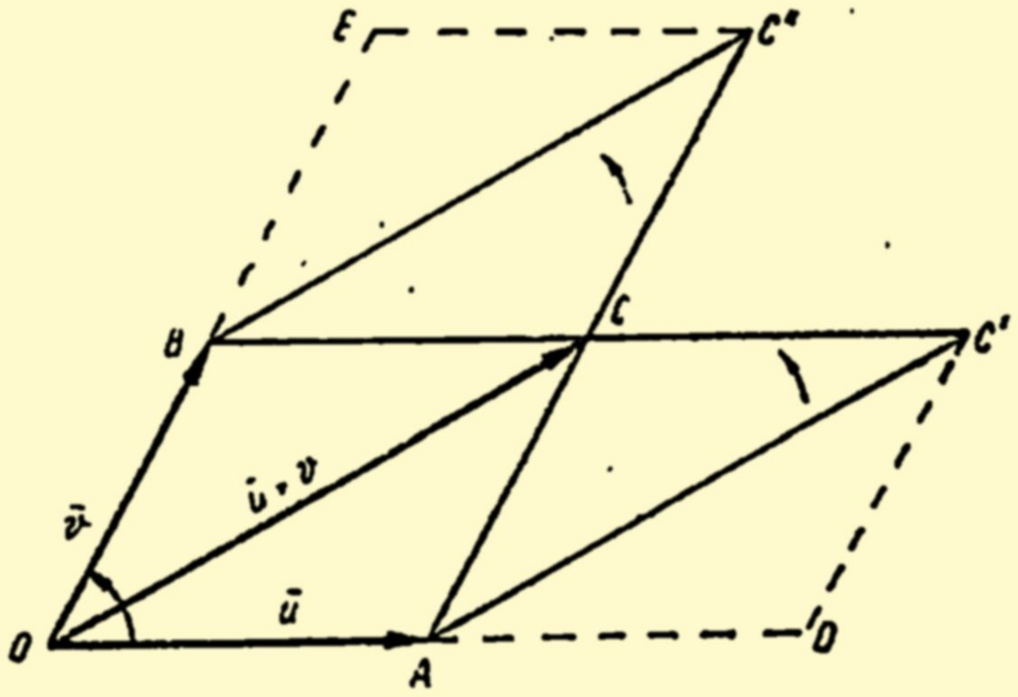


Fig. 70

Această relaţie de echivalenţă, care lărgeşte clasele de paralelograme echivalente, ne conduce la următoarele relaţii de egalitate pentru mărimea W:

$$(\bar{u}, \bar{u}+\bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}); \quad (\bar{u}+\bar{v}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}) \qquad (106, II)$$

Vom face observaţia că, până în prezent, paralelogramele nu sunt orientate, ordinea folosită în scrierea mărimii $(\bar{u}, \bar{v})$ fiind convenţională; *totuşi, laturile lor sunt orientate,* astfel încât paralelogramul $CADC'$, de exemplu, nu

Scanned with OKEN Scanner

este echivalent cu $OACB$, deşi se suprapune peste acesta prin translaţie, fiindcă $\overline{AC}=-\overline{OB}$. Din (106,II) deducem

$$(\bar{u}-\bar{v},\bar{v})=(\bar{u}-\bar{v}+\bar{v},\bar{v})=(\bar{u},\bar{v}),$$
$$(\bar{u},\bar{v}-\bar{u})=(\bar{u},\bar{v}) \qquad \text{etc.},$$

deci *mărimea* $(\bar{u},\bar{v})$ *nu se schimbă dacă adăugăm sau scădem unuia din termeni pe celălalt.*

Ca o consecinţă vom avea:

$$(-\bar{u},\bar{v})=(-\bar{u}+\bar{v},\bar{v})=(-\bar{u}+\bar{v},\bar{u})=(\bar{v},\bar{u}),$$
$$(\bar{v},\bar{u})=(\bar{v},\bar{u}-\bar{v})=(\bar{u},\bar{u}-\bar{v})=(\bar{u},-\bar{v});$$

deci:

$$(\bar{v},\bar{u})=(-\bar{u},\bar{v})=(\bar{u},-\bar{v}),$$
$$(\bar{u},\bar{v})=(-\bar{v},\bar{u})=(\bar{v},-\bar{u}). \qquad (107,\text{II})$$

Schimbând în ultimii doi membri v prin $-\bar{v}$, obţinem

$$(-\bar{u},-\bar{v})=(\bar{u},\bar{v});\quad (\bar{v},\bar{u})=(-\bar{v},-\bar{u}). \qquad (108,\text{II})$$

Egalităţile (107, II) şi (108, II), pun în evidenţă relaţiile de echivalenţă între paralelogramele cu aceleaşi vârfuri O, A, B, C

Pentru a face măsurabilă mărimea $(\bar{u},\bar{v})$, vom defini *parţial* adunarea prin relaţia

$$(\bar{u},\bar{v})+(\bar{u},\bar{v})=(2\bar{u},\bar{v})=2(\bar{u},\bar{v}),$$

pe care o vom extinde la orice multiplu al lui $(\bar{u},\bar{v})$ prin *relaţia de omogenitate*

$$(\lambda\bar{u},\bar{v})=\lambda(\bar{u},\bar{v}), \qquad (109,\text{II})$$

având proprietăţile adunării (asociativitate, comutativitate):

$$(\lambda\bar{u},\bar{v})+(\mu\bar{u},\bar{v})=[(\lambda+\mu)\bar{u},\bar{v}]=(\mu\bar{u},\bar{v})+(\lambda\bar{u},\bar{v})=(\lambda+\mu)(\bar{u},\bar{v}), \qquad 110,\text{II})$$

pentru orice pereche de numere λ, μ.

Folosind relaţiile (107, II) şi (109, II), vom avea deasemenea:

$$(\bar{u},\lambda\bar{v})=(-\lambda\bar{v},\bar{u})=\lambda(-\bar{v},\bar{u})=\lambda(\bar{u},\bar{v}),$$

ceeace arată că *relaţia de omogenitate este valabilă pentru ambii termeni ai mărimii* $(\bar{u},\bar{v})$ şi că, deci, se poate scrie sub forma mai generală

$$(\lambda\bar{u},\mu\bar{v})=\lambda\mu(\bar{u},\bar{v}), \qquad (111,\text{II})$$

din care deducem încă o relaţie de echivalenţă;

$$\left(\lambda\bar{u},\frac{1}{\lambda}\bar{u}\right)=(\bar{u},\bar{v}).$$

Pentru $\lambda=0$, $\mu=1$, relaţia (111, II) devine:

$$(0\bar{u},\bar{v})=0\,(\bar{u},\bar{v})=0,$$

iar pentru $\lambda=1$, $\mu=0$, vom avea

$$(\bar{u},0\bar{v})=0\,(\bar{u},\bar{v})=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci vom scrie

$$(\bar{0}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{0}) = 0, \qquad (112, II)$$

notând cu 0 elementul astfel obţinut.

Aplicând relaţia (110, II), vom avea:

$$(\bar{u} + 0\,\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + 0\,(\bar{u}, \bar{v}) = (1 + 0)\ (\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}).$$

Se vede că elementul 0 joacă în adunare rolul lui zero şi deci va putea fi considerat ca *mărime nulă* în specia *W*.

Vom putea enunţa această proprietate spunând: *Mărimea* $(\bar{u}, \bar{v})$ *este nulă când unul din vectorii* $\bar{u}$ *sau* $\bar{v}$ *este nul.*

Relaţia de omogenitate, deci adunarea, aşa cum a fost definită, ne permite să extindem relaţia de echivalenţă (106, II) astfel: *Mărimea* $(\bar{u}, \bar{v})$ *rămâne neschimbată dacă unuia din termeni i se adaugă un multiplu al celuilalt:*

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} + \lambda\bar{v}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v} + \mu\bar{u}). \qquad (113, II)$$

În adevăr:

$$(\bar{u} + \lambda\,\bar{v}, \bar{v}) = \frac{1}{\lambda}(\bar{u} + \lambda\,\bar{v}, \lambda\,\bar{v}) = \frac{1}{\lambda}(\bar{u}, \lambda\,\bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}).$$

Ca o consecinţă avem proprietatea următoare: *Mărimea* $(\bar{u}; \bar{v})$ *este nulă dacă vectorii* $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$ *sunt liniar dependenţi.*

Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar dependenţi, vom avea $\bar{v} = \lambda\,\bar{u}$, deci:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \lambda\,\bar{u}) = (\bar{u}, \lambda\,\bar{u} - \lambda\,\bar{u}) = (\bar{u}, \bar{0}) = 0. \qquad (114, II)$$

Această proprietate pune în evidenţă forma cea mai generală a mărimii nule în specia *W*.

În sfârşit din relaţiile (107, II), deducem o altă proprietate fundamentală a mărimilor $(\bar{u}, \bar{v})$: *Mărimea* $(\bar{u}, \bar{v})$ *îşi schimbă semnul prin permutarea vectorilor* $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$.

În adevăr, vom avea:

$$(\bar{v}, \bar{u}) = (-\bar{u}, \bar{v}) = [(-1)\,\bar{u}, \bar{v}] = (-1)\ (\bar{u}, \bar{v}) = -(\bar{u}, \bar{v}). \qquad (115, II)$$

Vom numi mărimea $-(\bar{u}, \bar{v})$ *opusă* lui $(\bar{u}, \bar{v})$, deoarece

$$(\bar{u}, \bar{v}) + [-(\bar{u}, \bar{v})] = (\bar{u}, \bar{v}) + (-1)\ (\bar{u}, \bar{v}) = (1 - 1)\ (\bar{u}, \bar{v}) = 0,$$

deci suma unui element şi a opusului său este nulă.

Proprietatea (115, II) stabilită se exprimă spunând că mărimea $(\bar{u}, \bar{v})$ este *alternată* sau *antisimetrică.*

Mărimile $(\bar{u}, \bar{v})$ *formează o specie măsurabilă cu o singură unitate.*

În adevăr, fie $\bar{a}$, $\bar{b}$ doi vectori liniar independenţi şi $\bar{u}, \bar{v}$ doi alţi vectori din acelaşi plan *P*. Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar independenţi, vom putea scrie

$$\bar{u} = \alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{v},$$

deci

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (\alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{v}, \bar{v}) = (\alpha\,\bar{a}, \bar{v}) = \alpha\,(\bar{a}, \bar{v}).$$

Deasemenea, fiindcă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt liniar independenţi

$$\bar{v} = \gamma a + \delta b,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \alpha(\bar{a}, \bar{v}) = \alpha(\bar{a}, \gamma\bar{a} + \delta\bar{b}) = \alpha\delta(\bar{a}, \bar{b}).$$

Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{v}$ sunt liniar dependenţi, vom pune

$$\bar{v} = l\bar{a}, \qquad \bar{u} = m\bar{a} + n\bar{b}$$

şi vom avea

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (m\bar{a} + n\bar{b}, l\bar{a}) = ln(\bar{b}, \bar{a}) = -ln(\bar{a}, \bar{b}).$$

Prin urmare, în orice caz, *mărimile* $(\bar{u}, \bar{v})$ *sunt proporţionale cu una dată dintre ele.*

In acelaşi timp, această proprietate ne permite să definim *suma a două mărimi oarecare* $(\bar{u}, \bar{v})$ *şi* $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ ca suma mărimilor de forma $\lambda(\bar{a}, \bar{b})$ cu care sunt egale şi pentru care adunarea este definită prin relaţia de omogenitate. Fie

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}); \quad (\bar{u}_1, \bar{v}_1) = \mu(\bar{a}, \bar{b}).$$

Vom defini suma $(\bar{u}, \bar{v}) + (\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ prin relaţia

$$(\bar{u}, \bar{v}) + (\bar{u}_1, \bar{v}_1) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}) + \mu(\bar{a}, \bar{b}) = (\lambda + \mu)(\bar{a}, \bar{b}). \qquad (116, \text{II})$$

Deci, suma a două mărimi $(\bar{u}, \bar{v})$ şi $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ din specia W este o mărime din aceeaşi specie şi prin urmare: *Specia W este măsurabilă.*

Deoarece toate mărimile sunt măsurabile cu unitatea $(\bar{a}, \bar{b})$, specia W este măsurabilă cu o singură unitate.

Considerând mărimea $(\bar{u}, \bar{v})$ ca obţinută din $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ printr'o operaţie algebrică, ce corespunde operaţiilor geometrice prin care obiectul $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{W}$ a fost obţinut din obiectele $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ şi împărţit în clase, *operaţia* $(\bar{u}, \bar{v})$ *este distributivă.*

In adevăr, *vom avea relaţia:*

$$(\bar{u} + \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{v}, \bar{w}) \qquad (117, \text{II})$$

între trei vectori oarecare din planul P.

Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{w}$ sunt liniar dependenţi, punând $\bar{u} = \lambda\bar{w}$ vom avea

$$(\lambda\bar{w} + \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{v}, \bar{w}) = (\bar{v}, \bar{w}) + (\lambda\bar{w}, \bar{w}) = (\bar{v}, \bar{w}) + (\bar{u}, \bar{w}),$$

deci (117, II) este verificată.

Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{w}$ sunt liniar independenţi, vom putea scrie

$$\bar{v} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{w},$$

de unde

$$\begin{aligned}(\bar{u} + \bar{v}, \bar{w}) &= (\bar{u} + \alpha\bar{u} + \beta\bar{w}, \bar{w}) = (u + \alpha\bar{u}, \bar{w}) = \\ &= (\alpha + 1)(\bar{u}, \bar{w}) = \alpha(\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{u}, \bar{w}) = \\ &= (\alpha\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{u}, \bar{w}) = (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w}, \bar{w}) + (\bar{u}, \bar{w}) = \\ &= (\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{v}, \bar{w}),\end{aligned}$$

ceeace justifică relaţia (117, II) şi în acest caz. Este evident că aceasta este valabilă şi când $\bar{u}$, $\bar{v}$ sau $\bar{w}$ sunt nuli, deci relaţia este generală.

Scanned with OKEN Scanner

Operația prin care se obține mărimea $(\bar{u}, \bar{v})$ *din* $\bar{u}$ *și* $\bar{v}$ *are proprietățile produselor de mărimi geometrice*, și anume: determină o mărime $(\bar{u}, \bar{v})$ măsurabilă, este omogenă și distributivă, deci *este un produs de mărimi geometrice.*

Vom numi *produs vectorial* a doi vectori contravarianți $\bar{u}$ și $\bar{v}$ din planul P operația notată prin semnul $\times$ și definită prin proprietățile:

$$(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{v}=\bar{u}\times\bar{v};\ \bar{u}\times(\bar{v}+\bar{u})=\bar{u}\times\bar{v};$$

$$(\lambda\bar{u})\times\bar{v}=\lambda(\bar{u}\times\bar{v});\ \bar{u}\times(\mu\bar{v})=\mu(\bar{u}\times\bar{v}),$$

din care decurg apoi proprietățile

$$(\bar{u}+\lambda\bar{v})\times\bar{v}=\bar{u}\times\bar{v};\ \bar{u}\times(\bar{v}+\lambda\bar{u})=\bar{u}\times\bar{v};\ (\bar{v}\times\bar{u})=-(\bar{u}\times\bar{v});$$

$$(\lambda u\times\bar{u})=0;\ (\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w}=\bar{u}\times\bar{w}+\bar{v}\times\bar{w}.$$

Din aceste proprietăți rezultă că *această operație este un produs, caracterizat prin proprietatea de alternanță sau de anticomutativitate.*

Mărimea obținută prin operația de produs vectorial se numește *bivector*, mai precis, *bivector contravariant*, deoarece factorii sunt vectori contravarianți.

Revenind la noțiunea de arie din geometria elementară, constatăm că aceasta este definită ca o mărime scalară asociată unui paralelogram și extinsă apoi la figuri sume de paralelograme, *fără a se ține seama de orientarea laturilor.* Această mărime are proprietățile de echivalență și omogenitate ale bivectorului, formează o specie măsurabilă cu o unitate și deci este unic determinată prin alegerea ariei unui paralelogram *dat* ca unitate de arie.

Dacă același paralelogram este *orientat prin laturile sale* și ales ca reprezentant al bivectorului unitate, *măsura elementară a ariei oricărui paralelogram din plan va fi egală cu valoarea absolută a măsurii bivectorului respectiv prin această unitate.*

Deaceea, vom numi bivectorul asociat unui paralelogram cu laturile orientate *aria orientată* a acelui paralelogram.

*§ 64. Aria orientată ca mărime pseudo-scalară

Prin orientarea laturilor unui paralelogram $OACB$ (fig. 70) se pot asocia acestei figuri opt bivectori:

$$(\bar{u}, \bar{v}),\ (-\bar{u}, \bar{v});\ (\bar{u}, -\bar{v}),\ (-\bar{u}, -\bar{v});$$

$$(\bar{v}, \bar{u}),\ (-\bar{v}, \bar{u});\ (\bar{v}, -\bar{u}),\ (-\bar{v}, -\bar{u}).$$

Ținând seama de echivalențele (107, II) și (108, II), aceștia se reduc defapt la doi bivectori opuși:

$$(\bar{u}, \bar{v})=(-\bar{u}, -\bar{v})=(\bar{v}, -\bar{u})=(-\bar{v}, \bar{u});$$

$$(\bar{v}, \bar{u})=(-\bar{v}, -\bar{u})=(\bar{u}, -\bar{v})=(-\bar{u}, \bar{v});$$

$$(\bar{v}, \bar{u})=-(\bar{u}, \bar{v}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ceeace deosebeşte aceşti bivectori nu este, deci, ordinea în care sunt considerate laturile paralelogramului, ci orientarea circulaţiei pe paralelogram, pornind din vârful comun O, dealungul primei laturi orientate.

Să observăm că *această orientare are o semnificaţie când considerăm planul independent de spaţiu, ca având o singură faţă, pe care sunt trasaţi vectorii. Când planul este considerat în spaţiu, aceeaşi circulaţie are sensuri opuse pe cele două feţe ale planului.*

Să presupunem că am ales o faţă a planului P, sau că îl considerăm în mod provizoriu independent de spaţiu, ca în geometria plană, deci ca având o singură faţă, sau ca un spaţiu cu două dimensiuni.

Vom putea orienta această faţă a planului prin analogie cu modul în care se orientează dreapta, considerată ca un spaţiu cu o dimensiune (§ 22).

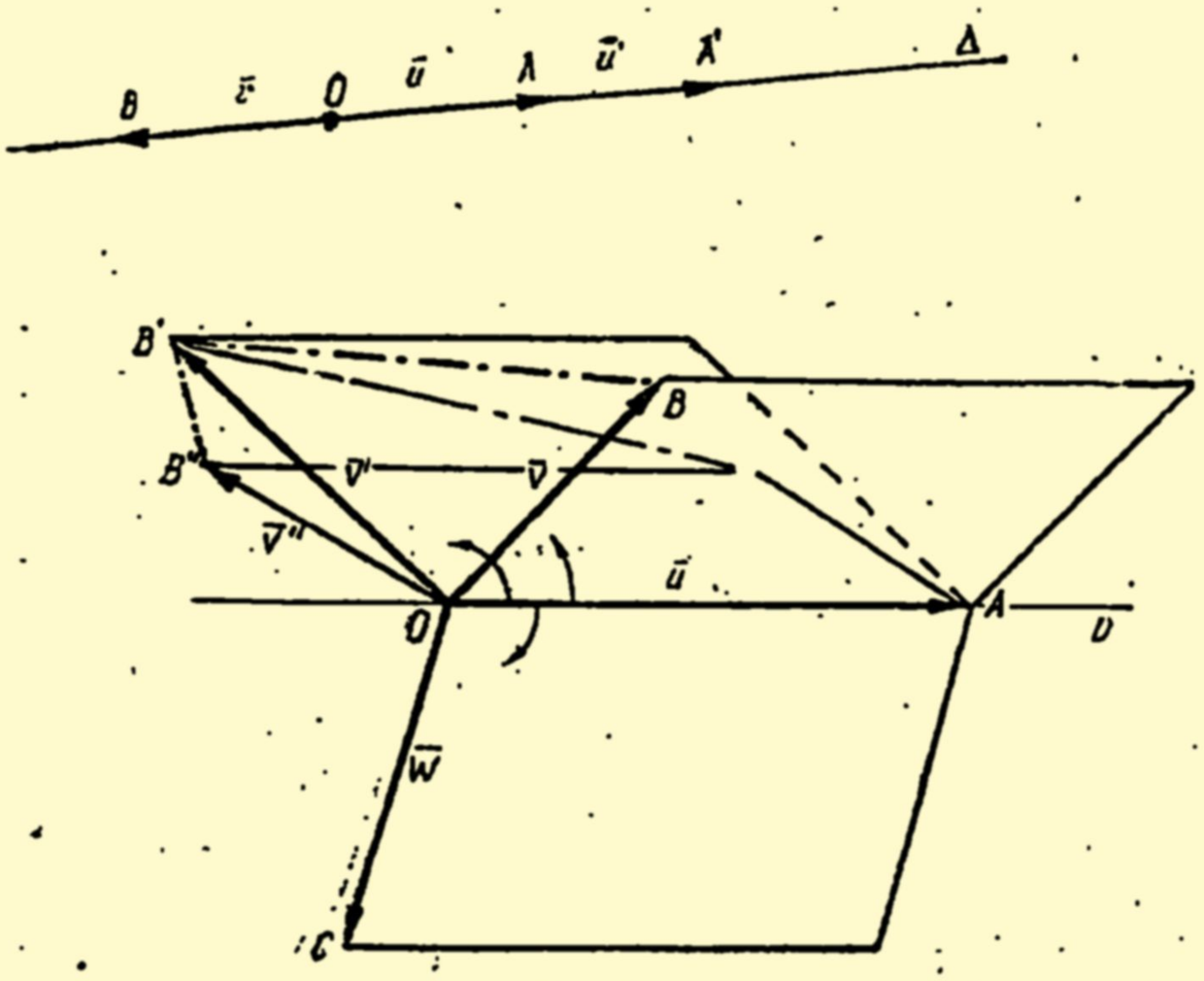


Fig. 71

In adevăr, dacă pe o dreaptă Δ fixăm un punct O, (fig. 71), dreapta este împărţită în două semidrepte, separate prin O. Fiind dat un al doilea punct A, *vectorii $\overline{OA}$ şi $\overline{OA'}$ au aceeaşi orientare dacă segmentul AA' nu conţine punctul O.* Vectorii $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ au orientări opuse dacă segmentul AB conţine punctul O.

Translaţia şi amplificarea printr'un număr pozitiv nu schimbă orientarea vectorilor. Astfel, măsurând toţi vectorii de pe dreaptă cu unitatea $\overline{OA}=\bar{u}$, condiţia necesară şi suficientă ca $\overline{OA'}=\bar{u}'$ să aibă orientarea lui $\bar{u}$ este ca

$$\bar{u}'=\lambda\bar{u};\quad(\lambda>0),$$

deci ca măsura lui $\bar{u}'$ prin $\bar{u}$ să fie pozitivă. In general, *doi vectori de pe dreaptă vor avea aceeaşi orientare, sau orientări opuse, după cum măsurile lor vor fi de acelaşi semn, sau de semne contrare.*

In plan, o dreaptă D va împărţi planul în două semiplane. Luând pe dreapta D un vector $\overline{OA}=\bar{u}$ şi un punct B exterior, vectorii $\overline{OA}=\bar{u}$ şi $\overline{OB}=\bar{v}$ vor determina un bivector $(\bar{u},\bar{v})$. B' fiind un alt punct din plan, vectorii $\overline{OA}=\bar{u}$ şi $\overline{OB'}=\bar{v}'$ formează un nou bivector $(\bar{u},\bar{v}')$.

Bivectorii $(\bar{u},\bar{v})$ şi $(\bar{u},\bar{v}')$ vor avea aceeaşi orientare dacă segmentul BB' nu conţine niciun punct al dreptei D, cu alte cuvinte nu intersectează această dreaptă. In schimb, bivectorii $(\bar{u},\bar{v})$ şi $(\bar{u},\bar{w})$ au orientări opuse deoarece segmentul BC intersectează pe D. Translaţia şi amplificarea bivectorilor cu un factor pozitiv nu schimbă orientarea. Deasemenea, prin deplasarea vârfurilor B

Scanned with OKEN Scanner

sau A paralel cu $\bar{u}$, respectiv $\bar{v}$, orientarea bivectorului $(\bar{u}, \bar{v})$ rămâne neschimbată (Exerciţiu). Prin urmare: *Bivectorii egali au aceeaşi orientare.*

In aceste condiţii, măsurând toţi bivectorii din planul P cu aceeaşi unitate $(\bar{a}, \bar{b})$, vom putea scrie pentru un bivector oarecare $(\bar{u}, \bar{v})$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}), \qquad (118, II)$$

unde λ este măsura lui $(\bar{u}, \bar{v})$ prin $(\bar{a}, \bar{b})$.

Dacă $\lambda > 0$, bivectorii $(\bar{u}, \bar{v})$ şi $(\bar{a}, \bar{b})$ au aceeaşi orientare, fiindcă amplificarea cu un factor pozitiv lasă neschimbată orientarea. Invers, dacă bivectorii $(\bar{u}, \bar{v})$ şi $(\bar{a}, \bar{b})$ au aceeaşi orientare, $\lambda > 0$, deoarece $\lambda < 0$ schimbă orientarea lui $(\bar{a}, \bar{b})$.

Prin urmare: *Condiţia necesară şi suficientă ca un bivector $(\bar{u}, \bar{v})$ să aibă orientarea bivectorului unitate $(\bar{a}, \bar{b})$ este ca măsura sa să fie pozitivă.*

O consecinţă importantă a acestei propoziţii este următoarea: *Doi bivectori din plan au aceeaşi orientare sau orientări opuse, după cum măsurile lor în raport cu aceeaşi unitate sunt de aceleaşi semne sau de semne contrare.*

Vom putea deci orienta planul printr'un bivector $(\bar{a}, \bar{b})$. Această orientare are semnificaţia următoare: formând un paralelogram orientat $(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\bar{u}, \bar{v})$ cu vârful O într'un anumit punct, toate paralelogramele din plan sunt orientate în raport cu acesta, care poate fi transportat oriunde prin translaţie, fără a-şi schimba orientarea.

Se vede deci că *planul poate fi orientat, ca şi dreapta, în două moduri opuse.*

In această orientare bivectorul joacă rolul vectorului pentru orientarea dreptei. Odată aleasă unitatea, căreia i se atribue orientarea pozitivă, semnul măsurii oricărui bivector arată dacă acesta este orientat pozitiv sau negativ. Astfel, *aria orientată, considerată numai prin măsura sa, pune în evidenţă orientarea circulaţiei pe conturul paralelogramului şi, deci, orientarea elementelor plane în raport cu unul dintre ele, ales ca unitate.*

Mulţimea bivectorilor dintr'un plan P formează o specie măsurabilă cu o singură unitate. Spre deosebire de produsul scalar, care defineşte o mărime scalară, *produsul vectorial defineşte o mărime pseudo-scalară a planului* P.

In adevăr, schimbarea sistemului de referinţă al spaţiului nu modifică produsul scalar, deoarece lasă invariantă unitatea de produs scalar $(\bar{p}'\bar{r}) = 1$, ceeace rezultă imediat din semnificaţia acesteia de măsură a vectorului $\bar{r}$ prin segmentul interceptat pe $\bar{p}'$. Prin urmare, *măsura produsului scalar este independentă de sistemul de referinţă ales.*

Dimpotrivă, prin raportarea vectorilor din planul P la un sistem de referinţă, bivectorul-unitate este determinat, fiind format de cei doi vectori de bază a şi b.

Schimbarea sistemului de referinţă are ca efect schimbarea unităţii, deci şi a măsurii bivectorilor. Este clar că noul bivector-unitate $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$, făcând parte din specia bivectorilor planului P, va fi de forma $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) = \frac{1}{\alpha}(\bar{a}, \bar{b})$, deci toate măsurile se vor amplifica prin acelaşi factor α, ceeace arată că *bivectorii coplanari, sau ariile orientate coplanare*, sunt mărimi pseudo-scalare. Orientarea lor depinde de orientarea dată planului şi se schimbă odată cu aceasta.

Scanned with OKEN Scanner

Este clar că alegerea unui bivector-unitate, independent de cel format de vectorii de bază $(\bar{a}, \bar{b})$, conduce la acelaşi rezultat, deoarece va fi necesar să se exprime vectorii în raport cu baza $(\bar{a}, \bar{b})$ şi deci să se pună în evidenţă relaţia dintre $(\bar{a}, \bar{b})$ şi bivectorul-unitate ales.

Prin schimbarea sistemului de referinţă, măsurile vor fi amplificate prin ca mai sus, fiindcă toţi vectorii vor fi raportaţi la baza $(\bar{a}, \bar{b})$. (Exerciţiu).

* § 65. Mărimi scalare şi pseudo-scalare. Unităţi fundamentale şi derivate

Consideraţiile făcute asupra ariei orientate, ca mărime măsurabilă cu o singură unitate, ne permit să precizăm sensul noţiunii de mărime scalară, în opoziţie cu aceea de mărime pseudo-scalară.

Cât timp o specie de mărimi geometrice sau fizice este considerată fără a fi raportată la spaţiu, nu există deosebiri între două specii măsurabile cu o singură unitate, din punctul de vedere al măsurii.

Dacă, însă, mărimile sunt raportate la spaţiu, deci dacă sunt exprimate prin mărimi geometrice raportate la un sistem de referinţă, atunci deosebirea poate apare.

In adevăr, spaţiul fiind raportat la un sistem de referinţă definit printr'o bază de vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, este posibil ca unitatea pentru unele specii să fie determinată prin alegerea bazei, pe când pentru altele unitatea este independentă de această alegere.

In cazul ariei orientate, deci al bivectorilor coplanari, *raportarea planului P la o bază $\bar{a}$, $\bar{b}$ impune ca unitate bivectorul* $(\bar{a}, \bar{b})$. Alegerea unei alte unităţi revine la amplificarea lui $(\bar{a}, \bar{b})$ printr'un factor numeric λ.

Dimpotrivă, *în cazul produsului scalar, unitatea este complect independentă de alegerea bazei $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$,* fiind formată din perechea de vectori $\bar{p}'$, $\bar{r}$, unde $\bar{p}'$ este un vector covariant oarecare, iar $\bar{r}$ un vector contravariant oarecare, ce se sprijină pe planele lui $\bar{p}'$.

Noţiunile de mărime scalară şi pseudo-scalară au semnificaţie numai în legătură cu raportarea spaţiului la un sistem de referinţă.

Vom numi *sistem structural de unităţi al spaţiului*, sistemul format din vectorii de bază $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ai triedrului fundamental, în plan acest sistem reducându-se la doi vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, iar pe dreaptă la un singur vector $\bar{a}$. Orice sistem de unităţi al unei specii de mărimi geometrice, independent de sistemul structural al spaţiului, va fi numit *sistem fundamental de unităţi geometrice.*

Orice sistem de unităţi al unei specii de mărimi geometrice, determinat prin alegerea sistemelor structurale sau fundamentale, va fi numit *sistem derivat de unităţi geometrice.*

Astfel, orice unitate pentru produsul scalar a doi vectori este o unitate fundamentală, pe când unitatea pentru specia ariilor orientate dintr'un plan este o unitate derivată din sistemul structural $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Vom numi *mărime scalară* orice mărime aparţinând unei specii măsurabile cu o singură unitate *fundamentală.*

Scanned with OKEN Scanner

Vom numi *mărime pseudo-scalară* orice mărime aparținând unei specii măsurabile cu o singură unitate *derivată.*

Produsul scalar este o mărime scalară, iar bivectorul sau aria orientată *dintr'un plan P,* considerat ca spațiu cu două dimensiuni, este o mărime pseudo-scalară.

Este ușor de văzut, chiar în cadrul geometriei elementare, că *aria neorientată* este deasemenea o mărime pseudo-scalară, fiind măsurabilă cu o singură unitate derivată.

Aplicație. *Aria neorientată ca mărime pseudo-scalară.* Presupunând că noțiunea de arie nu a fost încă definită, aria neorientată poate fi considerată deasemenea ca o mărime asociată paralelogramului cu laturi neorientate. Totuși, pentru determinarea în planul P a paralelogramului $OACB$, laturilor sale li se vor asocia vectorii $\bar{u}=\overline{OA}$, $\bar{v}=\overline{OB}$.

Reluând considerațiile făcute în paragraful precedent, vom nota prin

$$A=|(\bar{u},\ \bar{v})| \tag{119,II}$$

mărimea pe care o vom numi arie neorientată sau pe scurt arie a paralelogramului.

Vom impune aceeași relație de echivalență (106,II,) care se va scrie

$$|(\bar{u},\bar{u}+\bar{v})|=|(\bar{u},\bar{v})|;\ \ |(\bar{u}+\bar{v},\bar{v})|=|(\bar{u},\bar{v})|. \tag{120,II}$$

Refăcând raționamentele relative la aria orientată, vom deduce egalitățile (107,II) și (108,II) sub forma:

$$\left.\begin{aligned}|(\bar{v},\bar{u})|&=|(-\bar{u},\bar{v})|=|(\bar{u},-\bar{v})|;\\ |(\bar{u},\bar{v})|&=|(-\bar{v},\bar{u})|=|(\bar{v},-\bar{u})|;\end{aligned}\right\} \tag{121,II}$$

$$|(-\bar{u}-,\bar{v})|=|(\bar{u},\bar{v})|;\ \ |(\bar{v},\bar{u})|=|(-\bar{v},-\bar{u})|. \tag{122,II}$$

Deosebirea între aria orientată și cea neorientată va fi pusă în evidență printr'o relație de echivalență suplimentară

$$|(-\bar{u},\bar{v})|=|(\bar{u},\bar{v})|, \tag{123,II}$$

care exprimă faptul că schimbând orientarea primei laturi, aria rămâne neschimbată. In acest caz, din (121,II) și (122,II) deducem:

$$|(\bar{v},\bar{u})|=|(\bar{u},\bar{v})|$$

deci: *aria orientată este simetrică în cei doi factori* $\bar{u}$ și $\bar{v}$.

Deasemenea, vom avea din (123,II) și (121,II)

$$|(-\bar{u},\bar{v})|=|(\bar{u},-\bar{v})|=|(\bar{u},\bar{v})|$$

extinzând proprietatea de echivalență (123,II).

Definind adunarea prin relația

$$|(\bar{u},\bar{v})|+|(\bar{u},\bar{v})|=|(2\bar{u},\bar{v})|=2|(\bar{u},\bar{v})|,$$

extinsă la orice multiplu al lui $(\bar{u},\bar{v})$ prin relația de omogenitate (109,II) sub forma:

$$|(\lambda\bar{u},\bar{v})|=|\lambda(\bar{u},\bar{v})|,$$

vom face observația că din (123,II) deducem:

$$|(\lambda\bar{u},\bar{v})|=|\ |\lambda|(\bar{u},\bar{v})|=||\lambda|(\bar{u},\bar{v})|.$$

Prin urmare, oricare ar fi semnul lui λ, factorul de amplificare este pozitiv. Deaceea relația de omogenitate pentru aria neorientată va fi

$$|(\lambda\bar{u},\bar{v})|=|\lambda|\,|(\bar{u},\bar{v})| \tag{124,VII}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu proprietățile adunării (asociativitate, comutativitate). Vom avea

$$|(\lambda\bar{u}, \bar{v})|+|(\mu\bar{u}, \bar{v})|=(|\lambda|+|\mu|)\,|(\bar{u}, \bar{v})| \qquad (125,II)$$

pentru orice pereche de numere λ, μ. Deasemenea:

$$|(\lambda\bar{u}, \bar{v})+(\mu\bar{u}, \bar{v})|=|[(\lambda+\mu)\bar{u}, \bar{v}]|=|\lambda+\mu|\,|(\bar{u}, \bar{v})|, \qquad (126,II)$$

deci, în general:

$$|(\lambda\bar{u}, \bar{v})+(\mu\bar{u}, \bar{v})|\leq|(\lambda\bar{u}, \bar{v})|+|(\mu\bar{u}, \bar{v})|. \qquad (127,II)$$

Mărimea $|(\bar{u}, \bar{v})|$ *are proprietățile modulului numerelor reale*, ceeace justifică notația (119,II)

Este ușor de stabilit că ariile neorientate constitue o specie măsurabilă cu o unitate și că mărimea nulă este de forma

$$|(\bar{u}, \lambda\bar{u})|,$$

deci este formată cu vectori liniar dependenți. (Exercițiu).

Este important de observat că *operația* $|(\bar{u}, \bar{v})|$ *nu este distributivă în general.*

In adevăr, refăcând raționamentul folosit pentru stabilirea relației (117,II), vom avea

$$|(\bar{u}+\bar{v}, \bar{w})|=|(\bar{u}+\alpha\bar{u}+\beta\bar{w}, \bar{w})|=|(\bar{u}+\alpha\bar{u}, \bar{w})|=|(\alpha+1)|\,|(\bar{u}, \bar{w})|;$$

$$|(\bar{v}, \bar{w})|=|(\alpha u+\beta\bar{w}, \bar{w})|=|\alpha|\,|(\bar{u}, \bar{w})|,$$

deci

$$|(\bar{u}+\bar{v}, \bar{w})|\leq|(\bar{u}, \bar{w})|+|(\bar{v}, \bar{w})|, \qquad (128,II)$$

deoarece

$$|\alpha+1|\leq|\alpha|+1. \qquad (129,II)$$

Rezultă că operația prin care se obține aria neorientată nu este în general un produs de mărimi geometrice, deoarece nu are proprietatea de distributivitate.

Totuși, din inegalitatea (129,II) se poate vedea că în cazul când $\alpha>0$, inegalitatea (128,II) devine egalitate. Cum însă

$$|(\bar{v}, \bar{w})|=|(\alpha\bar{u}, \bar{w})|,$$

$\alpha>0$ corespunde cazului în care bivectorii $(\bar{u}, \bar{w})$ și $(\bar{v}, \bar{w})$ au aceeași orientare. Reciproc, dacă acești bivectori au aceeași orientare, din

$$(\bar{v}, \bar{w})=(\alpha\bar{u}, \bar{w})=\alpha(\bar{u}, \bar{w})$$

deducem $\alpha>0$. Prin urmare:

Operația $|(\bar{u}, \bar{v})|$ *este distributivă pentru bivectorii* $(\bar{u}, \bar{v})$ *cu aceeași orientare.*

Aria neorientată este un produs numai pentru paralelogramele cu aceeași orientare.

Specia formată de ariile neorientate este isomorfă cu mulțimea numerelor nenegative, ceeace se poate vedea raportând-o la o unitate oarecare $|(\bar{a}, \bar{b})|$. In această specie nici un element nu are opus, iar scăderea nu este posibilă decât dacă măsura scăzătorului este mai mică decât a descăzutului.

Unitatea $|(\bar{a}, \bar{b})|$ este determinată prin raportarea planului P la un sistem de referință a, b, deci este derivată și prin urmare, *aria neorientată este o mărime pseudo-scalară.*

*§ 66. Produsul vectorial

In paragrafele precedente, bivectorul a fost considerat ca o mărime asociată unui paralelogram *dintr'un anumit plan*, deci într'un spațiu cu două dimensiuni. Presupunând determinați bivectorii din toate planele spațiului cu trei dimensiuni, mulțimea acestora formează o specie de mărimi geometrice, deoarece pot fi comparați între ei prin egalitate.

Scanned with OKEN Scanner

Trebue, însă, să observăm că, deşi bivectorii coplanari sunt mărimi măsurabile, suma a doi bivectori *necoplanari* nu a fost încă definită, deci nu putem afirma că bivectorii consideraţi în spaţiu, sunt mărimi măsurabile.

Va fi necesar să extindem operaţia de adunare la toţi bivectorii din spaţiu. In acelaşi timp, vom orienta elementul plan determinat de bivectorul $(\bar{u}, \bar{v})$ în spaţiu, considerând planul ca având două feţe şi asociind bivectorul $(\bar{u}, \bar{v})$ acelei feţe, pe care circulaţia pe conturul paralelogramului $(\bar{u}, \bar{v})$ se face în sensul pozitiv. Bivectorul $(\bar{v}, \bar{u})$, opusul lui $(\bar{u}, \bar{v})$ va fi deci asociat feţei opuse a aceluiaşi element plan.

Suma a doi bivectori coplanari, obţinându-se din relaţia de distributivitate, vom defini suma a doi bivectori din spaţiu, astfel ca această relaţie să fie valabilă şi în spaţiu.

Suma bivectorilor $(\bar{u}, \bar{v})$ şi $(\bar{u}, \bar{w})$, unde $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sunt trei vectori oarecare din spaţiu, va fi tot un bivector definit prin relaţia de distributivitate

$$(\bar{u}, \bar{v}) + (\bar{u}, \bar{w}) = (\bar{u}, \bar{v} + \bar{w}). \qquad (130, II)$$

Prin aceasta, *adunarea bivectorilor din spaţiu a fost definită numai parţial,* aşa cum am procedat şi în plan.

Ea poate fi, însă, extinsă la doi bivectori oarecare din spaţiu. Fie în adevăr bivectorii $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ şi $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$. Dacă unul dintre aceştia este nul, suma lor va fi egală cu celălalt, deci va fi tot un bivector.

Dacă ambii bivectori sunt diferiţi de zero, ei se pot găsi în două plane paralele, sau concurente. In primul caz, cum translaţia, atât în plan, cât şi în spaţiu lasă bivectorii invarianţi, vom putea considera cei doi bivectori coplanari şi deci, suma lor va fi tot un bivector coplanar (sau paralel) cu ei. Alegând pe $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ ca unitate, vom putea scrie atunci

$$(\bar{u}_2, \bar{v}_2) = \lambda (\bar{u}_1, \bar{v}_1)$$

şi vom spune că $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ şi $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ *sunt liniar independenţi.*

In cazul când bivectorii sunt *liniar independenţi*, deci când

$$\alpha (\bar{u}_1, \bar{v}_1) + \beta (\bar{u}_2, \bar{v}_2) \neq 0$$

pentru orice pereche de parametri α şi β nenuli în acelaşi timp, ei se vor găsi în două plane concurente P_1 şi P_2. Fie D dreapta de intersecţie a acestor plane şi $\bar{\theta}$ un vector pe această dreaptă (fig. 72). Vectorii $\bar{u}_1, \bar{v}_1$, fiind liniar independenţi, nu vor putea avea amândoi direcţia lui $\bar{\theta}$. Să presupunem, de exemplu că $\bar{v}_1$ şi $\bar{\theta}$ sunt liniar independenţi. In acest caz, vom putea scrie

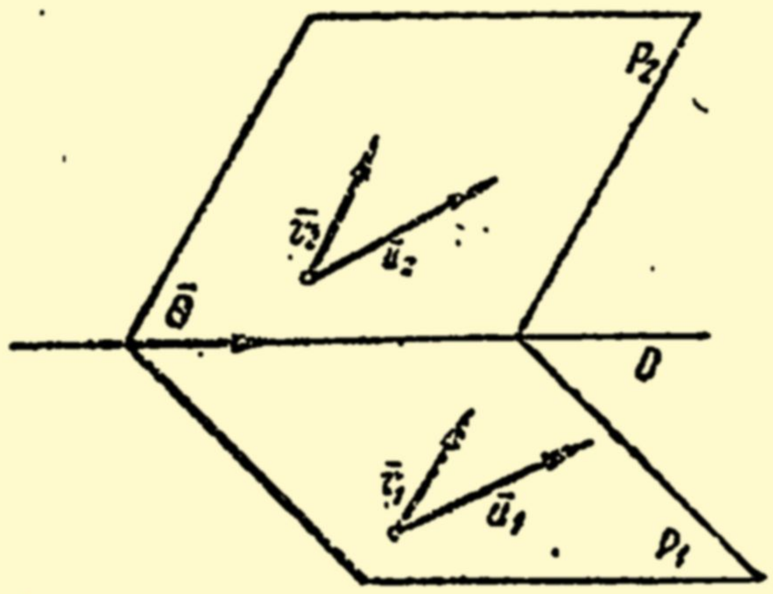


Fig. 72

$$\bar{u}_1 = \alpha\bar{\theta} + \beta\bar{v}_1,$$

deci

$$(\bar{u}_1, \bar{v}_1) = (\alpha\bar{\theta} + \beta\bar{v}_1, \bar{v}_1) = \alpha (\bar{\theta}, \bar{v}_1).$$

In mod analog, vom putea pune bivectorul $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ în planul P_2 sub forma

$$(\bar{u}_2, \bar{v}_2) = (\gamma\bar{\theta} + \delta\bar{v}_2, \bar{v}_2) = \gamma (\bar{\theta}, \bar{v}_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum pentru bivectorii astfel obţinuţi suma este definită prin relaţia de distributivitate (130,II), vom avea

$$(\bar{u}_1,\bar{v}_1)+(\bar{u}_2,\bar{v}_2)=\alpha(\bar{\theta},\bar{v}_1)+\gamma(\bar{\theta},\bar{v}_2)=(\bar{\theta},\alpha\bar{v}_1+\gamma\bar{v}_2), \qquad (131,II)$$

deci *suma a doi bivectori oarecare din spaţiu este un bivector.*

In fond, adunarea bivectorilor a fost redusă prin (130,II) la adunarea vectorilor $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ şi extinsă prin (131,II) la mulţimea tuturor bivectorilor din spaţiu. Se poate arăta că ea este asociativă şi comutativă (Exerciţiu).

Mulţimea tuturor bivectorilor din spaţiu formează o specie măsurabilă.

Operaţia prin care se obţine bivectorul $(\bar{u},\bar{v})$ din vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, având proprietăţile produselor de mărimi geometrice, este un produs, atât în plan, cât şi în spaţiu şi o vom numi *produs vectorial.*

Este important de observat că în plan distributivitatea produsului vectorial a fost o consecinţă a relaţiei de omogenitate şi a faptului că specia bivectorilor din plan este măsurabilă cu o singură unitate. In spaţiu, relaţia de distributivitate a fost impusă pentru a defini adunarea a două elemente $(\bar{u},\bar{v})$ şi $(\bar{u},\bar{w})$, care nu aparţineau unei astfel de specii măsurabile cu o unitate, deoarece nu erau coplanari.

Din felul în care a fost extinsă adunarea la mulţimea tuturor bivectorilor, se poate deduce că *specia acestor mărimi nu poate fi măsurabilă cu o singură unitate.*

In adevăr, considerând bivectorii $(\bar{u},\bar{v})$ şi $(\bar{u},\bar{w})$ în planele lor P_1 şi P_2, ei pot fi aleşi ca unităţi pentru a măsura speciile respective. Aceste unităţi nu pot fi reduse una la cealaltă, deoarece nu sunt proporţionale decât când planele sunt paralele, deci vor exista cel puţin două unităţi.

De fapt, *relaţia de distributivitate defineşte adunarea acestor două unităţi* şi adoptarea ei corespunde unui mod simplu de extensiune a adunării bivectorilor din plan.

Consideraţiile făcute ne conduc la problema determinării numărului de unităţi în specia bivectorilor şi a legăturilor dintre aceste unităţi şi cele trei unităţi structurale ale spaţiului.

Pentru a stabili numărul de unităţi al speciei bivectorilor din spaţiu, vom spune că p element $u_1, u_2, \dots, u_p$ ale unei specii constitue *un sistem de unităţi* pentru o specie, dacă sunt liniar independente şi dacă orice element u al speciei este o combinaţie liniară de forma:

$$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_p u_p$$

cu coeficienţi numerici a acestor elemente.

Această definiţie se impune prin însuşi modul de constituire a unei specii de mărimi prin adunare.

Este suficient să determinăm o bază $u_1, u_2, \dots, u_p$ pentru ca specia să fie măsurabilă cu p unităţi, orice altă bază $v_1, v_2, \dots, v_p$ fiind tot o combinaţie liniară a unităţilor $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Fie $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ o bază de vectori contravarianţi în spaţiul afin cu trei dimensiuni şi $(\bar{u}, \bar{v})=(\bar{u}\times\bar{v})$ un bivector oarecare format cu vectorii

$$\bar{u}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}; \quad \bar{v}=\alpha'\bar{a}+\beta'\bar{b}+\gamma'\bar{c},$$

raportaţi la baza $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Scanned with OKEN Scanner

Produsul vectorial $(\bar{u}\times\bar{v})$ se va scrie:

$$(\bar{u}\times\bar{v})=[(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c})\times(\alpha'\bar{a}+\beta'b+\gamma'\bar{c})]=$$
$$=(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\bar{a}\times\bar{b})+(\beta\gamma'-\gamma\beta')(\bar{b}\times\bar{c})+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')(\bar{c}\times\bar{a}), \qquad (132,II)$$

ţinând seama de distributivitate şi anticomutativitate.

Se vede că *în specia bivectorilor vor exista cel mult trei unităţi.*

Dacă bivectorii $(\bar{a}\times\bar{b})$, $(\bar{b}\times\bar{c})$, $(\bar{c}\times\bar{a})$ sunt liniar independenţi, ei vor constitui o bază.

Este uşor de văzut că *aceşti bivectori sunt liniar independenţi,* deci că între ei nu există nicio combinaţie liniară cu coeficienţi nu toţi nuli.

In adevăr, fie

$$\gamma(\bar{c}\times\bar{a})=\alpha(\bar{a}\times\bar{b})+\beta(\bar{b}\times\bar{c})=b\times(\beta\bar{c}-\alpha\bar{a})$$

combinaţia presupusă. Să admitem întâi cazul $\gamma\neq 0$.

Elementul plan $(\bar{c}\times\bar{a})$ fiind proporţional cu $\bar{b}\times(\beta\bar{c}-\alpha\bar{a})$, trebue să fie coplanar cu el, deci să conţină, în particular, vectorul $\bar{b}$. Prin urmare, ar trebui să existe o relaţie de forma

$$\bar{b}=\lambda\bar{c}+\mu\bar{a},$$

ceeace este exclus, vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ fiind liniar independenţi.

Dacă $\gamma=0$, elementul $\bar{b}\times(\beta\bar{c}-\alpha\bar{a})$ fiind nul, vom avea o relaţie de forma

$$\beta\bar{c}-\alpha\bar{a}=\nu\bar{b},$$

care nu este posibilă decât pentru

$$\alpha=0;\quad \beta=0;\quad \nu=0.$$

Prin urmare: *Bivectorii* $(\bar{a}\times\bar{b})$, $(\bar{b}\times\bar{c})$, $(\bar{c}\times\bar{a})$ *sunt liniar independenţi şi constitue o bază în specia bivectorilor din spaţiu.*

Cum aceste trei unităţi sunt determinate prin alegerea sistemului structural de unităţi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ al spaţiului afin, ele formează un sistem derivat. In consecinţă: *Mulţimea bivectorilor din spaţiul afin cu trei dimensiuni este o specie măsurabilă cu trei unităţi derivate.*

Am văzut mai sus că doi bivectori liniar independenţi formează un diedru, putând fi totdeauna puşi sub forma: $(\bar{u}\times\bar{v})$, $(\bar{u}\times\bar{w})$, unde $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ sunt liniar independenţi.

Orice bivector liniar dependent de $(\bar{u}\times\bar{v})$ şi $(\bar{u}\times\bar{w})$ este de forma $[\bar{u}\times(\alpha\bar{v}+\beta\bar{w})]$, cum se poate vedea uşor.

Prin urmare, *doi bivectori liniar independenţi au un vector comun şi numai unul,* iar trei bivectori liniar dependenţi au cel puţin un vector comun.

Vom spune că mulţimea bivectorilor, care au un vector comun, formează un *fascicol de bivectori.*

Condiţia necesară şi suficientă ca trei bivectori să fie liniar dependenţi este ca ei să facă parte dintr'un fascicol.

Mulţimea tuturor bivectorilor din spaţiu, care formează un fascicol, este o specie măsurabilă cu două unităţi. (Exerciţiu). Această specie este o subspecie a speciei tuturor bivectorilor spaţiului.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. *Distributivitatea în fascicolele de bivectori.* Un fascicol de bivectori este determinat de doi bivectori liniar independenți $(\bar{u}, \bar{v})$ și $(\bar{u}, \bar{w})$, având un vector comun $\bar{u}$, orice element al fascicolului putând fi pus sub forma

$$(\alpha\bar{u}, \bar{0})$$

unde α este un parametru, iar $\bar{0}$ un vector oarecare.

Proprietatea de distributivitate este verificată de toți bivectorii în fiecare din cele două plane ale bazei $(\bar{u}, \bar{v})$ și $(\bar{u}, \bar{w})$. Să presupunem că n'am impus proprietatea de distributivitate (130,II) a bivectorilor din spațiu. Presupunând că ea are loc *numai pentru doi bivectori oarecare din aceste plane,* ea va fi verificată de doi bivectori oarecare din fascicol.

Vom impune deci în locul relației (130,II) condiția ca

$$(\bar{u}, \beta\bar{v}) + (\bar{u}, \gamma\bar{w}) = (\bar{u}, \beta\bar{v} + \gamma\bar{w}).$$

Fie $(\bar{u}, \bar{\theta})$ și $(\bar{u}, \bar{\tau})$ doi bivectori oarecare din fascicol, unde

$$\bar{\theta} = a\bar{u} + b\bar{v} + c\bar{w}; \quad \bar{\tau} = a'\bar{u} + b'\bar{v} + c'\bar{w},$$

deci

$$(\bar{u}, \theta) = (\bar{u}, au + b\bar{v} + c\bar{w}) = (\bar{u}, b\bar{v} + c\bar{w})$$

în baza relației de echivalență a bivectorilor coplanari, care este valabilă, deoarece $\bar{u}$ este în planul $(\bar{u}, \bar{\theta})$. Deasemenea

$$(\bar{u}, \bar{\tau}) = (\bar{u}, a'\bar{u} + b'\bar{v} + c'\bar{w}) = (\bar{u}, b'\bar{v} + c'\bar{w}).$$

Cum însă ultimilor membri li se aplică proprietatea de distributivitate impusă vom avea

$$(\bar{u}, b\bar{v} + c\bar{w}) = (\bar{u}, b\bar{v}) + (\bar{u}, c\bar{w});$$
$$(\bar{u}, b'\bar{v} + c'w) = (\bar{u}, b'\bar{v}) + (\bar{u}, c'\bar{w}).$$

Termenii din membrii doi pot fi însumați, ținând seamă de distributivitate și asociativitate, astfel încât vom avea

$$(\bar{u}, \bar{\theta}) + (\bar{u}, \bar{\tau}) = (\bar{u}, b\bar{v} + b'\bar{v}, + (\bar{u}, c\bar{w} + c'\bar{w}) =$$
$$= (\bar{u}, b\bar{v} + b'\bar{v} + c\bar{w} + c'\bar{w}) = (u, a\bar{u} + b\bar{v} + c\bar{w} + a'\bar{u} + b'\bar{v} + c'\bar{w}) = (\bar{u}, \bar{\theta} + \bar{\tau}).$$

Prin urmare: *dacă proprietatea de distributivitate este verificată de bivectorii bazei, ea este generală pentru toți bivectorii fascicolului.*

Trei bivectori liniar independenți formează un triedru, deoarece ei sunt, în primul rând, doi câte doi liniar independenți, deci au câte un singur vector comun. Acești vectori nu pot fi coplanari, fiindcă, în acest caz, doi dintre bivectori ar fi coplanari, deci triedrul format este nedegenerat.

Dacă alegem ca bază $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ a spațiului, cei trei vectori ai triedrului (sau trei vectori proporționali cu fiecare din ei), cei trei bivectori liniar independenți constitue deasemenea o bază pentru bivectorii din spațiu, deci: *Orice sistem de trei bivectori liniar independenți formează un sistem de unități pentru specia bivectorilor.*

Această construcție a bazei arată că este posibil să considerăm ca fundamental sistemul de unități al bivectorilor și să derivăm din el pe acela al vectorilor contravarianți. Totuși definiția bivectorului implică pe aceea a vectorului, astfel încât cum din punct de vedere geometric elementul structural este punctul și deci vectorul, vom considera bivectorul ca o mărime derivată din vector prin operația de produs vectorial.

Scanned with OKEN Scanner

Această operaţie are caractere algebrice care o fac aplicabilă şi altor mărimi mai complexe decât vectorii, de exemplu bivectorilor. Dacă facem abstracţie de semnificaţia geometrică a vectorilor, considerându-i ca elemente ale unei specii asupra cărora efectuăm produsul vectorial, putem pune în evidenţă aceste caractere algebrice, aşa cum au rezultat din raţionamentele făcute.

Vom numi *produs vectorial* orice operaţie asupra a două mărimi geometrice măsurabile cu trei unităţi din spaţiul afin cu trei dimensiuni, care este

1) *omogenă*,
2) *distributivă*,
3) *anticomutativă*,

şi al cărui rezultat este o mărime geometrică aparţinând unei specii măsurabile cu trei unităţi.

Cu alte cuvinte, *produsul vectorial este un produs de mărimi geometrice măsurabile cu trei unităţi, anticomutativ şi măsurabil cu trei unităţi.*

Ca şi pentru mărimile pseudo-scalare, trebue să observăm că, *din faptul că o mărime este măsurabilă cu trei unităţi, nu putem deduce că este o mărime vectorială a spaţiului cu trei dimensiuni.* Astfel, bivectorii nu sunt vectori, ceeace se poate vedea din faptul că depind de orientarea spaţiului, aceeaşi pereche de vectori $(\bar{u},\bar{v})$ definind două elemente opuse, dacă se schimbă această orientare.

Deosebirea dintre vectori şi bivectori, *esenţială din punctul de vedere al măsurii*, deci al raporturilor dintre elementele speciilor respective şi unităţile folosite, va fi pusă în evidenţă ulterior.

*§ 67. Trivectorul. Volumul orientat

Bivectorul, definit ca o mărime asociată unui paralelogram, a condus la noţiunea de arie orientată, generalizând în plan măsura unui segment de pe o dreaptă. Procedeul poate fi extins şi la spaţiu, cu scopul de a asocia unui paralelipiped o mărime geometrică analoagă.

Paralelipipedul poate fi considerat ca o figură geometrică formată fie din trei segmente $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ necoplanare, fie dintr'un paralelogram $(\overline{OA}, \overline{OB})$ şi un segment $\overline{OC}$ necoplanar cu $(\overline{OA}, \overline{OB})$ (fig. 73). In acest ultim caz, acelaşi paralelipiped poate fi considerat, în trei moduri distincte, ca format dintr'un paralelogram şi un segment.

Asociind segmentelor orientate $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ vectorii

$$\bar{u}=\overline{OA},\quad \bar{v}=\overline{OB},\quad \bar{w}=\overline{OC},$$

vom putea defini punctele aparţinând paralelipipedului prin vectorul de poziţie $\bar{r}=\overline{OM}$, exprimat prin formula

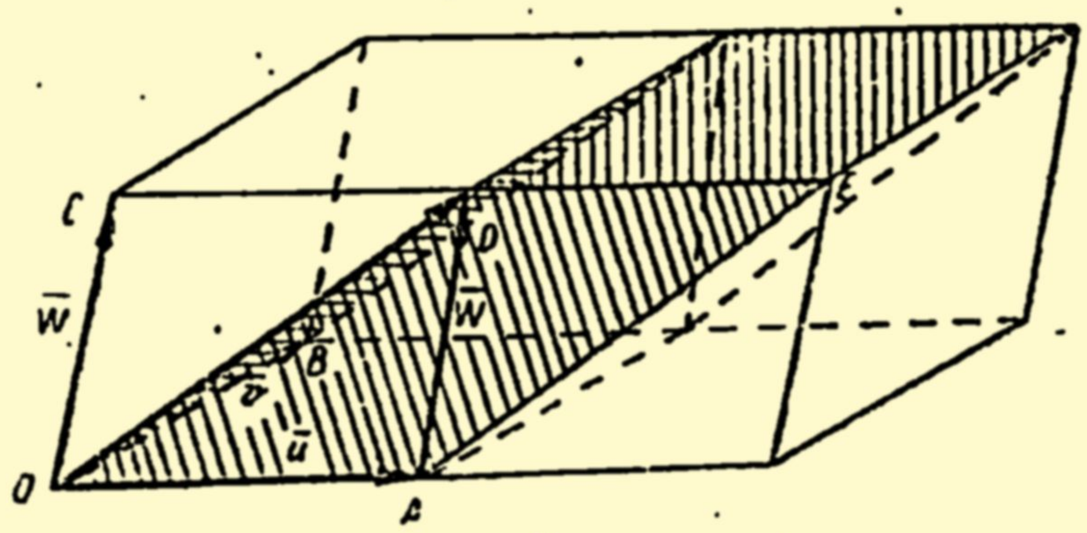


Fig. 73

$$\bar{r}=\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}, \qquad (133,II)$$

cu condiţiile

$$0\leq\alpha\leq 1;\quad 0\leq\beta\leq 1;\quad 0\leq\gamma\leq 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Când vectorii $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sunt liniar independenţi, paralelipipedul este nedegenerat.

Mulţimea tuturor paralelipipedelor definite de (133,II) pentru toţi vectorii $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, deci cuprinzând şi paralelipipedele degenerate, formează un obiect geometric $\mathcal{W}$, căruia îi vom asocia o mărime geometrică măsurabilă

$$W=(\overline{u},\overline{v},\overline{w})$$

prin procedeul utilizat în tot ce precedă, adică prin împărţirea în clase, conform cu relaţia de echivalenţă.

Evident, toate paralelipipedele, care se deduc unul din altul prin translaţie, vor aparţine aceleiaşi clase. Vom considera, însă, ca echivalente şi paralelipipedele care se obţin unul din altul prin deplasarea unui vârf dealungul uneia din muchiile paralele cu unul din ceilalţi doi vectori. Astfel, paralelipipedul $OABC$ va fi echivalent cu $OABD$. Vom scrie relaţia de echivalenţă sub forma

$$(\overline{u},\overline{v},\overline{w})=(\overline{u},\overline{v},\overline{w}+\overline{u}).$$

Deasemenea vom avea

$$(\overline{u},\overline{v},\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v},\overline{v},\overline{w})=(\overline{u}+\overline{w},\overline{v},\overline{w})=\cdots$$

Pentru uşurinţa exprimării vom nota prin $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$, cei trei vectori.

Pentru a face măsurabilă mărimea $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$, vom defini parţial adunarea prin relaţia

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3,)+(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)=2\,(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3),$$

pe care o vom extinde la orice multiplu al lui $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$, cu proprietăţile cunoscute ale adunării.

In rezumat, vom defini mărimea $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ prin condiţiile

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)\ \textit{rămâne neschimbat, când înlocuim}\ \overline{u}_i \quad \textit{prin}\ \overline{u}_i+\overline{u}_k;\ (i,k=1,2,3),\ (i\neq k); \tag{134,II}$$

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)\ \textit{devine}\ \lambda\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3),\ \textit{dacă}\ \overline{u}_i\ \textit{este amplificat prin}\ \lambda, \tag{135,II}$$

introducând în acest mod relaţia de echivalenţă şi proprietatea de omogenitate [1]).

Vom avea, de exemplu,

$$(\lambda\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)+(\mu\,\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)=(\lambda+\mu)\,(\overline{u}_1, \overline{u}_2\,\overline{u}_3) \tag{136,II}$$

pentru orice pereche de numere reale λ şi μ.

Vom numi *trivector* mărimea $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$, deoarece este obţinută printr'o operaţie asupra celor trei vectori $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$. Vom putea stabili uşor un număr de proprietăţi ale sale. Astfel: *Trivectorul* $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ *rămâne neschimbat, dacă se înlocueşte* $\overline{u}_i$ *prin* $\overline{u}_i+\lambda\overline{u}_k$; $(i\neq k)$.

Vom face demonstraţia pentru unul din vectori, de exemplu pentru $\overline{u}_1$.

---

[1]) Ca şi în cazul bivectorului, relaţia de omogenitate poate fi impusă numai lui $\overline{u}_1$, şi extinsă apoi şi celorlalţi termeni, cum am procedat anterior. (Exerciţiu).

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea:

$$\lambda(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, \lambda\bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1 + \lambda\bar{u}_2, \lambda\bar{u}_2, \bar{u}_3) = \\ = \lambda(\bar{u}_1 + \lambda\bar{u}_2, \bar{u}_2, \bar{u}_3),$$

de unde, pentru $\lambda \neq 0$,

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1 + \lambda\bar{u}_2, \bar{u}_2, \bar{u}_3). \qquad (137,II)$$

O consecinţă imediată a acestei proprietăţi este următoarea: *Trivectorul* $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ *rămâne neschimbat, dacă se adaugă unuia din termeni o combinaţie liniară a celorlalţi.*

In adevăr, vom avea:

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1 + \lambda\bar{u}_2, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1 + \lambda\bar{u}_2 + \mu\bar{u}_3, \bar{u}_2, \bar{u}_3). \qquad (138,II)$$

Din punct de vedere geometric, proprietatea revine la a spune că *trivectorul rămâne neschimbat, dacă extremitatea unuia din vectori este deplasată într'un plan paralel cu bivectorul format din ceilalţi doi.*

Proprietatea (137,II) poate fi interpretată astfel: considerând trivectorul ca format de un bivector $(\bar{u}_3, \bar{u}_1)$ şi un vector $\bar{u}_2$, el rămâne neschimbat când bivectorul este rotit în jurul unuia din vectorii săi $\bar{u}_3$, vârful celuilalt vector $\bar{u}_1$ deplasându-se paralel cu cel de al treilea vector $\bar{u}_2$.

Pentru $\lambda = 0$, relaţia de omogenitate (135,II) devine

$$(0\bar{u}_1; \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0\,(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0. \qquad (139,II)$$

Vom nota cu 0 elementul astfel obţinut. Aplicând relaţia (136,II), vom putea scrie:

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) + (0\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (1+0)(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3),$$

ceeace arată că elementul 0 joacă în adunare rolul lui zero şi va putea fi considerat ca *elementul nul al speciei.* Vom avea deci, proprietatea: *Trivectorul* $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ *este nul, dacă unul din vectori este nul.*

Dacă trivectorului nul $(0, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ îi aplicăm proprietatea de echivalenţă (138,II), vom avea

$$(0, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\lambda\bar{u}_2 + \mu\bar{u}_3, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0.$$

Prin urmare, dacă unul din vectori este o combinaţie liniară a celorlalţi, trivectorul este nul şi vom putea stabili proprietatea următoare: *Trivectorul* $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ *este nul, dacă vectorii săi sunt liniar dependenţi.*

Din relaţia de omogenitate, valabilă pentru orice λ, deducem, pentru $\lambda = -1$,

$$(-\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, -\bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2 - \bar{u}_3) = \\ = (-1)(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = -(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3). \qquad (140,II)$$

Vom numi trivectorul $-(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ opusul lui $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, deoarece suma lor este nulă:

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) + (-\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) - (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1 - \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \\ = (0, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0.$$

Permutarea a doi dintre vectori transformă trivectorul $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ *în opusul său.*

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, aplicând relațiile de echivalență și omogenitate, vom avea succesiv:

$$(\bar{u}_2,\bar{u}_1\bar{u}_3)=(\bar{u}_2-\bar{u}_1,\bar{u}_1,\bar{u}_3)=(\bar{u}_2-\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)=$$
$$=(-\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)=--(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3). \qquad (141,II)$$

Evident, proprietatea se regăsește pentru orice altă pereche de vectori $\bar{u}_i$, $\bar{u}_k$. Ea poate fi exprimată, spunând: *Trivectorul este o mărime alternată sau antisimetrică, în raport cu o pereche oarecare de vectori.*

O a doua permutare a unei perechi de vectori schimbă din nou semnul, deci reduce trivectorul la valoarea sa. Se vede deci, că ordinea în care sunt considerați vectorii este esențială. Pornind dela o anumită ordonare a muchiilor orientate ale paralelipipedului, prin permutare obținem același trivector sau opusul său, după cum executăm o permutare *pară* sau *impară.*

Paralelipipedul, astfel conceput, este orientat. Prin analogie cu orientarea introdusă de vector pe o dreaptă și de bivector în plan, *trivectorul orientează spațiul cu trei dimensiuni.*

Vom considera orice paralelipiped orientat prin asocierea trivectorului $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$ ca un element constitutiv al spațiului, ca o porțiune din spațiu. Pentru ca spațiul să fie orientat, va fi necesar să putem compara orientările a două porțiuni oarecare, deci, considerând orientarea unui anumit paralelipiped ca pozitivă, să putem determina orientarea orcărui alt paralelipiped.

In acest scop, vom observa că *orientarea unui trivector nu se schimbă prin amplificarea cu un factor pozitiv și că trivectorii egali corespund la paralelipipede cu aceeași orientare,* deoarece pot fi suprapuse prin deplasarea vârfurilor, conform cu relația de echivalență și prin eventuale amplificări cu o putere pară a lui (—1). (Exercițiu). Folosind aceste proprietății, vom putea compara orientările a două paralelipipede după stabilirea următoarelor propoziții:

Toți trivectorii sunt proporționali cu un trivector dat, nenul. In adevăr, fie $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ trei vectori liniar independenți și $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ alți trei vectori din spațiu.

Dacă $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ sunt liniar dependenți, trivectorul $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ va fi nul, deci proporțional cu $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, findcă vom pune:

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=0\,(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0.$$

Va fi suficient să demonstrăm teorema pentru $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ liniar independenți.

Să observăm că cel puțin unul dintre vectorii $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ nu se găsește în planul bivectorului $(\bar{v},\bar{w})$, deoarece $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ sunt necoplanari. Presupunând că $\bar{a}$ are această proprietate, $\bar{a},\bar{v},\bar{w}$ vor forma un triedru nedegenerat și vom putea pune, pe $\bar{u}$ sub forma:

$$\bar{u}=\alpha\bar{a}+\alpha'\bar{v}+\alpha''\bar{w},$$

cu $\alpha\neq 0$, deoarece $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ sunt liniar independenți.

Vom avea deci

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\alpha\bar{a}+\alpha'\bar{v}+\alpha''\bar{w},\bar{v},\bar{w})=\alpha(\bar{a},\bar{v},\bar{w}). \qquad (142,II)$$

Planele bivectorilor $(\bar{a},\bar{b})$ și $(\bar{a},\bar{c})$ nu pot conține ambii vectori $\bar{v}$ și $\bar{w}$, fiindcă $\bar{a},\bar{v},\bar{w}$ sunt liniar independenți. Presupunând că $(\bar{a},\bar{b})$ nu conține pe $\bar{w}$, triedrul $\bar{a},\bar{b},\bar{w}$, va fi nedegenerat și vom putea pune pe $\bar{v}$ sub forma;

$$\bar{v}=\beta'\bar{a}+\beta\bar{b}+\beta''\bar{w},$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $\beta \neq 0$, deoarece $\bar{v}, \bar{a}, \bar{w}$ sunt liniar independenţi, cum s'a presupus mai sus. Introducând valoarea lui $\bar{v}$ în (142,II), vom avea:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \alpha(\bar{a}, \beta'\bar{a} + \beta\bar{b} + \beta''\bar{w}, \bar{w}) = \alpha\beta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{w}). \qquad (143,II)$$

Cum însă triedrul $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ a fost presupus nedegenerat, vom putea pune pe $\bar{w}$ sub forma:

$$\bar{w} = \gamma'\bar{a} + \gamma''\bar{b} + \gamma\bar{c}.$$

Introducând în (143,II), vom obţine

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \alpha\beta\gamma(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), \qquad (144,II)$$

cu $\gamma \neq 0$, fiindcă $\bar{w}, \bar{a}, \bar{b}$ sunt liniar independenţi, cum s'a presupus mai sus.

In concluzie, trivectorul $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ format cu trei vectori liniar independenţi este proporţional cu trivectorul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, factorii α, β, γ fiind toţi diferiţi de zero.

O consecinţă importantă a acestei teoreme este următoarea: *Dacă un singur trivector, format cu trei vectori liniar independenţi, este nenul, atunci toţi trivectorii formaţi cu vectori liniar independenţi sunt diferiţi de zero.*

In adevăr, dacă în (144,II) punem ipoteza $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$ şi ţinem seama că $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$, vom avea şi $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \neq 0$.

Dimpotivă, dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, atunci orice trivector este nul, deoarece trivectorii formaţi cu vectori liniar dependenţi sunt în orice caz nuli.

Pentru ca specia trivectorilor să conţină cel puţin un element nenul, vom admite că $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$ şi vom deduce următoarea propoziţie: *Condiţia necesară şi suficientă ca un trivector să fie nul este ca vectorii săi să fie liniar dependenţi.*

In adevăr, condiţia este suficientă, cum s'a demonstrat anterior. Ea este, însă, şi necesară, deoarece cu ipoteza $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$, orice trivector $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \neq 0$, dacă vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sunt liniar independenţi.

Trivectorii nuli vor fi numiţi *degeneraţi*, deoarece corespund unor triedre degenerate.

Factorul $\alpha\beta\gamma$ reprezintă *măsura* lui $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ prin $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, iar α, β, γ măsurile muchiilor trivectorului egal cu $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, ai cărui vectori au direcţiile $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, considerând $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ca unităţi pe aceste direcţii.

Din relaţia (144,II) rezultă deasemenea că toţi trivectorii pot fi măsuraţi cu o singură unitate $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Tot această relaţie ne permite să definim *suma a doi trivectori* oarecare. Punând:

$$(\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1) = \lambda_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}); \quad (\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2) = \lambda_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}),$$

operaţia

$$\lambda_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + \lambda_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

este posibilă şi are ca rezultat tot un trivector. Inlocuind în primul membru trivectorii prin egalii lor, vom putea defini suma

$$(\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1) + (\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}),$$

Scanned with OKEN Scanner

ca o consecinţă a proprietăţilor egalităţii. In consecinţă, avem propoziţia: *Mulţimea trivectorilor formează o specie măsurabilă cu o singură unitate.*

In adevăr, suma a doi trivectori este un trivector şi toţi trivectorii sunt măsurabili cu o singură unitate.

Vom putea pune în evidenţă acum proprietatea fundamentală a trivectorului de a fi o funcţie liniară de vectorii de care depinde, demonstrând relaţia:

$$(\bar{u}_1+\bar{u}_2,\ \bar{v},\ \bar{w})=(\bar{u}_1,\ \bar{v},\ \bar{w})+(\bar{u}_2,\ \bar{v},\ \bar{w}). \qquad (145,\text{II})$$

Dacă $\bar{v}$, $\bar{w}$ sunt liniar dependenţi, toţi trivectorii din ambii membri sunt nuli şi relaţia este verificată. Deasemenea, dacă $\bar{u}_1$, $\bar{v}$, w, pe de o parte, şi $\bar{u}_2$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, pe de altă parte, sunt liniar dependenţi, toţi trivectorii din (145,II) sunt nuli şi relaţia este din nou verificată.

Vom presupune deci că $\bar{u}_1$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ (sau $\bar{u}_2$, $\bar{v}$, $\bar{w}$) sunt liniar independenţi. Vom putea scrie atunci

$$\bar{u}_2=\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}$$

şi deci

$$\begin{aligned}(\bar{u}_1+\bar{u}_2,\ \bar{v},\ \bar{w})&=(\bar{u}_1+\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w},\ \bar{v},\ \bar{w})=\\&=(\alpha+1)\,(\bar{u}_1,\ \bar{v},\ \bar{w})=\alpha\,(\bar{u}_1,\ \bar{v},\ \bar{w})+(\bar{u}_1,\ \bar{v},\ \bar{w})=\\&=(\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w},\ \bar{v},\ \bar{w})+(\bar{u}_1,\ \bar{v},\ \bar{w})=\\&=(\bar{u}_1,\ \bar{v},\ \bar{w})+(\bar{u}_2,\ \bar{v},\ \bar{w}),\end{aligned}$$

ceeace demonstrează relaţia (145,II) şi arată că *trivectorul este o funcţie liniară de vectorii săi,* mai precis o *funcţie triliniară de vectori.*

Revenind la orientarea spaţiului, vom considera spaţiul ca orientat, dacă vom putea cunoaşte orientarea oricărui triedru $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Relaţia (144,II) arată că dacă măsura $\alpha\beta\gamma$ a trivectorului $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ în raport cu $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ este pozitivă, prin operaţii care nu schimbă orientarea, putem face ca aceste două triedre să aibă laturile de aceeaşi direcţie şi de aceeaşi orientare. Prin urmare, dacă măsura lui $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ este pozitivă, el va avea aceeaşi orientare ca şi trivectorul unitate $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Invers, dacă $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ şi $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ au aceeaşi orientare, deci, dacă prin operaţiile care nu schimbă orientarea, putem face să coincidă direcţiile şi sensurile muchiilor lor, măsura $\alpha\beta\gamma$ va fi un produs de trei factori pozitivi, deci $\alpha\beta\gamma>0$. Vom putea enunţa proprietatea următoare: *Condiţia necesară şi suficientă ca orientarea trivectorului* $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ *să fie aceeaşi cu a trivectorului-unitate, este ca măsura sa prin* $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ *să fie pozitivă.*

Toţi trivectorii, ale căror măsuri sunt de acelaşi semn, vor avea aceeaşi orientare.

Spaţiul poate fi orientat printr'un singur trivector, ales ca unitate. Ori, acestuia i se poate atribui o orientare pozitivă sau negativă, deoarece cu aceiaşi trei vectori $\bar{a}$, b, $\bar{c}$ se pot forma doi trivectori opuşi. Alegerea unuia ca pozitiv este determinată de fenomene fizice al căror sens de evoluţie este legat de unul sau celălalt trivector. Este suficient să reamintim discuţia relativă la sensul şurubului la stânga sau la dreapta (§ 51).

Prin schimbarea orientării trivectorului fundamental, toţi trivectorii îşi schimbă orientarea.

Scanned with OKEN Scanner

In general, schimbarea sistemului de referinţă al spaţiului, având ca efect schimbarea trivectorului fundamental, care se amplifică printr'un factor λ, astfel încât

$$(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c})=\lambda\,(\bar{a}_1,\ \bar{b}_1,\ \bar{c}_1),$$

toate măsurile se vor amplifica prin acelaşi factor λ, de unde se obţine propoziţia următoare: *Trivectorii sunt mărimi pseudo-scalare, orientarea lor depinde de orientarea dată spaţiului şi se schimbă odată cu aceasta.*

Vom considera trivectorul ca *volumul orientat al paralelipipedului*, cu observaţia că *volumul orientat nu este un număr, ci o mărime geometrică*, având ca măsură un număr real, a cărui valoare depinde de unitatea aleasă pentru măsura speciei[1]).

Asupra volumului neorientat se pot face aceleaşi consideraţii ca asupra arici neorientate. (Exerciţii).

Atât volumul orientat, cât şi volumul neorientat sunt mărimi geometrice asociate unui obiect geometric, respectiv paralelipipedului în spaţiul afin.

*§ 68. Produsul mixt

Proprietatea de triliniaritate sau de *aditivitate* (145,II) a trivectorului atrage atenţia asupra *operaţiei* prin care se obţine această mărime din cei trei vectori $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$. Această operaţie are proprietăţile produselor de mărimi geometrice impuse prin definiţia (80,II), şi anume: măsurabilitate, omogenitate, distributivitate şi prin urmare, este un *produs de trei vectori contravarianţi.*

O proprietate specială a acestui produs este alternanţa sa în raport cu fiecare pereche de factori $\bar{u}_i$, $\bar{u}_k$, prin care se apropie de produsul vectorial.

In acelaşi timp, paralelipipedul orientat putând fi considerat ca o figură generată de un segment orientat şi de un paralelogram orientat, cărora li se asociază un vector $\bar{u}_i$ şi un bivector $(\bar{u}_j,\ \bar{u}_k)$, trivectorul poate fi conceput ca o mărime funcţie de un vector şi de un bivector, ambii contravarianţi şi exprimat sub forma:

$$(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3)=[\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3] \qquad (146,II)$$

pentru a pune în evidenţă factorii[2]).

Folosind proprietatea de alternanţă, vom avea

$$(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3)=-(\bar{u}_2\bar{u}_1\bar{u}_3)=(\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_1),$$

deci, cu notaţia adoptată:

$$[\bar{u}_1,(\bar{u}_2,\ \bar{u}_3)]=[(\bar{u}_2,\ \bar{u}_3),\bar{u}_1]. \qquad (147,II)$$

---

[1]) A se compara cu *Schreier-Sperner*: Analytische Geometrie, vol. I. Berlin, 1931 pp. 63—74, pentru definiţia volumelor şi determinanţilor pe cale axiomatică.

[2]) Pentru uşurinţa exprimării nu vom specifica în general caracterul contravariant al factorilor, nici al trivectorului. Atragem atenţia însă că putem defini atât bivectori cât şi trivectori covarianţi ca produse de vectori covarianţi.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, operaţia $[\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)]$, aplicată unui vector şi unui bivector, este *comutativă* şi defineşte o mărime pseudo-scalară. *Este ea un produs al celor doi factori?* Este uşor de răspuns la această întrebare punând în evidenţă distributivitatea operaţiei (146,II). Să calculăm mărimea:

$$\{\bar{u}_1, [(\bar{u}_2, \bar{u}_3)+(\bar{v}_2, \bar{v}_3)]\}.$$

Dacă bivectorii $(\bar{u}_2, \bar{u}_3)$ şi $(\bar{v}_2, \bar{v}_3)$ sunt liniar dependenţi, deci coplanari, vom putea pune

$$(\bar{v}_2, \bar{v}_3) = \alpha (\bar{u}_2, \bar{u}_3)$$

şi vom avea

$$\{\bar{u}_1, [(\bar{u}_2, \bar{u}_3)+(\bar{v}_2, \bar{v}_3)]\} = [\bar{u}_1, (\alpha+1)(\bar{u}_2, \bar{u}_3)] = (\alpha+1)[\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] =$$
$$= [\bar{u}_1 (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] + \alpha [\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] = [\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] + [\bar{u}_1, (\bar{v}_2, \bar{v}_3)],$$

pe baza proprietăţilor trivectorului; deci operaţia (146,II) este distributivă în acest caz particular.

Dacă bivectorii $(\bar{u}_2, \bar{u}_3)$ şi $(\bar{v}_2, \bar{v}_3)$ sunt liniar independenţi, ei determină un fascicol de bivectori, având ca vector comun τ (situat pe muchia diedrului format de cei doi bivectori). Vom putea deci scrie

$$(\bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{\tau}, \bar{u}); \quad (\bar{v}_2, \bar{v}_3) = (\bar{\tau}, \bar{v}),$$

unde $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt convenabil aleşi şi vom avea

$$(\bar{u}_2, \bar{u}_3)+(\bar{v}_2, \bar{v}_3) = (\bar{\tau}, \bar{u}+\bar{v}).$$

Revenind la trivectorul iniţial, vom scrie succesiv:

$$\{\bar{u}_1, [(\bar{u}_2, \bar{u}_3)+(\bar{v}_2, \bar{v}_3)]\} = [\bar{u}_1, (\bar{\tau}, \bar{u}+\bar{v})] =$$
$$= (\bar{u}_1, \bar{\tau}, \bar{u}+\bar{v}) = (\bar{u}_1, \bar{\tau}, \bar{u}) + (\bar{u}_1, \bar{\tau}, \bar{v})$$

folosind distributivitatea produsului de trei vectori, dovedită anterior.

Cum însă:

$$(\bar{u}_1, \bar{\tau}, \bar{u}) + (\bar{u}_1, \bar{\tau}, \bar{v}) = [\bar{u}_1, (\bar{\tau}, \bar{u})] + [\bar{u}_1, (\bar{\tau}, \bar{v})] =$$
$$= [\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] + [\bar{u}_1, (\bar{v}_2, \bar{v}_3)],$$

ţinând seama de (148,II), vom avea relaţia

$$\{\bar{u}_1, [(\bar{u}_2', \bar{u}_3)+(\bar{v}_2, \bar{v}_3)]\} = [\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] + [\bar{u}_1, (\bar{v}_2, \bar{v}_3)], \qquad (149,II)$$

care *demonstrează distributivitatea operaţiei* $[\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)]$.

Ţinând seama de distributivitatea produsului vectorial, se deduce imediat şi distributivitatea în raport cu primul factor $\bar{u}_1$.

Trivectorul poate fi deci considerat ca rezultatul unei operaţii asupra unui vector $\bar{u}$, şi un bivector $(\bar{u}_2, \bar{u}_3)$ care are toate proprietăţile unui produs de doi factori şi în plus comutativitatea exprimată (147,II).

Prin urmare, *această operaţie este un produs scalar*, care determină o mărime pseudo-scalară.

Acest produs se numeşte *produs mixt*, denumirea fiind sugerată de faptul că el este rezultanta a două operaţii — prima, un produs vectorial pentru

Scanned with OKEN Scanner

obţinerea bivectorului şi a doua, produsul scalar al acestuia cu al treilea vector.

Este important de subliniat faptul *cu produsul mixt al celor trei vectori* $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ *nu reprezintă o operaţie nouă,* ci compunerea celor două produse definite anterior: scalar şi vectorial.

Deasemenea, este de observat că produsul mixt poate fi considerat în trei moduri deosebite ca produs scalar de vectori cu bivectori, folosind în acest scop acele combinaţii, care rezultă prin permutările pare ale indicilor 1, 2, 3. Vom avea deci

$$[\bar{u}_1, (\bar{u}_2, \bar{u}_3)] = [\bar{u}_2, (\bar{u}_3, \bar{u}_1)] = [\bar{u}_3, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)],$$

ceeace corespunde, în geometria elementară, faptului că orice faţă a paralelipipedului poate fi aleasă ca bază în calculul volumului.

Regăsim astfel, pe cale pur algebrică, proprietăţile produsului mixt, dovedite geometric intuitiv în § 52. Folosind semnele celor două operaţii, vom putea scrie

$$\bar{u}_1 \cdot (\bar{u}_2 \times \bar{u}_3) = \bar{u}_2 \cdot (\bar{u}_3 \times \bar{u}_1) = \bar{u}_3 \cdot (\bar{u}_1 \times \bar{u}_2)$$

şi ţinând seama de (147,II)

$$\bar{u}_1 \cdot (\bar{u}_2 \times \bar{u}_3) = (\bar{u}_2 \times \bar{u}_3) \cdot \bar{u}_1 = (\bar{u}_3 \times \bar{u}_1) \cdot \bar{u}_2 = (\bar{u}_1 \times \bar{u}_2) \cdot \bar{u}_3.$$

Egalitatea primului membru cu ultimul exprimă faptul că putem permuta cele două semne de operaţii. Aceasta conduce la complecta lor suprimare în expresia produsului mixt, care se scrie

$$(\bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3.$$

Produsul mixt este un exemplu de produs scalar de mărimi geometrice, conform cu definiţia dată în § 61.

*§ 69. Produse exterioare. Multivectori

Produsul vectorial şi produsul mixt, considerate ca operaţii efectuate asupra vectorilor, au aceleaşi proprietăţi: omogenitate, distributivitate şi alternanţă în fiecare pereche de vectori. Prin urmare, pot fi caracterizate din punct de vedere operaţional algebric ca produse alternate de vectori.

Vom numi *produs exterior* orice produs de mai mulţi vectori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ de aceeaşi specie (contravarianţi sau covarianţi) alternat în fiecare pereche de factori $\bar{u}_i$, $\bar{u}_j$.

Se poate da acestui produs şi denumirea de *produs alternat*, care scoate în evidenţă caracterul său special, dar prima denumire dată de *Grassmann* are localitatea de a apropia această noţiune de aceea de *formă exterioară,* introdusă de *Cartan*[1]), de care este strâns legată.

Numărul p al factorilor va fi numit *gradul* produsului exterior, care va fi notat în calculul cu aceste produse prin

$$[\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p]. \qquad (150,II)$$

[1]) *E. Cartan,* Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, 1945.

Scanned with OKEN Scanner

Produsul de doi factori $[\bar{u}_1\ \bar{u}_2]$, cu proprietatea

$$[\bar{u}_1\ \bar{u}_2]=-[\bar{u}_2\,\bar{u}_1]$$

este produsul vectorial şi exprimă mărimea numită bivector.

Produsul de trei factori, deci de gradul trei, cu proprietăţile

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]=-[\bar{u}_2\bar{u}_1\bar{u}_3]=\text{etc.},$$

este produsul mixt şi exprimă mărimea numită trivector.

In general, un produs de p factori exprimă o mărime numită *p-vector* sau *multivector*.

Noţiunea de produs exterior poate fi extinsă la *un spaţiu cu n dimensiuni* şi caracterizează în acest spaţiu multivectorii.

In spaţiul cu trei dimensiuni gradul cel mai înalt al unui p-vector este trei: orice p-vector de gradul $p>3$ este nul.

Vom face demonstraţia pentru $p=4$, extensiunea la cazul general fiind imediată. Fie $[\bar{u}_1\,\bar{u}_2\,\bar{u}_3\,\bar{u}_4]$ un produs exterior de gradul 4. Patru vectori din spaţiul cu trei dimensiuni sunt totdeauna liniar dependenţi; vom putea pune

$$\bar{u}_4=\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{u}_2+\gamma\bar{u}_3$$

şi deci

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4]=[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3,\ \alpha\bar{u}_1+\beta\bar{u}_2+\gamma\bar{u}_3]=$$

$$=\alpha[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_1]=\beta[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_2]+\gamma[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_3].$$

Fiecare din aceste produse, având doi factori egali, este nul datorită proprietăţii de alternanţă. Vom avea de exemplu, permutând in primul termen $\bar{u}_1$ cu $\bar{u}_1$.

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_1]=-[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_1]=0.$$

Se vede deci că gradul maxim al unui p-vector este egal cu numărul de dimensiuni ale spaţiului în care se găseşte. Astfel, orice trivector din spaţiul cu două dimensiuni este nul, ceeace corespunde cu semnificaţia sa geometrică de mărime asociată unui paralelipiped degenerat.

Analogia algebrică între proprietăţile p-vectorilor dintr'un spaţiu cu $n\geqslant p$ dimensiuni şi cele ale bi- şi trivectorilor din spaţiul cu trei dimensiuni conduce la considerarea p-vectorilor ca *mărimi ce măsoară întinderea unui element cu p dimensiuni din spaţiul cu n dimensiuni*, generalizând aria şi volumul orientat.

Aplicaţia 1. *Asociativitatea produselor exterioare.* Am văzut că produsul mixt $\bar{u}_1(\bar{u}_2\times\bar{u}_3)$ este un produs exterior al celor trei vectori, iar $\bar{u}_2\times\bar{u}_3$ este deasemenea un produs exterior. Vom putea deci scrie

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]=[u_1\,[\bar{u}_2\bar{u}_3]]=[[\bar{u}_1\bar{u}_2]\,\bar{u}_3]=[\bar{u}_2[\bar{u}_3\bar{u}_1]=\text{etc.},$$

operaţiile dintre factorii $\bar{u}_1$ şi $[\bar{u}_2\bar{u}_3]$ fiind definite prin produsul mixt.

Prin urmare, produsul exterior de gradul trei este asociativ, în virtutea proprietăţilor trivectorului. Proprietatea se extinde la orice produs exterior, fără a preciza deocamdată operaţiile care au loc între diverşii factori în care se descompune produsul exterior dat. Vom avea, de exemplu, în spaţiul cu $n>3$ dimensiuni

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4]=[[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]\,\bar{u}_4]=[[\bar{u}_1\bar{u}_2]\,[\bar{u}_3\bar{u}_4]]\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, se pot verifica pe oricare din aceste produse proprietățile primului. De exemplu:

$$[[\bar{u}_1 + \bar{v}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3]\,\bar{u}_4] = [[[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3] + [\bar{v}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]]\,\bar{u}_4] = [[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]\,\bar{u}_4] + [[\bar{v}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]\,\bar{u}_4]$$

ca o consecință a distributivității produsului exterior; deasemenea

$$[\bar{u}_1 + \bar{v}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3,\ \bar{u}_4] = [\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4] + [\bar{v}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4].$$

Prin urmare, orice produs exterior poate fi considerat ca format din factori, care sunt ei înșiși produse exterioare.

Aplicația 2. *Produs exterior de produse exterioare.* Din asociativitatea produsului exterior rezultă posibilitatea de a considera *operația de produs exterior a două produse exterioare* ca o operație ce definește un produs exterior egal cu produsul tuturor vectorilor celor doi factori în ordinea scrierii.

Vom avea, de exemplu

$$[[\bar{u}_1\bar{u}_2]\,[\bar{u}_3\bar{u}_4]] = [\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4].$$

Pentru ca operația să fie un produs în sensul definiției generale, ea trebue să se bucure de proprietatea de distributivitate. *Aceasta nu mai este o consecință a distributivității produsului exterior de vectori în spațiile cu $n > 3$ dimensiuni.*

Vom impune relația

$$[[\bar{u}_1\bar{u}_2] + [\bar{v}_1\bar{v}_2]]\,[\bar{u}_3\bar{u}_4] = [\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4] + [\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{u}_3\bar{u}_4].$$

Se poate dovedi că *suma*

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2] + [\bar{v}_1\bar{v}_2]$$

a doi bivectori în spațiul cu $n > 3$ dimensiuni nu este un bivector în cazul general, spre deosebire de spațiul cu 3 dimensiuni, în care bivectorii formează o specie-măsurabilă.

Produsul exterior a două produse exterioare poate fi comutativ sau anticomutativ. De exemplu:

$$[\bar{u}_1\bar{u}_2]\,[\bar{u}_3\bar{u}_4] = [\bar{u}_3\bar{u}_4]\,[\bar{u}_1\bar{u}_2] = [\bar{u}_3\bar{u}_4\bar{u}_1\bar{u}_2];$$

$$[[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]\,\bar{u}_4] = -[\bar{u}_4\,[\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3]] = -[\bar{u}_4\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3].$$

Se poate demonstra că *produsul este anticomutativ, dacă factorii săi sunt produse exterioare de grade impare și comutativ în toate celelalte cazuri.* (Exercițiu).

Proprietățile fundamentale ale produselor exterioare și ale p-vectorilor conduc la introducerea formelor exterioare ale lui *Cartan,* care capătă astfel semnificația de mărimi geometrice ale spațiului cu n dimensiuni. *Multivectorii și produsele exterioare* au fost introduse de Grassmann, care a pus bazele calculului cu mărimi geometrice [1]).

Aplicația 3. *Forme exterioare de vectori.* Fiind dați trei vectori contravarianți $\bar{u}_i$, $\bar{u}_j$, $\bar{u}_k$, expresia

$$\alpha^1\bar{u}_1 + \alpha^2\bar{u}_2 + \alpha^3\bar{u}_3,$$

unde α^1, α^2, α^3 sunt trei parametri numerici, este o *formă liniară de vectori contravarianți* și reprezintă un vector contravariant.

Expresia

$$\alpha^{12}[\bar{u}_1\bar{u}_2] + \alpha^{23}[\bar{u}_2\bar{u}_3] + \alpha^{31}[\bar{u}_3\bar{u}_1]$$

este o *formă exterioară pătratică de vectori contravarianți.* Ea poate fi pusă sub forma:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,j}\alpha^{ij}[\bar{u}_i\bar{u}_j];\quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \qquad (151,\text{II})$$

[1]) Indicații asupra calculelor cu p-vectori cu ajutorul componentelor se găsesc, de exemplu, în *J. A. Schouten,* Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, p. 17.

Scanned with OKEN Scanner

coeficienţii α^{ij} fiind antisimetrici

$$\alpha^{ij} = -\alpha^{ji}$$

şi reprezintă un bivector în spaţiul cu trei dimensiuni.

Deasemenea expresia

$$\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\alpha^{ijk}\,[\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k]\,;\quad (i,j,k=1,2,3) \qquad (152,II)$$

este o *formă exterioară cubică de vectori contravarianţi*, coeficienţii α^{ijk} fiind antisimetrici în fiecare pereche de indici

$$\alpha^{ijk}=-\alpha^{jik}=\alpha^{jki}=-\alpha^{kji}=\alpha^{kij}=-\alpha^{ikj}.$$

Coeficienţii cu doi indici egali sunt nuli. O astfel de formă reprezintă un trivector.

In spaţiul cu trei dimensiuni formele de grad mai mare decât trei sunt identic nule, fiindcă orice produs exterior cu mai mult decât trei factori este nul.

Suma a două forme de acelaşi grad este o formă exterioară, ai cărei coeficienţi sunt suma coeficienţilor celor două forme.

Produsul a două forme exterioare este o formă având ca grad suma gradelor celor doi factori. Vom avea, de exemplu:

$$\left[\sum_i \alpha^i\bar{u}_i\right]\left[\sum_{j,k} b^{jk}\,[\bar{u}_j\bar{u}_k]\right]=\sum_{i,j,k} a^i b^{jk}\,[\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k]$$

ţinând seama de distributivitatea produselor exterioare. Ordinea factorilor nu poate fi schimbată, deoarece sunt produse exterioare, iar coeficienţii nu sunt antisimetrici în cei trei indici.

Prin permutarea indicilor, coeficienţii pot fi făcuţi antisimetrici şi vom avea:

$$\sum_{i,j,k} a^i b^{jk}\,[\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k]=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}(a^ib^{jk}-a^jb^{ik}+a^jb^{ki}-a^kb^{ji}+a^kb^{ij}-a^ib^{kj})\,[\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k]\ldots$$

(Exerciţii)

După denumirea dată de Cartan, o formă exterioară de vectori este *monomă*, dacă poate fi pusă sub forma unui produs exterior de forme liniare.

In spaţiul cu trei dimensiuni orice formă exterioară de vectori este monomă. Demonstraţia este o consecinţă imediată a faptului că suma a p vectori este un vector, suma a p bivectori este un bivector, iar suma a p trivectori este un trivector în spaţiul cu trei dimensiuni.

In spaţiile cu $n > 3$ dimensiuni această teoremă nu mai este valabilă în general, astfel încât *p-vectorii, definiţi ca produse exterioare, nu mai constitue specii măsurabile.*

Importanţa noţiunii de formă exterioară de vectori este pusă în evidenţă prin aceea că *mulţimea tuturor formelor exterioare de un anumit grad constitue o specie măsurabilă.*

In acelaşi timp, apare clar caracterul simplu al structurii spaţiului cu trei dimensiuni, precum şi al subspaţiilor sale liniare, planul şi dreapta, în care orice formă exterioară de vectori se reduce la o formă monomă, deci la un produs exterior.

Această proprietate explică şi analogia formală dintre operaţiile cu vectori şi bivectori în spaţiul cu trei dimensiuni, care este la baza Calculului vectorial şi care conduce la asimilarea bivectorilor cu vectorii, precum şi a trivectorilor cu scalarii.

* §70. Bivectori şi vectori covarianţi. Isomorfism

După cum am subliniat dela început, produsele de mărimi geometrice s'au introdus în geometria metrică pentru a se reprezenta mărimi fizice şi geometrice, ca lucrul mecanic, cuplul, momentul unei forţe, unghiul a două

Scanned with OKEN Scanner

direcţii, aria sau volumul, etc. Nevoia de a se opera cu mărimi cât mai simple a condus la reprezentarea produsului vectorial şi a vectorului covariant printr'un vector normal, fără a se ţine seama de faptul că aceste mărimi sunt asociate unor obiecte geometrice diferite şi că sunt de naturi diferite.

Cum această deosebire de natură, apare în spaţiul afin, se *pune întrebarea dacă reprezentarea vectorială a mărimilor este proprie numai spaţiului metric, sau dacă poate fi extinsă în mod convenabil şi la spaţiul afin.* Pentru a putea da un răspuns afirmativ nu este suficient să asociem fiecărui bivector un vector, de exemplu contravariant, ci trebue ca sumei a doi bivectori să-i corespundă suma vectorilor asociaţi, iar produsului printr'un număr produsul respectiv, cu alte cuvinte să stabilim *un isomorfism între cele două specii.*

In cele ce urmează vom arăta că *oricărui bivector i se poate asocia un vector covariant, şi reciproc, astfel încât să stabilim un isomorfism între speciile bivectorilor şi vectorilcr covarianţi, cu ajutorul unui trivector dat.*

Presupunând spaţiul orientat, fie $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ un trivector dat şi având o orientare determinată, de exemplu pozitivă.

Fiind dat un bivector oarecare $(\bar{u}, \bar{v})$, există o infinitate de vectori $\bar{w}$, astfel încât

$$(\bar{u}\bar{v}\bar{w}) = (\bar{p}\bar{q}\bar{r}).$$

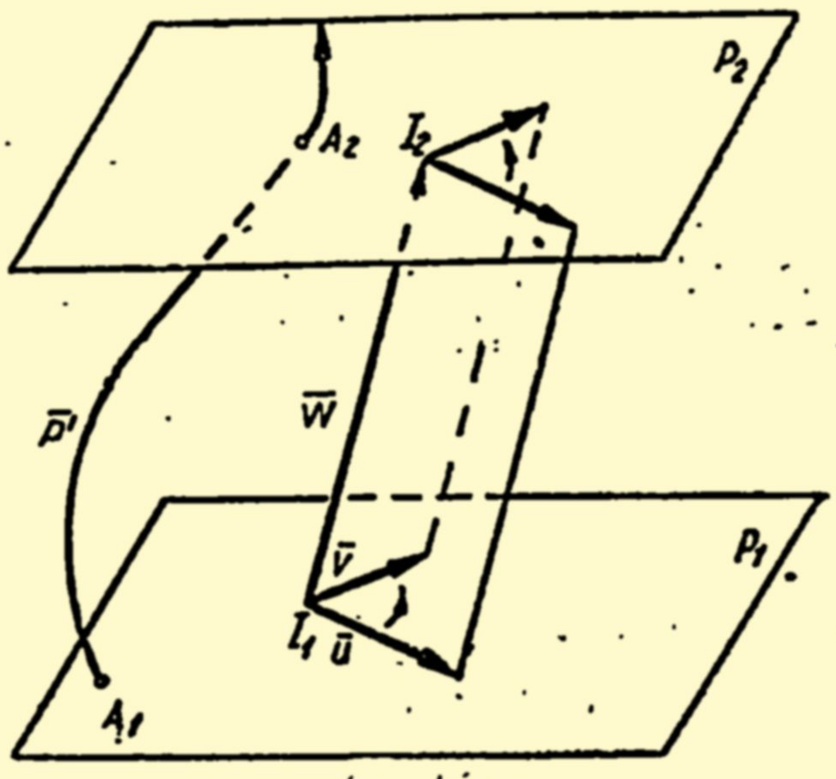


Fig. 74

Presupunând bivectorul $(\bar{u}, \bar{v})$ reprezentat într'un plan P_1 prin doi vectori $\bar{u}, \bar{v}$ cu originea într'un punct I_1, locul extremităţii I_2 a lui $\bar{w} = \overline{I_1 I_2}$ este un plan P_2, paralel cu P_1 (fig. 74).

Perechea de plane P_1, P_2 determină un vector covariant $\bar{P}'$ unic, asociat bivectorului $(\bar{u}, \bar{v})$.

Asocierea făcută este independentă de orientarea spaţiului. In adevăr, o schimbare de orientare a spaţiului face ca perechii orientate de vectori $(\bar{u}, \bar{v})$ să-i corespundă faţa opusă a planului P_1. In acelaşi timp, trivectorul $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ devine negativ, deci pentru a determina planul P_2, va trebui să construim un trivector $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ cu orientare negativă, ceeace conduce la acelaşi $\bar{w}$ şi deci, la acelaşi plan P_2 (fig. 74).

Procedeul folosit poate fi descris astfel:

Fiind dat un trivector $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, oricărui bivector $(\bar{u}, \bar{v})$, i se asociază în mod unic un vector covariant $\bar{P}'$ reprezentabil prin două plane P_1, P_2 astfel încât planul iniţial P_1 să fie planul $(\bar{u}, \bar{v})$, planul final P_2 fiind planul paralel cu P_1, dus prin extremitatea I_2 a vectorului $\overline{I_1 I_2} = \bar{w}$, astfel încât trivectorul $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$ să fie egal cu $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$.

Unui bivector nul i se asociază un vector covariant nul, deci având planul final P_2 la infinit, iar la doi bivectori opuşi se asociază doi vectori covarianţi opuşi. Vom dovedi următoarea propoziţie: *Vectorul covariant asociat sumei a doi bivectori este suma vectorilor covarianţi, asociaţi celor doi bivectori daţi.*

Scanned with OKEN Scanner

Considerând cazul bivectorilor liniar independenţi, fie $(\bar{u}, \bar{\tau})$ şi $(\bar{v}, \bar{\tau})$ doi bivectori egali cu cei daţi şi având un vector comun $\bar{\tau}$, situat pe dreapta de intersecţie a două plane P_1 şi Q_1 care conţin cei doi bivectori (fig. 75). Fie $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ un trivector pozitiv şi $\bar{w}, \bar{z}$ doi vectori, astfel ca

$$(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{w}) = (\bar{v}, \bar{\tau}, \bar{z}) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}).$$

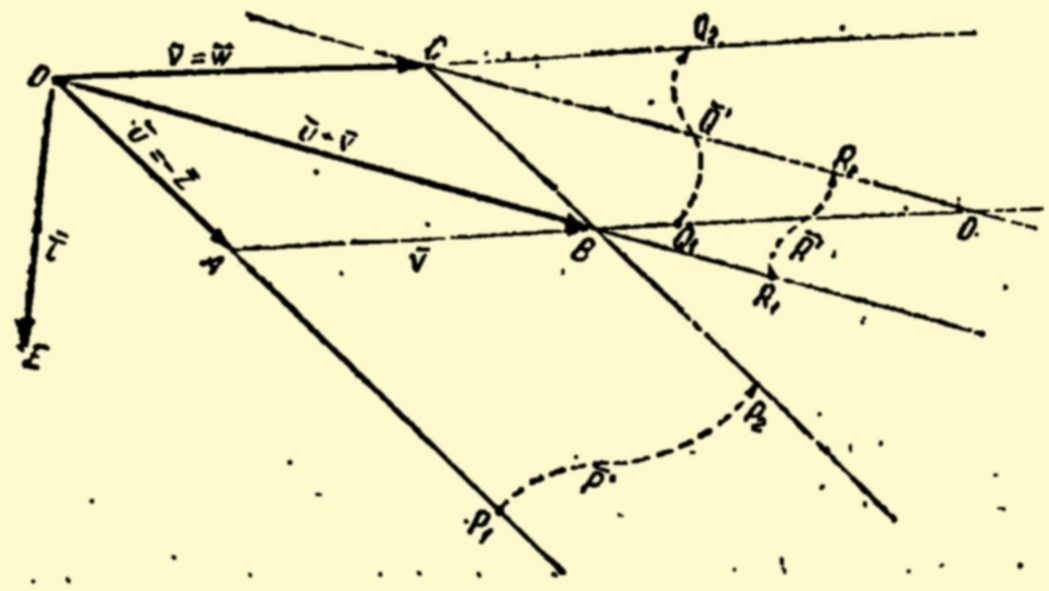


Fig. 75

Prin aceasta, se asociază celor doi bivectori vectorii covarianţi

$$\bar{P}' = (P_1, P_2); \quad \bar{Q}' = (Q_1, Q_2).$$

Cum

$$(\bar{u}\bar{\tau}\bar{v}) = (\bar{v}, \bar{\tau}, -\bar{u}),$$

vom putea alege vectorii $\bar{w}$ şi $\bar{z}$, respectiv proporţionali cu $\bar{v}$ şi $-\bar{u}$:

$$\bar{w} = \frac{1}{\lambda}\bar{v}; \quad \bar{z} = -\frac{1}{\lambda}\bar{u},$$

factorul λ fiind măsura comună a trivectorilor egali $(\bar{u}\bar{\tau}\bar{v})$ şi $(\bar{v}, \bar{\tau}, -\bar{u})$, în raport cu unitatea $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, deoarece vom avea

$$\left(\bar{u}, \bar{\tau}, \frac{1}{\lambda}\bar{v}\right) = \left(\bar{v}, \bar{\tau}, -\frac{1}{\lambda}\bar{u}\right) = (\bar{p}\bar{q}\bar{r}).$$

Luând pentru simplificare $\lambda = 1$ (în fig. 75), bivectorului $(\bar{u}, \bar{\tau})$ i se asociază vectorul covariant $\bar{P}'$ reprezentat de planele P_1 şi P_2 ce trec prin $\overline{OA}$ şi $\overline{CB}$, cu $\overline{OC} = \bar{w} = \bar{v}$, iar bivectorului $(\bar{v}, \bar{\tau})$, vectorul covariant $\bar{Q}'$ reprezentat de planele Q_1 şi Q_2 ce trec prin $\overline{AB}$ şi $\overline{OC}$, cu $\overline{AO} = \bar{z} = -\bar{u}$.

Pe de altă parte trivectorul format de

$$\overline{OB} = \bar{u} + \bar{v}; \quad \overline{OE} = \bar{\tau}; \quad \overline{OC} = \bar{v}$$

este egal cu $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ când $\lambda = 1$, fiindcă

$$(\bar{u} + \bar{v}, \bar{\tau}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{v}) = (\bar{p}\bar{q}\bar{r}),$$

deci bivectorului $(\bar{u} + \bar{v}, \bar{\tau})$ i se asociază vectorul covariant $\bar{R}' = (R_1, R_2)$, planele R_1 şi R_2 trecând respectiv prin $\overline{OB} = \bar{u} + \bar{v}$ şi $\overline{CD} = \bar{u} + \bar{v}$ cu $\overline{OC} = \bar{v}$.

Insă

$$\bar{R}' = \bar{P}' + \bar{Q}',$$

conform cu regula de adunare a vectorilor covarianţi reprezentaţi prin biplane, ceeace demonstrează propoziţia enunţată.

Cazul bivectorilor liniar dependenţi se rezolvă imediat. Dacă bivectorului $(\bar{u}, \bar{v})$ i se asociază vectorul covariant $\bar{P}'$ cu ajutorul trivectorului

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}),$$

Scanned with OKEN Scanner

bivectorului $\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ i se va asocia un vector covariant $\bar{Q}'$, astfel încât:

$$\lambda(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z}) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}),$$

de unde

$$\bar{z} = \frac{1}{\lambda}\bar{w}.$$

Măsura lui $\bar{Q}'$ pe direcţia $\bar{z}$ fiind $\frac{1}{\lambda}\bar{w}$, vom avea

$$\bar{Q}' = \lambda \bar{P}',$$

deci bivectorului $\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ i se asociază vectorul covariant $\lambda \bar{P}'$.

Aceasta complectează şi demonstraţia cazului bivectorilor liniar independenţi, pentru $\lambda \neq 1$, arătând că şi produsul printr'un număr se păstrează.

Fiind dat un trivector $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, procedeul folosit permite să asociem deasemenea, în mod unic, un bivector $(\bar{u}, \bar{v})$ oricărui vector covariant $\bar{P}' = (P_1, P_2)$ construind trivectorul $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, paralelipipedul având bazele în P_1 şi P_2. Prin urmare: *între speciile bivectorilor şi vectorilor covarianţi se poate stabili un isomorfism, determinat prin alegerea unui trivector de bază şi independent de orientarea şi raportarea spaţiului la un sistem de referinţă.*

Presupunând, în particular, vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ orientaţi pe direcţiile vectorilor fundamentali, vom avea

$$\bar{u} = \alpha\bar{p}; \quad \bar{v} = \beta\bar{q}; \quad \bar{w} = \gamma\bar{r}$$

şi deci

$$(\bar{u}\bar{v}\bar{w}) = \alpha\beta\gamma\,(\bar{p}\bar{q}\bar{r}),$$

de unde

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

Cum trivectorul $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$ este o mărime pseudo-scalară, mărimea

$$\frac{(\bar{u}, \bar{v})}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})} = \frac{1}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})}(\bar{u}, \bar{v})$$

va fi isomorfă cu $(\bar{u}, \bar{v})$ şi vom avea

$$\frac{(\bar{u}, \bar{v})}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})} = \alpha\beta\frac{(\bar{p}, \bar{q})}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})} = \frac{1}{\gamma}\frac{(\bar{p}, \bar{q})}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})}.$$

Prin urmare, măsura acestei mărimi în raport cu unitatea $\frac{(\bar{p}, \bar{q})}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})}$ este inversa măsurii lui $\bar{w}$, deci egală cu măsura vectorului covariant $\bar{P}'$, asociat lui $(\bar{u}, \bar{v})$ pe direcţia lui $\bar{w}$. Vom putea deci considera această mărime ca un vector covariant şi vom avea:

$$\bar{P}' = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})}, \qquad (153,II)$$

relaţia fiind generală, deoarece direcţia lui $\bar{w}$ este oarecare:

Vectorul covariant asociat unui bivector oarecare $(\bar{u}, \bar{v})$ *este raportul, acestuia la trivectorul de bază* $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ *al isomorfismului*

$$(\bar{u}, \bar{v}) \longleftrightarrow \bar{P}' = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Există prin urmare o infinitate de isomorfisme posibile între vectori covarianți și bivectori, fiecărui trivector nedegenerat $(\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r})$ corespunzându-i un astfel de isomorfism.

*§ 71. Vectori covarianți și contravarianți. Isomorfism prin dualitate

Intre cele două specii ale vectorilor contravarianți și covarianți se poate stabili deasemenea un isomorfism. Fiind dați trei vectori liniar independenți $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ formând un triedru nedegenerat, vom considera paralelipipedul construit pe ei ca format în același timp din intersecția celor trei perechi de plane paralele ce-i formează fețele. Fiecare din aceste biplane poate fi orientat astfel încât paralelipipedului

$$\overline{OA}=\overline{p}; \quad \overline{OB}=\overline{q}; \quad \overline{OC}=\overline{r},$$

considerat ca obiect geometric, îi putem asocia deodată trei vectori contravarianți $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ și trei vectori covarianți

$$\overline{p}'=(P_1, P_2); \quad \overline{q}'=(Q_1, Q_2); \quad \overline{r}'=(R_1, R_2).$$

Vectorul $\overline{p}'$ este reprezentat de planul P_1 care trece prin $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ și de planul P_2, paralel cu acesta și trecând prin A; ceilalți sunt definiți în mod analog (fig. 76).

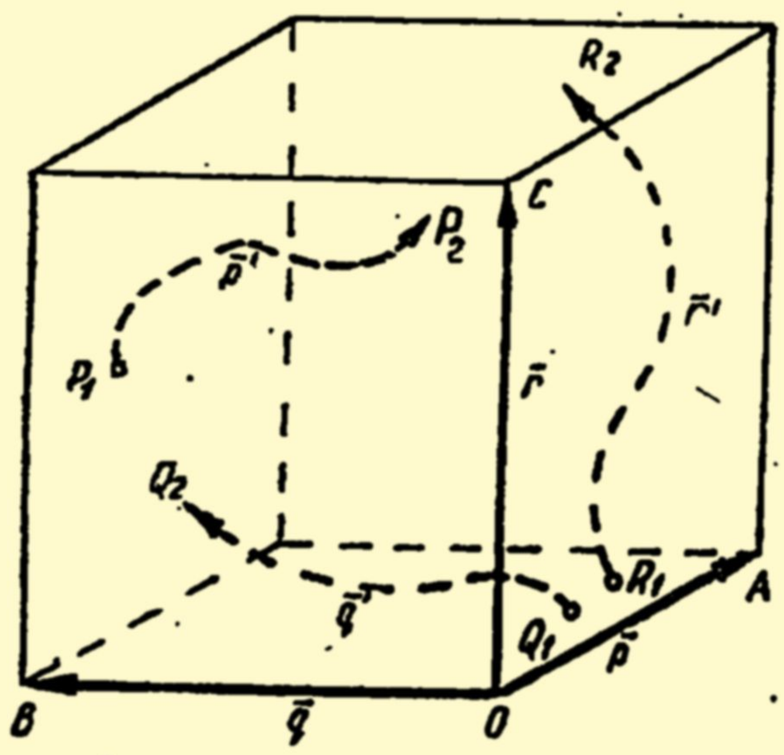


Fig. 76

Vom asocia vectorul covariant $\overline{p}'$ vectorului contravariant $\overline{p}$, prin ale cărui extremități trec planele sale P_1 și P_2, orientările corespunzându-se. In mod analog, vom stabili corespondențele

$$\overline{p}\to\overline{p}'; \quad \overline{q}\to\overline{q}'; \quad \overline{r}\to\overline{r}'.$$

Pornind dela același triedru, considerat ca format de cele trei fețe ale sale OAB, OBC, OCA, aceluiași obiect geometric, paralelipipedul, îi vom putea asocia cei trei vectori covarianți $\overline{p}'$, $\overline{q}'$, $\overline{r}'$ și apoi acestora, vectorii contravarianți $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$, după regula următoare:

Vectorul contravariant $\overline{p}$ va fi asociat vectorului covariant $\overline{p}'$, pe ale cărui plane se găsesc extremitățile sale O și A, orientările corespunzându-se.

Comparând această regulă cu precedenta, se vede că între ele există corespondența

covariant	⟷	contravariant
plan	⟷	punct
conține	⟷	este conținut.

Corespondența biunivocă între plane și puncte în spațiul cu trei dimensiuni se numește *dualitate* și se regăsește în geometria spațiilor cu n dimensiuni sub forma corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALA
REGIONALA
I A Ş I

Intre cele trei perechi de plane şi puncte orientate considerate există corespondenţele *biunivoce*.

$$\bar{p} \longleftrightarrow \bar{p}' ; \quad \bar{q} \longleftrightarrow \bar{q}' ; \quad \bar{r} \longleftrightarrow \bar{r}' , \tag{154,II}$$

analoage cu dualitatea extinsă la vectorii corespunzători.

Fiind dată această corespondenţă prin paralelipipedul fundamental $OABC$ vom putea asocia în mod unic oricărui vector covariant un vector contravariant, şi reciproc.

Vectorului contravariant $\alpha\bar{p}$, paralel cu $\bar{p}$, îi vom asocia vectorul covariant $\alpha\bar{p}'$ având pe direcţia lui $\bar{p}$, ales ca unitate, aceeaşi măsură α ca şi $\alpha\bar{p}$; deci, segmentul interceptat de $\alpha\bar{p}'$ pe această direcţie va avea măsura: $\frac{1}{\alpha}$, inversa măsurii lui $\alpha\bar{p}$.

In general, unui vector contravariant $\bar{V}$ care, raportat la baza $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$, are expresia:

$$\bar{V} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{r}, \tag{155,II}$$

îi vom asocia vectorul covariant $\bar{V}'$ care, raportat la baza $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$, are expresia

$$\bar{V}' = \alpha\bar{p}' + \beta\bar{q}' + \gamma\bar{r}' . \tag{155',II}$$

Această corespondenţă este biunivocă şi duală, ca o consecinţă a dualităţii (154,II) a vectorilor de bază. Prin urmare:

Dualitatea

$$\bar{p} \longleftrightarrow \bar{p}' ; \quad \bar{q} \longleftrightarrow \bar{q}' ; \quad \bar{r} \longleftrightarrow \bar{r}'$$

a elementelor paralelipipedului fundamental se extinde prin dualitatea

$$\alpha\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{r} \longleftrightarrow \alpha\bar{p}' + \beta\bar{q}' + \gamma\bar{r}' \tag{156,II}$$
$$\bar{V} \longleftrightarrow \bar{V}'$$

între toţi vectorii contravarianţi şi covarianţi ai spaţiului cu trei dimensiuni.

Produsul scalar

$$\bar{V}\bar{V}' = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqq 0, \tag{156',II}$$

deoarece

$$\bar{p}\bar{p}' = \bar{q}\bar{q}' = \bar{r}\bar{r}' = 1 ;$$
$$\bar{p}\bar{q}' = \bar{p}'q = 0 ; \quad \bar{q}\bar{r}' = \bar{q}'\bar{r} = 0 ; \quad \bar{r}\bar{p}' = \bar{r}'\bar{p} = 0. \tag{157,II}$$

Ori, acest produs scalar reprezintă măsura vectorului V prin segmentul orientat interceptat de el pe planele lui $\bar{V}'$. Această măsură este pozitivă, în afara cazului

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

corespunzător vectorilor nuli. Prin urmare: *Vectorul $\bar{V}$, asociat unui vector covariant $\bar{V}'$, este secant planelor P_1 şi P_2 ale acestuia şi are aceeaşi orientare ca el: dela P_1 spre P_2.*

Cu alte cuvinte:

Vectorii asociaţi prin dualitate se orientează reciproc. Vom numi vectorul contravariant $\bar{V}$, asociat unui vector covariant $\bar{V}'$, *vector reprezentativ*. Orientarea reciprocă este dependentă de dualitatea stabilită, dar independentă de baza $\bar{p}, q, \bar{r}$.

Scanned with OKEN Scanner

Corespondența prin dualitate poate fi extinsă la suma a doi vectori oarecare, ca o consecință imediată a raportării la baza aleasă. (Exercițiu).

Dacă

$$\bar{V}_1 \longleftrightarrow \bar{V}_1' \quad \text{și} \quad \bar{V}_2 \longleftrightarrow \bar{V}_2',$$

atunci

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 \longleftrightarrow \bar{V}_1' + \bar{V}_2';$$

obținem astfel, următorul rezultat: *Fiind dat un paralelipiped fundamental* $(\bar{p},\bar{q},\bar{r};\ \bar{p}',\bar{q}',\bar{r}')$, *între speciile vectorilor contravarianți și covarianți se poate stabili un isomorfism prin dualitate, definit prin corespondența biunivocă:*

$$\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r} \longleftrightarrow \alpha\bar{p}'+\beta\bar{q}'+\gamma\bar{r}'.$$

Oricărei relații stabilite între vectori contravarianți și covarianți îi corespunde o relație valabilă, obținută înlocuind fiecare vector prin corespondentul său în acest isomorfism.

Vectorii duali sunt reciproc reprezentativi unul altuia. Orientările lor sunt independente de baza dualității, dar dependente de dualitatea stabilită.

In adevăr, produsul scalar (156′, II) are un semn independent de această bază; dar dacă am fi stabilit o altă corespondență, semnul lui $\overline{VV'}$ ar fi putut fi și negativ [1]).

Isomorfismul astfel stabilit este independent de sistemul de referință ales pentru spațiu, dar dependent de paralelipipedul fundamental.

Schimbarea bazei de referință nu modifică măsurile α, β, γ, *dacă se păstrează acest paralelipiped, adică baza isomorfismului* stabilită prin corespondențele

$$\bar{p} \longleftrightarrow \bar{p}';\quad \bar{q} \longleftrightarrow \bar{q}';\quad \bar{r} \longleftrightarrow \bar{r}'.$$

Cu această observație isomorfismul stabilit între vectorii covarianți și contravarianți are un caracter invariant. Este, însă, necesar să nu se confunde schimbarea bazei spațiului cu aceea a isomorfismului, chiar dacă se alege ca sistem de referință însuși paralelipipedul fundamental.

Aplicația 1. *Vectorii reciproci.* Fiind dați trei vectori contravarianți $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ liniar independenți, vectorii covarianți $\bar{p}'$, $\bar{q}'$, $\bar{r}'$, reprezentați prin fețele paralelipipedului orientat *OABC*, asociat acestor vectori, se numesc *reciprocii* vectorilor $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, (fig. 76).

Relația de reciprocitate este simetrică, în sensul dualității: vectorii $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ covarianți au ca reciproci vectorii $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ contravarianți duali. Deci: *Corespondența biunivocă între trei vectori liniar independenți* $\bar{p}$, $\bar{q}$, r *și reciprocii lor determină o dualitate și isomorfismul corespunzător între vectorii contravarianți și covarianți din spațiul afin.*

Dacă alegem ca bază trivectorul $(\bar{p}\bar{q}\bar{r}) \neq 0$, bivectorului contravariant $(\bar{q},\bar{r}) = \bar{q}\times\bar{r}$ îi vom putea asocia vectorul covariant $\frac{\bar{q}\times\bar{r}}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})}$. Este ușor de văzut că acest vector covariant este $\bar{p}'$ (fig. 76), conform cu (153, II). Prin urmare:

Reciprocii sistemului de vectori contravarianți liniar independenți $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ *sunt vectorii covarianți*

$$\bar{p}' = \frac{\bar{q}\times\bar{r}}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}};\qquad \bar{q}' = \frac{\bar{r}\times\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}};\qquad \bar{r}' = \frac{\bar{p}\times\bar{q}}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}}. \qquad (158, II)$$

---

[1]) De exemplu, în isomorfismul $\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r} \longleftrightarrow \alpha\bar{p}'+\beta\bar{q}'-\gamma\bar{r}'$, am fi avut $\overline{VV'} = \alpha^2+\beta^2-\gamma^2$ și deci $\overline{VV'}<0$ pentru $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Regăsim astfel expresiile cunoscute ale reciprocilor a trei vectori, introduși în spațiul euclidian, deci în geometria metrică, însă de data aceasta, cu semnificația lor justă de vectori covarianți, care nu putea apare în această geometrie, deoarece atât vectorii covarianți, cât și bivectorii erau reprezentați prin vectori contravarianți.

Aplicația 2. *Isomorfismul vectorilor și bivectorilor contravarianți.* Relația de isomorfism are proprietățile egalității: simetrie, reflexivitate și transitivitate. (Exercițiu).

Ca o consecință a isomorfismului dintre bivectorii contravarianți și vectorii covarianți, pe de o parte, și între vectorii covarianți și contravarianți pe de altă parte, proprietatea de transitivitate ne conduce la următorul rezultat:

Fiind dat paralelipipedul fundamental format de vectorii $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$; $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ *și trivectorul de bază* $\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r} \neq 0$, *între speciile vectorilor și bivectorilor contravarianți există isomorfismul:*

$$\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r} \longleftrightarrow \alpha(\bar{q},\bar{r})+\beta(\bar{r},\bar{p})+\gamma(\bar{p},\bar{q}). \qquad (159, II)$$

Acest isomorfism este bazat pe corespondențele biunivoce:

$$\bar{p} \longleftrightarrow (\bar{q},\bar{r}); \quad \bar{q} \longleftrightarrow (\bar{r},\bar{p}); \quad \bar{r} \longleftrightarrow (\bar{p},\bar{q})$$

între vectorii și bivectorii de bază.

El poate fi stabilit și direct pornind dela paralelipipedul fundamental. Coeficienții α, β, γ reprezintă măsurile respective ale vectorului contravariant și bivectorului asociat lui prin acest isomorfism, în raport cu sistemul fundamental $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$; $(\bar{q},\bar{r})$, $(\bar{r},\bar{p})$, $(\bar{p},\bar{q})$.

Acest isomorfism este independent de alegerea sistemului de referință al spațiului. El depinde însă, evident, de alegerea paralelipipedului fundamental. *Este necesar să nu existe confuzie între paralelipipedul fundamental al isomorfismelor și triedrul fundamental al spațiului.*

Aceste două baze sunt independente una de cealaltă prin rolurile ce le au, deși pot coincide din punct de vedere geometric.

Dacă raportăm spațiul la triedrul fundamental $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ format cu vectorii paralelipipedului fundamental, trivectorul $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ fiind deasemenea ales ca bază de isomorfism, măsurile vectorilor contravarianți și covarianți, precum și ale bivectorilor contravarianți isomorfi vor coincide cu α, β, γ.

Prin schimbarea sistemului de referință, *aceste măsuri vor fi evident modificate* după reguli pe care le vom stabili ulterior. Este esențial de observat că dimpotrivă, *măsurile* α, β, γ *în raport cu paralelipipedul fundamental vor rămâne invariante,* fiindcă acesta nu este schimbat atât timp cât isomorfismul stabilit rămâne același. Evident, în acest caz, vom avea două baze diferite: una pentru isomorfisme și alta pentru raportarea spațiului.

Produsul mixt al unui vector contravariant $\bar{V}$ prin bivectorul $(\bar{A},\bar{B})$ contravariant asociat lui este trivectorul:

$$[\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r},\ \alpha(\bar{q},\bar{r})+\beta(\bar{r},\bar{p})+\gamma(\bar{p},\bar{q})] = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\bar{p},\bar{q},\bar{r}).$$

Acest trivector are deci orientarea lui $(\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r})$, deoarece măsura sa în raport cu $(\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r})$ este $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$, excluzând cazul $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ corespunzător vectorului nul.

Vectorul contravariant $\bar{V}$, *asociat prin isomorfismul* (159, II) *unui bivector contravariant dat* $(\bar{u}\bar{v})$, *este necoplanar cu acest bivector și formează cu el un trivector* $(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{V})$, *cu aceeași orientare ca trivectorul de bază* $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ *al isomorfismului stabilit.*

Alegerea în geometria metrică a vectorului reprezentativ al produsului vectorial, astfel ca triedrul $\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{V}$ să fie pozitiv, este justificată prin această proprietate a isomorfismului dintre vectorii și bivectorii contravarianți.

Aplicația 3. *Vectorul reprezentativ al bivectorului contravariant.* Fiind dat un isomorfism între vectorii și bivectorii contravarianți, definit prin baza sa:

$$\bar{p} \longleftrightarrow (\bar{q},\bar{r}); \quad \bar{q} \longleftrightarrow (\bar{r}\,\bar{p}); \quad \bar{r} \longleftrightarrow (\bar{p},\bar{q}),$$

Scanned with OKEN Scanner

vom numi vectorul $\bar{V}$, asociat prin acest izomorfism unui bivector oarecare $(\bar{u}, \bar{v})$, *vector reprezentativ* al acestui bivector contravariant, prin analogie cu cazul geometriei metrice.

Vom putea dovedi următoarea proprietate:

Vectorul contravariant $\bar{V}$ reprezentativ al unui bivector contravariant $(\bar{u}, \bar{v})$ are direcția dreptelor de intersecție ale biplanelor vectorilor covarianți $\bar{u}', \bar{v}'$, asociați vectorilor contravarianți $\bar{u}, \bar{v}$ în izomorfismul prin dualitate, cu aceeași bază $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$.

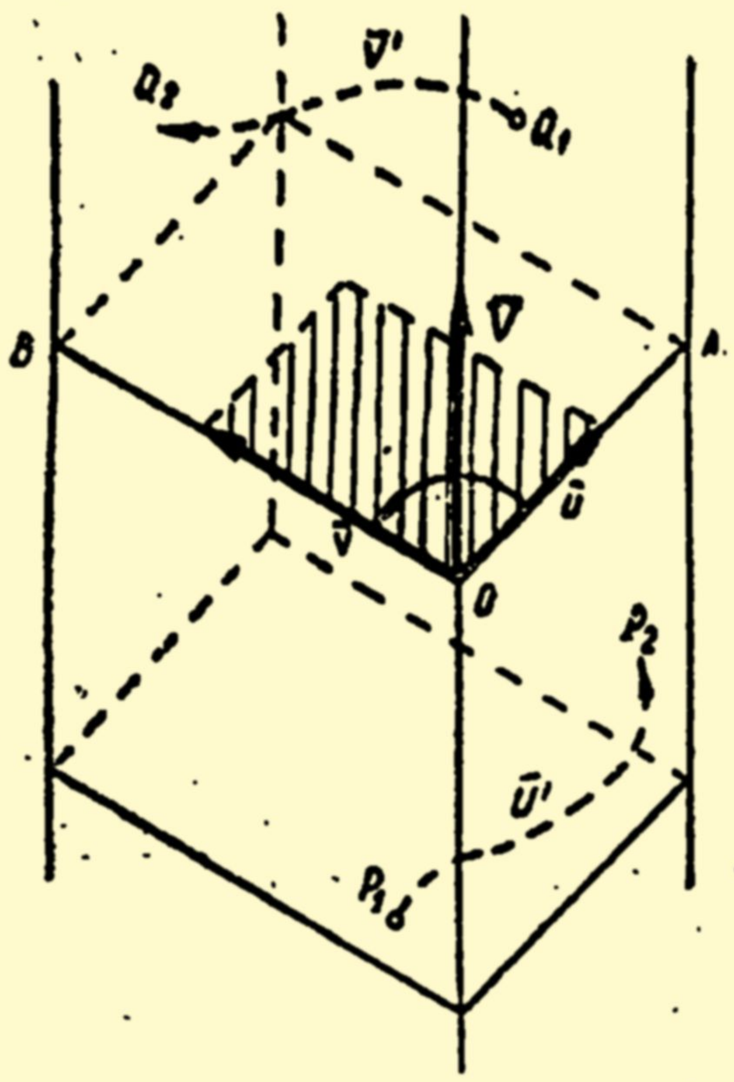


Fig. 77

Raportând vectorii $\bar{u}, \bar{v}$ la baza $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ vom avea:

$$\bar{u} = \alpha_1 \bar{p} + \beta_1 \bar{q} + \gamma_1 \bar{r}; \quad \bar{v} = \alpha_2 \bar{p} + \beta_2 \bar{q} + \gamma_2 \bar{r},$$

de unde

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)(\bar{p}, \bar{q}) + (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2)(\bar{q}, \bar{r}) + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2)(\bar{r}, \bar{p}).$$

Vectorul $\bar{V}$, asociat lui $(\bar{u}, \bar{v})$ în izomorfismul stabilit va fi de forma

$$\bar{V} = (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2)\bar{p} + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2)\bar{q} + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)\bar{r},$$

iar vectorii $\bar{u}', \bar{v}'$, asociați lui $\bar{u}$ și $\bar{v}$ în izomorfismul prin dualitate cu aceeași bază, vor fi

$$\bar{u}' = \alpha_1 \bar{p}' + \beta_1 \bar{q}' + \gamma_1 \bar{r}'; \quad \bar{v}' = \alpha_2 \bar{p}' + \beta_2 \bar{q}' + \gamma_2 \bar{r}'.$$

Ei sunt reprezentați în fig. 77 prin biplanele (P_1, P_2) și (Q_1, Q_2).

Vectorii $\bar{u}'$ și $\bar{v}'$ sunt paraleli cu $\bar{V}$, după cum rezultă din calculul produselor scalare $(\bar{u}'\bar{V})$ și $(\bar{v}'\bar{V})$, deoarece vom avea:

$$(\bar{u}'\bar{V}) = \alpha_1(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + \beta_1(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + \gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) = 0; \quad (\bar{v}'\bar{V}) = 0.$$

Presupunând $(\bar{u}, \bar{v}) \neq 0$, deci $\bar{u}, \bar{v}$ liniar independenți, $\bar{u}'$ și $\bar{v}'$ vor fi deasemeni liniar independenți. Vectorul $\bar{V}$, paralel cu $\bar{u}$ și $\bar{v}'$, va fi deci paralel cu intersecția biplanelor respective.

Prin isomorfism putem deduce următoarea propoziție:

Bivectorul contravariant $(\bar{u}, \bar{v})$, asociat unui vector contravariant $\bar{V}$, are direcția planului format de vectorii contravarianți $\bar{u}, \bar{v}$, asociați la doi vectori covarianți $\bar{u}'\bar{v}'$ care trec prin $\bar{V}$.

*§ 72. Pseudo-scalari și pseudo-vectori. Densități și capacități

Am numit mărime pseudo-scalară orice mărime măsurabilă cu o unitate derivată, deci cu o unitate dependentă de sistemul de referință al spațiului. Dacă a este o unitate pentru mărimea pseudo-scalară M, vom avea

$$M = \lambda a,$$

unde λ este măsura lui M prin a.

Schimbarea sistemului de referință $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ al spațiului transformă unitatea a în a_1. Specia M fiind măsurabilă cu o unitate, vom avea

$$a = \varphi(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}; \quad \bar{p}_1, \bar{q}_1, \bar{r}_1)\, a_1,$$

funcția φ depinzând de cele două baze $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ și $\bar{p}_1, \bar{q}_1, \bar{r}_1$.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, vom avea

$$M=\lambda\varphi\,(\overline{p},\overline{q},\overline{r};\ \ \overline{p}_1,\overline{q}_1,\overline{r}_1)\,a_1=\varphi\,M_1, \tag{160,II}$$

unde

$$M_1=\lambda\,a_1. \tag{161,II}$$

Când într'o specie măsurabilă de mărimi se stabileşte o corespondenţă biunivocă între elementele speciei, astfel încât la suma a două elemente să corespundă suma transformatelor lor, iar produsului printr'un număr produsul respectiv al transformatului, vom numi acea corespondenţă *automorfism.* Un automorfism al unei specii măsurabile este deci un isomorfism al speciei cu ea însăşi.

Schimbarea sistemului de referinţă pune în corespondenţă mărimile M şi M_1 din specia considerată. *Această corespondenţă este un automorfism,* iar relaţia (161,II) arată că M_1 are faţă de unitatea a_1 măsura λ, pe care o avea M faţă de unitatea a.

Fie N o altă specie de mărimi pseudo-scalare şi b o unitate în această specie. Prin aceeaşi schimbare de sistem de referinţă, vom avea

$$b=\psi\,(\overline{p},\overline{q},\overline{r};\ \ \overline{p}_1,\overline{q}_1,\overline{r}_1)\,b_1,$$

unde ψ este deasemenea o funcţie, care depinde numai de cele două baze. Vom avea

$$N=\psi N_1;\ \ N_1=\mu b_1,$$

unde μ este măsura lui N cu unitatea b.

Deoarece automorfismele astfel introduse prin schimbarea sistemului de referinţă nu trebue să depindă decât de cele două baze, între funcţiile φ şi ψ trebue să existe o relaţie de dependenţă funcţională, independentă de orice alte mărimi, deci de forma

$$\varphi=F\,(\psi). \tag{162,II}$$

Să considerăm, în particular, ca specie N specia trivectorilor contravarianţi, notând cu

$$\tau=\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}$$

trivectorul fundamental. Prin schimbarea sistemului de referinţă vom avea

$$\tau=\psi\,(\overline{p},\overline{q},\overline{r};\ \ \overline{p}_1,\overline{q}_1,\overline{r}_1)\,\tau_1$$

şi vom putea folosi această funcţie în relaţia (162,II).

In aplicaţiile fizice, forma cea mai obişnuită a funcţiei $F\,(\psi)$ este o putere a lui ψ, iar ψ este determinantul transformării $\overline{p},\overline{q},\overline{r}\to\overline{p}_1,\overline{q}_1,\overline{r}_1$. Deaceea, în cele ce urmează vom considera, în special, relaţii de forma

$$\varphi=\psi^k, \tag{163,II}$$

unde k este un întreg pozitiv sau negativ, sau zero.

Aplicând amplificarea mărimilor prin scalari, vom putea forma mărimea

$$S=\frac{1}{\tau^k}M=\frac{\lambda a}{\tau^k}=\lambda\frac{a}{\tau^k}=\lambda s,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$s = \frac{a}{\tau^k}.$$

Atât S cât şi s sunt mărimi măsurabile cu o unitate. Observăm în plus că operaţia de amplificare este posibilă deşi τ este pseudo-scalar, deoarece τ este măsurabil printr'o unitate.

Schimbând sistemul de referinţă, vom avea conform cu (163,II)

$$S = \lambda \frac{\varphi a_1}{\psi^k \tau_1^k} = \lambda \frac{a_1}{\tau_1^k} = \lambda s_1,$$

de unde

$$s_1 = s,$$

ceeace arată că mărimile s şi S sunt scalare. Am obţinut deci următorul rezultat:

Mărimile pseudo-scalare, pentru care măsurile vechilor unităţi a sunt legate de măsura trivectorului fundamental τ în noile unităţi $\bar{p}_1, \bar{q}_1, \bar{r}_1$ prin relaţia $\varphi = \psi^k$, pot fi puse sub forma:

$$M = \tau^k S, \qquad (164,II)$$

unde S este un scalar.

Prin analogie cu mărimile pseudo-scalare, vom numi *pseudo-vector* o mărime obţinută prin amplificarea unui vector cu un pseudo-scalar. Un pseudo-vector va fi de forma

$$\bar{W} = M\bar{V},$$

unde M este un pseudo-scalar.

Dacă M este de forma (164,II), vom putea scrie:

$$\bar{W} = \tau^k S\bar{V} = \tau^k \bar{U}, \qquad (165,II)$$

unde

$$\bar{U} = S\bar{V}$$

este o mărime vectorială.

Cele mai importante exemple de mărimi pseudo-scalare se întâlnesc în fizică. Astfel, relaţia dintre masă, volum şi densitate

$$m = \delta\omega,$$

unde δ este densitatea, ω—volumul, iar m—masa unei porţiuni omogene de materie, conduce la un nou pseudo-scalar, densitatea.

In adevăr, masa este o mărime măsurabilă cu o unitate fundamentală, deci independentă de unităţile structurale ale spaţiului.

Vom pune

$$\omega = a\tau,$$

unde a este măsura lui ω în raport cu unitatea de volum τ şi vom avea

$$m = \delta a \tau,$$

de unde

$$\delta = \frac{m}{a}\tau^{-1} = \tau^{-1} S,$$

unde S este un scalar, masa fiind un scalar.

Scanned with OKEN Scanner

Având în vedere importanța densității ca mărime fizică, vom numi *densitate scalară* orice mărime pseudo-scalară de forma

$$M=\tau^{-1}S=\tau' S, \qquad (166,II)$$

punând

$$\tau'=\tau^{-1}=\frac{1}{\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}}=\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'.$$

In același timp, trivectorul contravariant definind volumul, deci capacitatea unei porțiuni de spațiu, vom numi *capacitate scalară* orice mărime pseudo-scalară de forma

$$M=\tau S, \qquad (167,II)$$

unde S este un scalar.

In general, vom numi *densitate scalară de pondere k* o mărime de forma

$$M=\tau^{-k}S=\tau'^{k}S; \qquad (k\geqq 0) \qquad (168,II)$$

și *capacitate scalară de pondere k* o mărime de forma

$$M=\tau^{k}S; \qquad (k\geqq 0). \qquad (169,II)$$

O mărime de forma

$$M=\tau^{k}\bar{V} \quad \text{(respectiv } \tau^{k}\bar{V}') \qquad (k\geqq 0) \qquad (170,II)$$

se numește *capacitate vectorială de pondere k,* pe când o mărime de forma

$$M=\tau'^{k}\bar{V} \quad \text{(respectiv } \tau'^{k}\bar{V}') \qquad (k\geqq 0) \qquad (171,II)$$

se numește *densitate vectorială de pondere k.*

Densitățile și capacitățile vectoriale sunt *contravariante* sau *covariante,* după cum factorul vectorial este contravariant sau covariant.

Bivectorul contravariant este o capacitate vectorială covariantă de pondere $k=1$, deoarece

$$(\bar{u},\bar{v})=(\bar{p}\bar{q}\bar{r})\,\bar{V}'=\tau\bar{V}'.$$

Dualul său, bivectorul covariant, este o densitate vectorială contravariantă de pondere $k=1$.

Produsul scalar dintre o capacitate și o densitate vectorială de aceeași pondere și de varianțe contrare este un scalar.

Vectorii și scalarii pot fi considerați ca densități și capacități de pondere nulă.

Importanța densităților și capacităților în aplicațiile fizice ale calculului vectorial rezultă din faptul că numeroase mărimi fizice sunt densități sau capacități. Ea a fost pusă în evidență în spațiul afin de *P. Langevin* și *L. Brillouin,* care au arătat că aceste mărimi, legate de elementul de volum, deci de trivectorul fundamental al spațiului, pot fi definite fără a folosi noțiuni metrice [1]).

[1]) Vezi *L. Brillouin,* Les tenseurs en mécanique et en elasticité, Paris, 1938.

Scanned with OKEN Scanner

* § 73. Calculul vectorial ca teorie de mărimi geometrico-fizice

In paragrafele precedente am arătat cum proprietăţile cele mai simple ale corpurilor materiale, cum sunt cele relative la formă, poziţie mutuală, întindere, conduc la cercetarea mulţimilor de figuri geometrice, care au anumite proprietăţi comune — a tipurilor de figuri — numite obiecte geometrice.

Aceste proprietăţi sunt înfăţişate prin axiomele spaţiului, care exprimă cele mai simple relaţii între puncte şi definesc obiectele geometrice fundamentale. Astfel, în geometria elementară, axiomele lui Hilbert determină relaţiile dintre puncte, drepte şi plane, exprimate prin cuvintele uzuale în vorbire ca *„sunt situate pe“*, *„între“*, *„congruent“*, *„paralel“*, *„continuu“*, etc.

O parte din axiome definesc obiecte geometrice, iar altele complectând pe primele, conduc la definirea unor mărimi geometrice, cum sunt distanţa şi unghiul. Astfel sunt axiomele de congruenţă, care stabilesc relaţia de egalitate a segmentelor.

Analiza acestor axiome de congruenţă pune în evidenţă procedeul folosit de noi în mod sistematic pentru a obţine mărimi geometrice:

Acest procedeu constă în împărţirea figurilor unui obiect geometric în clase de echivalenţă disjuncte, fiecare figură aparţinând unei clase şi numai uneia.

Impărţirea în clase se face prin introducerea unei relaţii de echivalenţă cu proprietăţile de simetrie, reflexivitate şi transitivitate ale egalităţii. Fiecare clasă de figuri ale obiectului geometric considerat este apoi considerată ca un element abstract, numit mărime geometrică şi definit prin proprietăţile comune tuturor figurilor clasei. Mărimile care caracterizează clasele unui obiect geometric se numesc asociate obiectului şi sunt reprezentate prin oricare din figurile clasei. Proprietatea caracteristică a mărimilor este aceea de a putea fi comparate prin egalitate, când corespund unui obiect geometric dat.

Mărimile astfel definite capătă proprietăţi algebrice, dacă sunt măsurabile. La aceste proprietăţi se ajunge tot pe cale geometrică, introducând o operaţie de compunere a figurilor obiectului geometric prin care la două figuri se asociază o nouă figură. In cazul când această nouă figură aparţine aceluiaşi obiect şi operaţia de compunere are proprietăţile adunării, mărimile asociate formează o specie măsurabilă şi pot fi adunate.

Aceste operaţii asupra figurilor şi operaţiile corespunzătoare asupra mărimilor asociate pun bazele unei teorii a mărimilor geometrice, în care fiecare mărime este asociată unui obiect geometric şi, în consecinţă, strâns legată de proprietăţi fizice ale materiei.

Calculul vectorial se încadrează în această teorie, reunind metodele de calcul, care rezultă din aplicarea unor operaţii simple mărimilor scalare şi vectoriale şi punând în evidenţă mărimile obţinute prin aceste operaţii, cum sunt, de exemplu, bivectorii şi trivectorii, densităţile şi capacităţile scalare sau vectoriale,

In general, acest calcul este prezentat în manuale sub aspectul său algebric, deci formal, aşa cum rezultă din teoretizarea unor operaţii geometrico-fizice fundamentale, ca însumarea forţelor concurente aplicate unei particule materiale solide, calculul lucrului mecanic, calculul momentelor, însumarea cuplurilor, etc.

Scanned with OKEN Scanner

Acest aspect este considerabil simplificat prin reprezentarea figurilor şi deci a mărimilor geometrice în spaţiul metric euclidian, prin urmare, în spaţiul geometriei euclidiene, în care fiecărui bipunct i se asociază o mărime fundamentală, distanţa, şi fiecărei perechi de drepte o altă mărime importantă, unghiul. In adevăr, toate mărimile obţinute prin produsele vectoriale se pot reprezenta prin vectori, iar cele obţinute prin produse scalare, prin scalari, *cu singura precauţiune de a adopta o orientare a acestor mărimi, în funcţie de orientarea spaţiului.*

O analiză mai adâncită a acestei necesităţi de orientare a produselor vectoriale arată că aceste operaţii definesc mărimi mai complexe decât cele vectoriale, reprezentabile prin vectori normali, numai în spaţiul cu trei dimensiuni şi numai în geometria metrică, deci *Calculul vectorial în spaţiul metric ascunde natura unora dintre mărimile asupra cărora operează.*

Din aceste restricţii geometrice rezultă, totuşi, strânsa legătură între mărimile obţinute prin aplicarea operaţiilor vectoriale şi structura geometrică a spaţiului. *A lua în consideraţie exclusiv caracterul algebric al acestor mărimi, înseamnă a pierde din vedere tocmai caracterele lor esenţiale geometrico-fizice.*

Deaceea, bazele geometrice ale Calculului vectorial trebue *să se găsească în operaţiile geometrice cu figurile cele mai simple, iar noţiunea de vector trebue concepută ca o mărime geometrică asociată bipunctului orientat.*

Operaţia geometrică de translaţie, prin care se împarte în clase mulţimea tuturor bipunctelor orientate, se poate defini prin condiţia ca segmentele $\overline{AB'}$ şi $\overline{A'B}$ să aibă acelaşi mijloc M; în acest caz, $\overline{AB}$ şi $\overline{A'B'}$ vor fi echipolente şi transformarea lui $\overline{AB}$ în $\overline{A'B'}$ se va numi translaţie.

Spaţiul, în care au fost definite dreapta şi planul şi în care printr'un punct se poate duce un segment orientat şi numai unul echipolent cu un segment orientat dat, este *spaţiul afin.*

Vectorul este deci o mărime fundamentală a spaţiului afin.

Orice geometrie, fiind o teorie a obiectelor geometrice dintr'un spaţiu, prin asocierea de mărimi geometrice acestor obiecte, geometria devine şi o teorie a acestor mărimi geometrice. Adoptând vectorul ca mărime fundamentală a spaţiului afin, obiectelor geometrice simple, ca paralelogramul orientat sau paralelipipedul orientat; li se pot asocia mărimi geometrice obţinute din vectori cu ajutorul unor operaţii ce corespund operaţiilor geometrice, prin care se construesc aceste obiecte geometrice.

In acest capitol, mărimile obţinute din vectori prin operaţiile de algebră vectorială, definite anterior pornind dela exemplele fizice şi geometrice cunoscute, au fost considerate — în ultimul punct — ca mărimi asociate la obiecte geometrice ale spaţiului afin.

Astfel, *Calculul vectorial a fost conceput ca a teorie a mărimilor vectoriale şi scalare, precum şi a tuturor mărimilor obţinute prin amplificarea cu scalari şi prin produsele scalare şi vectoriale din vectori şi scalari.*

Această teorie a fost desvoltată în spaţiul afin, deoarece mărimea fundamentală, vectorul, a fost definită în acest spaţiu.

Pentru a obţine mărimi geometrice asociate diferitelor obiecte geometrice, au fost folosite operaţii geometrice simple, ca adunarea de vectori paraleli cu un vector dat.

Scanned with OKEN Scanner

Acest aspect este considerabil simplificat prin reprezentarea figurilor şi deci a mărimilor geometrice în spaţiul metric euclidian, prin urmare, în spaţiul geometriei euclidiene, în care fiecărui bipunct i se asociază o mărime fundamentală, distanţa, şi fiecărei perechi de drepte o altă mărime importantă, unghiul. In adevăr, toate mărimile obţinute prin produsele vectoriale se pot reprezenta prin vectori, iar cele obţinute prin produse scalare, prin scalari, *cu singura precauţiune de a adopta o orientare a acestor mărimi, în funcţie de orientarea spaţiului.*

O analiză mai adâncită a acestei necesităţi de orientare a produselor vectoriale arată că aceste operaţii definesc mărimi mai complexe decât cele vectoriale, reprezentabile prin vectori normali, numai în spaţiul cu trei dimensiuni şi numai în geometria metrică, deci *Calculul vectorial în spaţiul metric ascunde natura unora dintre mărimile asupra cărora operează.*

Din aceste restricţii geometrice rezultă, totuşi, strânsa legătură între mărimile obţinute prin aplicarea operaţiilor vectoriale şi structura geometrică a spaţiului. *A lua în consideraţie exclusiv caracterul algebric al acestor mărimi, înseamnă a pierde din vedere tocmai caracterele lor esenţiale geometrico-fizice.*

Deaceea, bazele geometrice ale Calculului vectorial trebue *să se găsească în operaţiile geometrice cu figurile cele mai simple, iar noţiunea de vector trebue concepută ca o mărime geometrică asociată bipunctului orientat.*

Operaţia geometrică de translaţie, prin care se împarte în clase mulţimea tuturor bipunctelor orientate, se poate defini prin condiţia ca segmentele $\overline{AB'}$ şi $\overline{A'B}$ să aibă acelaşi mijloc M; în acest caz, $\overline{AB}$ şi $\overline{A'B'}$ vor fi echipolente şi transformarea lui AB în $A'B'$ se va numi translaţie.

Spaţiul, în care au fost definite dreapta şi planul şi în care printr'un punct se poate duce un segment orientat şi numai unul echipolent cu un segment orientat dat, este *spaţiul afin.*

Vectorul este deci o mărime fundamentală a spaţiului afin.

Orice geometrie, fiind o teorie a obiectelor geometrice dintr'un spaţiu, prin asocierea de mărimi geometrice acestor obiecte, geometria devine şi o teorie a acestor mărimi geometrice. Adoptând vectorul ca mărime fundamentală a spaţiului afin, obiectelor geometrice simple, ca paralelogramul orientat sau paralelipipedul orientat, li se pot asocia mărimi geometrice obţinute din vectori cu ajutorul unor operaţii ce corespund operaţiilor geometrice, prin care se construesc aceste obiecte geometrice.

In acest capitol, mărimile obţinute din vectori prin operaţiile de algebră vectorială, definite anterior pornind dela exemplele fizice şi geometrice cunoscute, au fost considerate — în ultimul punct — ca mărimi asociate la obiecte geometrice ale spaţiului afin.

Astfel, *Calculul vectorial a fost conceput ca o teorie a mărimilor vectoriale şi scalare, precum şi a tuturor mărimilor obţinute prin amplificarea cu scalari şi prin produsele scalare şi vectoriale din vectori şi scalari.*

Această teorie a fost desvoltată în spaţiul afin, deoarece mărimea fundamentală, vectorul, a fost definită în acest spaţiu.

Pentru a obţine mărimi geometrice asociate diferitelor obiecte geometrice, au fost folosite operaţii geometrice simple, ca adunarea de vectori paraleli cu un vector dat.

Scanned with OKEN Scanner

Asociaţia dintre obiect şi mărime geometrică permite justificarea pas cu pas a operaţiilor efectuate asupra mărimilor şi interpretarea geometrică, atât a lor, cât şi a rezultatelor lor.

In acelaşi timp, analiza acestor operaţii, de exemplu a produselor scalar şi vectorial, permite caracterizarea lor algebrică şi deci, aplicarea lor independent de imaginea geometrică a acelor mărimi, care îndeplinesc condiţiile caracteristice acestor operaţii. Astfel, produsul scalar, definit iniţial pentru vectori contravarianţi şi covarianţi, se extinde şi la alte mărimi, ca vectorii şi bivectorii de aceeaşi varianţă, fără a mai fi necesar să se analizeze obiectele geometrice respective. Totuşi, *aceste obiecte sunt la baza tuturor mărimilor introduse şi operaţiile efectuate corespund permanent unor operaţii geometrice.*

Calculul vectorial, conceput ca teorie a mărimilor geometrice deduse din vectori în spaţiul afin, are astfel un suport geometric şi un suport fizic.

Spre deosebire de Calculul vectorial desvoltat în spaţiul metric, în care mărimile sunt reduse exclusiv la vectori contravarianţi şi la scalari, *în această teorie de mărimi geometrice fiecare specie de mărimi este pusă în evidenţă, ceeace din punct de vedere fizic şi chiar geometric este esenţial.*

Dualitatea între vectorii contravarianţi şi covarianţi permite atât verificarea naturii fiecărei mărimi, cât şi stabilirea imediată a tuturor formulelor duale.

In sfârşit, *această teorie pune în evidenţă caracterul invariant al mărimilor şi operaţiilor Calculului vectorial,* precum şi deosebirea dintre mărimile scalare şi pseudo-scalare, ca şi aceea dintre mărimile vectoriale şi pseudo-vectoriale.

Odată stabilită corespondenţa dintre obiecte şi mărimi geometrice, introducerea şi folosirea oricărei mărimi obţinute prin operaţiile algebrei vectoriale au o bază geometrică şi caracterul formal al acestor operaţii este înlăturat.

Procesul, prin care se asociază fiecărui obiect geometric dintr'un spaţiu cu o anumită structură o mărime geometrică, este similar cu acela prin care se asociază o mărime fizică unei porţiuni de materie. Când o mărime fizică este caracterizată prin proprietăţi geometrice analoage unei anumite mărimi geometrice, o vom putea reprezenta prin această mărime stabilind o nouă corespondenţă între mărimi fizice şi geometrice.

Corespondenţa între mărimile fizice şi geometrice cele mai simple adânceşte bazele Calculului vectorial prin stabilirea unei baze fizice, formată prin geometrizarea operaţiilor cu mărimi fizice, atât între mărimile unei specii, cum este adunarea, cât şi între cele ce aparţin la două sau mai multe specii, cum sunt produsele de mărimi.

Concepţia Calculului vectorial ca teorie de mărimi geometrico-fizice permite folosirea metodelor algebrice în geometrie şi a metodelor geometrice în fizică, iar metodele vectoriale în fizica matematică sunt bazate tocmai pe această concepţie, la care suntem conduşi în mod natural, când încercăm să punem în evidenţă proprietăţile generale ale corpurilor materiale.

Aplicarea lor la studiul matematic al fenomenelor fizice are două aspecte: pe de o parte, vom căuta să asociem în mod just unui număr cât mai mare de mărimi fizice mărimi geometrice ale Calculului vectorial, ţinând seama de proprietăţile acestor mărimi fizice, iar pe de altă parte, să găsim interpretarea fizică a rezultatelor operaţiilor vectoriale cu mărimile folosite, utilizând verificarea experimentală a rezultatelor obţinute.

Scanned with OKEN Scanner

NOTA I. MĂRIMI DUALE

1. Bivectorul covariant. Dualitatea, asociind fiecărui vector contravariant un vector covariant prin isomorfism, ne permite să asociem fiecărui produs de vectori produsul vectorilor duali. Prin aceasta, fiecărei mărimi obţinute printr'un produs de vectori îi corespunde *o mărime dual㠹.

In particular, produsului vectorial a doi vectori contravarianţi $\overline{u}, \overline{v}$ i se asociază produsul dual al vectorilor covarianţi $\overline{u}', \overline{v}'$. Mărimea astfel obţinută se numeşte *bivector covariant.*

Obiectul geometric asociat acestei mărimi va fi figura dual㠹 paralelogramului: fiecărui bipunct îi corespunde un biplan, deci paralelogramului îi va corespunde o pereche de biplane (P_1, P_2) şi (Q_1, Q_2) orientate, formând o prismă orientată (fig. 78).

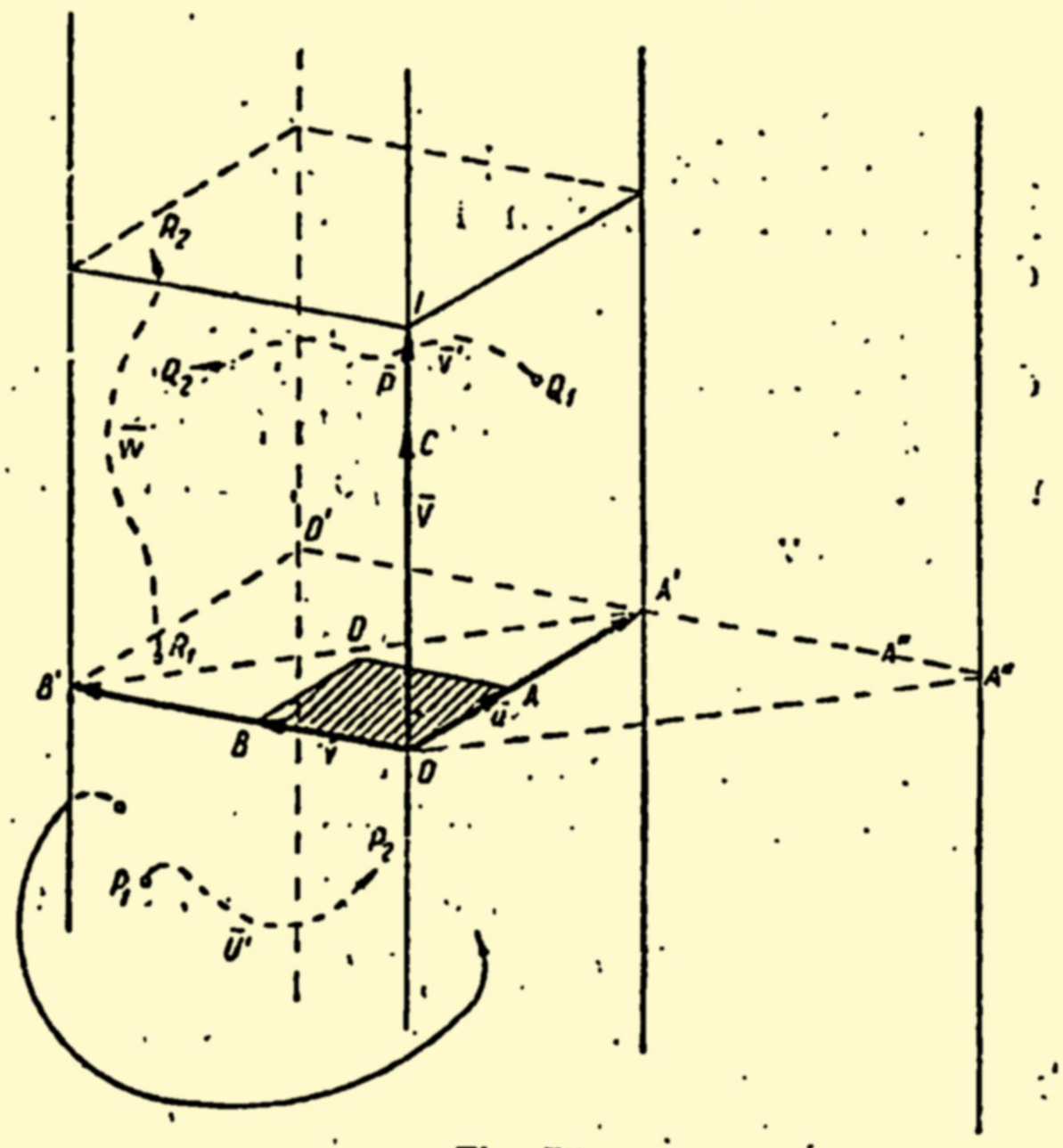


Fig. 78

Pentru a asocia acestui obiect geometric o mărime geometrică dual㠹 bivectorului contravariant, va trebui să transformăm prin dualitate în raport cu o bază dată relaţia de echivalenţă a paralelogramelor.

Fiind dată o prismă orientată (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), paralelogramul dual se obţine imediat construind vectorii $\overline{u} = \overline{OA}$ şi $\overline{v} = \overline{OB}$, dualii lui $\overline{u}'$ şi $\overline{v}'$. Fie $OA'D'B'$ (fig. 78) secţiunea în prismă prin planul bivectorului $(\overline{u}, \overline{v})$. Deplasând vârfurile D şi A pe dreapta DA, conform cu relaţia de echivalenţă a paralelogramelor orientate, punctele D' şi A' se vor deplasa pe $D'A'$ şi feţele biplanului Q_1, Q_2 se vor roti in jurul muchiilor O şi B', ajungând de exemplu în A'' şi A'.

Relaţia de echivalenţă dual㠹 celei impuse paralelogramelor este deci următoarea: *două prisme orientate, obţinute prin rotaţia unuia din biplane în jurul a două muchii adiacente sunt echivalente.*

Este inutil să observăm că proprietatea poate fi introdusă sub formă particulară a deplasării muchiei A' în A'' şi extinsă la cazul general. Vom putea scrie:

$$(\overline{u}', \overline{v}') = (\overline{u}', \overline{u}' + \overline{v}'); \quad (\overline{u}' + \lambda\overline{u}', \overline{v}') = (\overline{u}', \overline{v}').$$

Muchiile unui bivector covariant au direcţia vectorului reprezentativ al bivectorului contravariant dual. (Exerciţiu).

Bivectorilor contravarianţi coplanari le corespund bivectori covarianţi cu muchii paralele, deoarece vectorii reprezentativi sunt paraleli.

Scanned with OKEN Scanner

Doi bivrctori covarianţi cu muchiile paralele se numesc *liniar dependenţi.* Bivectorului $(\lambda\overline{u}, \overline{v})$ îi corespunde bivectorul $(\lambda\overline{u}', \overline{v}')$ şi vom avea

$$(\lambda\overline{u}, \overline{v}) = \lambda(\overline{u}, \overline{v}) \longleftrightarrow (\lambda\overline{u}', \overline{v}') = \lambda(\overline{u}', \overline{v}'),$$

unde λ este un număr real.

Este uşor de găsit reprezentarea geometrică a lui $\lambda(\overline{u}', \overline{v}')$ folosind pe aceea a lui $\lambda(\overline{u}, \overline{v})$.

Relaţia de omogenitate sub forma generală va fi

$$(\lambda\overline{u}', \mu\overline{v}') = \lambda\mu(\overline{u}', \overline{v}') \qquad (172,II)$$

şi vom avea

$$[(\alpha+\beta)\overline{u}', \overline{v}'] = \alpha(\overline{u}', \overline{v}') + \beta(\overline{u}', \overline{v}') = (\alpha+\beta)(\overline{u}', \overline{v}').$$

Toate proprietăţile deduse din relaţiile de echivalenţă şi omogenitate se regăsesc sub forma duală şi pot fi stabilite deasemenea direct. (Exerciţiu). Este suficient să asociem fiecărui bivector covariant bivectorul contravariant dual.

Bivectorul covariant esfe nul, când cei doi vectori covarianţi sunt paraleli, deci, când muchiile prismei asociate au o direcţie arbitrară,

Bivectorii cu muchiile paralele formează o specie măsurabilă cu o singură unitate. Ei sunt de forma $\lambda(\overline{u}', \overline{v}')$, deci toţi liniar dependenţi.

Vom avea deasemenea

$$(\overline{u}', \overline{v}') = -(\overline{v}', \overline{u}'),$$

deci bivectorul este *alternat.*

Proprietatea de distributivitate se pune în evidenţă ca o consecinţă a distributivităţii produsului vectorial contravariant. Vom avea:

$$(\overline{u}', \overline{v}'+\overline{w}') = (\overline{u}', \overline{v}') + (\overline{u}', \overline{w}'). \qquad (173,II)$$

Bivectorii $(\overline{u}', \overline{v}')$ şi $(\overline{u}', \overline{w}')$, având vectorul $\overline{u}'$ comun, au un biplan comun corespunzător lui $\overline{u}'$. Suma biplanelor $\overline{v}'$ şi $\overline{w}'$ este biplanul $\overline{v}'+\overline{w}'$, care va fi al doilea biplan al sumei $(\overline{u}'\ \overline{v}')+(\overline{u}', \overline{w}')$, Perechea de biplane $\overline{u}'$, $\overline{v}'+\overline{w}'$ constitue bivectorul covariant $(\overline{u}', \overline{v}'+\overline{w}')$. Direcţia muchiilor sale este dată de suma vectorilor reprezentativi ai bivectorilor $(\overline{u}, \overline{v})$ şi $(\overline{u}, \overline{w})$, deci de vectorul reprezentativ al lui $(\overline{u}, \overline{v}+\overline{w})$, dualul lui $(\overline{u}', \overline{v}'+\overline{w}')$.

Bivectorii covarianţi, care au un biplan comun, deci două feţe opuse comune, constitue un *fascicol de bivectori covarianţi.*

Doi bivectori covarianţi liniar independenţi au totdeauna un biplan comun, paralel cu planul format de muchiile lor şi determină un fascicol de bivectori.

Fiind daţi doi bivectori liniar independenţi $(\overline{u}_1', \overline{v}_1')$ şi $(\overline{u}_2', \overline{v}_2')$, orice bivector din fascicolul determinat de această bază este de forma

$$(\overline{u}', \overline{v}') = \lambda(\overline{u}_1', \overline{v}_1') + \mu(\overline{u}_2', \overline{v}_2').$$

Trei bivectori dintr'un fascicol se numesc *liniar dependenţi.* Intre trei bivectori liniar dependenţi există o relaţie liniară de forma:

$$\alpha_1(\overline{u}_1', \overline{v}_1') + \alpha_2(\overline{u}_2', \overline{v}_2') + \alpha_3(\overline{u}_3', \overline{v}_3') = 0 \qquad (174,II)$$

şi reciproc. Avem următoarea propoziţie:

Scanned with OKEN Scanner

Condiția necesară și suficientă ca trei bivectori covarianți să fie liniar dependenți este ca între ei să existe o relație de forma (174,II) *cu coeficienți nu toți nuli.*

Trei bivectori covarianți sunt liniar independenți, dacă relația (174,II) nu are loc decât pentru $\alpha_1=0$; $\alpha_2=0$; $\alpha_3=0$. Ei nu au niciun biplan comun.

Fiind dat paralelipipedul fundamental $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$; $(\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}')$, prin aplicarea dualității vom stabili corespondențele biunivoce:

$$(\bar{p}, \bar{q}) \longleftrightarrow (\bar{p}', \bar{q}'); \quad (\bar{q}, \bar{r}) \longleftrightarrow (\bar{q}', \bar{r}'); \quad (\bar{r}, \bar{p}) \longleftrightarrow (\bar{r}', \bar{p}').$$

Bivectorii $(\bar{p}', \bar{q}')$; $(\bar{q}', \bar{r}')$; $(\bar{r}', \bar{p}')$ sunt liniar independenți.

Mulțimea bivectorilor covarianți este o specie măsurabilă cu trei unități, care pot fi alese egale cu

$$(\bar{p}', \bar{q}'); \quad (\bar{q}', \bar{r}'); \quad (\bar{r}', \bar{p}'). \tag{175,II}$$

Vom avea isomorfismul:

$$\alpha(\bar{q}, \bar{r})+\beta(\bar{r}, \bar{p})+\gamma(\bar{p},\bar{q}) \longleftrightarrow \alpha(\bar{q}', \bar{r}')+\beta(\bar{r}', \bar{p}')+\gamma(\bar{p}', \bar{q}'), \tag{176,II}$$

iar bivectorii (175,II) vor constitui un sistem de unități în specia bivectorilor covarianți.

Paralelipipedul fundamental poate fi considerat în trei moduri distincte, ca format din bivectorii covarianți liniar independenți, $(\bar{p}', \bar{q}')$, $(\bar{q}', \bar{r}')$, și $(\bar{r}', \bar{p}')$, deci el constitue o bază pentru raportarea tuturor bivectorilor covarianți. Orice bivector covariant va fi de forma:

$$(\bar{u}', \bar{v}')=\alpha(\bar{q}', \bar{r}')+\beta(\bar{r}', \bar{p}')+\gamma(\bar{p}', \bar{q}'). \tag{177,II}$$

Fiecărui bivector covariant îi putem asocia un vector covariant prin isomorfismul:

$$\alpha(\bar{q}', \bar{r}')+\beta(\bar{r}', \bar{p}')+\gamma(\bar{p}', \bar{q}') \longleftrightarrow \alpha\bar{p}'+\beta\bar{q}'+\gamma\bar{r}'. \tag{178,II}$$

Transformând prin dualitate această relație, vom avea:

$$\alpha(\bar{q}, \bar{r})+\beta(\bar{r}, \bar{p})+\gamma(\bar{p}, \bar{q}) \longleftrightarrow \alpha\bar{p}+\beta\bar{q}+\gamma\bar{r}. \tag{178',II}$$

Numind *vector reprezentativ* al bivectorului covariant vectorul covariant asociat prin isomorfismul (178,II), vom avea următoarea proprietate:

Vectorul covariant reprezentativ al unui bivector covariant este dualul vectorului contravariant reprezentativ al bivectorului contravariant dual.

Este ușor de reprezentat geometric acest vector reprezentativ, construind întâi bivectorul contravariant $(\bar{u}, \bar{v})$, dual lui $(\bar{u}', \bar{v}')$. Vectorul covariant reprezentativ căutat are direcția planului bivectorului $(\bar{u}, \bar{v})$.

2. Trivectorul covariant. Figura duală unui paralepiped determinat de trei bipuncte orientate $\overline{OA}=\bar{u}$; $\overline{OB}=\bar{v}$; $\overline{OC}=\bar{w}$ este tot un paralelipiped, determinat de trei biplane orientate

$$(U_1, U_2)=\bar{u}'; \quad (V_1, V_2)=\bar{v}'; \quad (W_1, W_2)=\bar{w}'. \tag{179,II}$$

Transformând prin dualitate relațiile de echivalență, acestui obiect geometric i se asociază o mărime dublă $(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')$ cu relația de egalitate:

$$(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')=(\bar{u}'+\bar{v}', \bar{v}', \bar{w}') \tag{180,II}$$

Scanned with OKEN Scanner

Impunând operaţia de adunare prin relaţia de omogenitate

$$(\lambda\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')=\lambda(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}') \qquad (181,II)$$

prin raţionamente analoage celor făcute anterior în cazul trivectorului, suntem conduşi la o mărime măsurabilă cu o singură unitate.

Vom numi mărimea $(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')$ *trivector covariant* şi o vom considera ca mărimea duală trivectorului contravariant $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$.

Proprietăţile geometrice ale acestei mărimi se deduc prin dualitate din cele stabilite pentru trivectorul contravariant. Este instructiv să fie obţinute şi direct. (Exerciţiu).

Astfel, trivectorul covariant este o mărime alternată:

$$(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')=-(\overline{v}', \overline{u}', \overline{w}')=(\overline{v}', \overline{w}', \overline{u}')=\dots$$

Ea poate fi considerată ca *produsul exterior* al vectorilor covarianţi $\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}'$.

In acelaşi timp, punând în evidenţă, de exemplu, bivectorul covariant $(\overline{u}', \overline{v}')$ şi vectorul covariant $\overline{w}'$, mărimea

$$[(\overline{u}', \overline{v}'), \overline{w}']$$

este un produs comutativ, deci un produs scalar şi poate fi numită *produs mixt* al bivectorului $(\overline{u}', \overline{v}')$ cu vectorul $\overline{w}'$. Vom obţine astfel dualul produsului mixt $[(\overline{u}, \overline{v}'), \overline{w}]$.

Baza dualităţii fiind paralelipipedul fundamental $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$; $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$, orice trivector covariant este de forma

$$(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')=\lambda(\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'). \qquad (182,II)$$

Este uşor de văzut că vom avea în acelaşi timp

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})=\lambda(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}), \qquad (182',II)$$

deci $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ şi $(\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}')$ constituie un sistem de unităţi duale:

$$(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}) \longleftrightarrow (\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}') \qquad (183,II)$$

pentru cele două specii duale ale trivectorilor contravarianţi şi covarianţi.

Este important de observat că din (182,II) şi (182',II) deducem următoarea proprietate geometrică:

Fiind daţi doi trivectori duali $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ şi $(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')$, *paralelipipedele corespunzătoare pot fi modificate prin operaţii ce decurg din relaţiile de echivalenţă, astfel încât să aibă muchiile şi feţele paralele cu paralelipipedul fundamental.*

Prin urmare, trivectorul $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ poate fi pus sub forma:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})=(\alpha\overline{p}, \beta\overline{q}, \gamma\overline{r})=\alpha\beta\gamma(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$$

cu

$$\overline{u}=\alpha\overline{p}; \quad \overline{v}=\beta\overline{q}; \quad \overline{w}=\gamma\overline{r},$$

iar dualul său $(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')$ sub forma:

$$(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')=(\alpha\overline{p}', \beta\overline{q}', \gamma\overline{r}')=\alpha\beta\gamma(\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}')$$

cu

$$\overline{u}'=\alpha\overline{p}'; \quad \overline{v}'=\beta\overline{q}'; \quad \overline{w}'=\gamma\overline{r}'.$$

Scanned with OKEN Scanner

In fig. 79 sunt reprezentate paralelipipedele corespunzătoare şi paralelipipedul fundamental $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, paralelipipedul $(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')$ fiind haşurat.

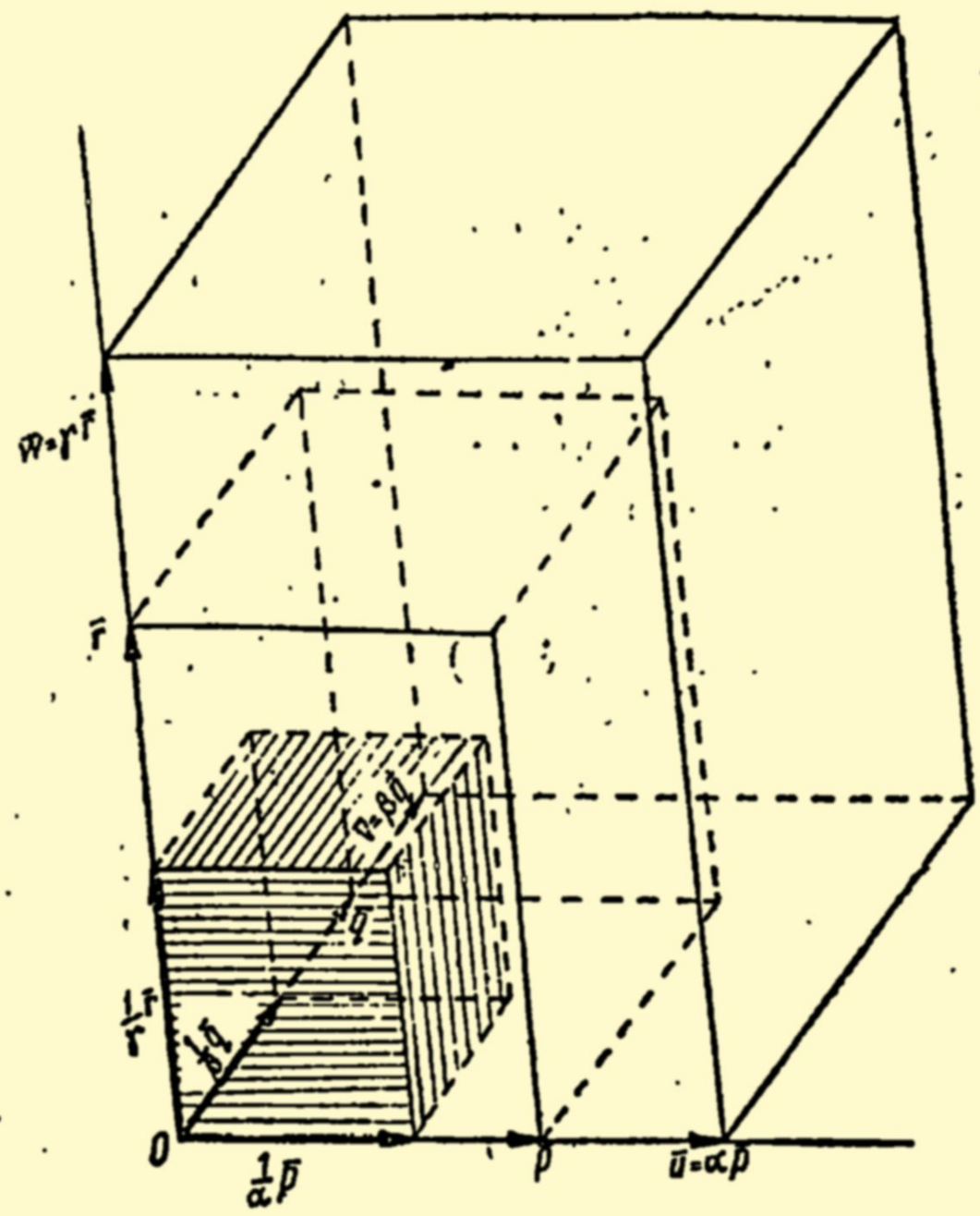


Fig. 79

Măsura vectorului covariant $\alpha\bar{p}'$, pe direcţia vectorului $\bar{p}$ ales ca unitate, fiind $\frac{1}{\alpha}$, muchiile paralelipipedului $(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}')$ vor fi vectorii contravarianţi

$$\frac{1}{\alpha}\bar{p}, \quad \frac{1}{\beta}\bar{q}, \quad \frac{1}{\gamma}\bar{r},$$

având ca măsuri inversele măsurilor lui $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Trivectorul contravariant determinat de paralelipipedul format de $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$, va fi deci

$$\left(\frac{1}{\alpha}\bar{p}, \quad \frac{1}{\beta}\bar{q}, \quad \frac{1}{\gamma}\bar{r},\right) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}).$$

Măsura sa va fi inversă măsurii trivectorului contravariant $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$.

Este clar că între trivectorii $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ şi trivectorii covarianţi $(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}') = \alpha\beta\gamma(\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}')$ există o corespondenţă biunivocă, măsurile lor fiind inverse una alteia. Pe de altă parte, aceşti trivectori sunt mărimi măsurabile cu o singură unitate, asociate aceleiaşi figuri, iar unităţile $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, $(\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}')$, derivate din sistemul fundamental, se corespund.

Măsurile acestor mărimi pseudo-scalare fiind inverse una celeilalte în sistemul dual $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$; $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ *oarecare*, mărimile vor fi considerate inverse una alteia şi vom avea:

$$(\alpha\bar{p}', \beta\bar{q}', \gamma\bar{r}') = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\bar{p}, \frac{1}{\beta}\bar{q}, \frac{1}{\gamma}\bar{r}\right)},$$

de unde:

$$(\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}') = \frac{1}{(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})}, \tag{184,II}$$

$$(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})\ (\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}') = 1, \tag{184',II}$$

Avem deci, următoarea propoziţie, care stabileşte relaţia dintre trivectorii duali:

Trivectorii duali, formaţi cu trei vectori şi reciprocii lor sunt două mărimi pseudo-scalare inverse una alteia.

Scanned with OKEN Scanner

Trivectorii formați de două sisteme de vectori reciproci se vor numi *reciproci*.

Rezultă evident, că dacă doi trivectori sunt liniar independenți, dualii lor vor fi deasemenea liniar independenți.

Vom orienta trivectorii covarianți prin trivectorii lor duali. Relația (184,II) dintre doi trivectori reciproci arată că va trebui să dăm acestor trivectori reciproci aceeași orientare, fiindcă produsul lor este pozitiv. Ori, dualul lui $(\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}')$ este reciprocul său $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$. Prin urmare:

Trivectorul covariant fundamental va avea aceeași orientare ca și reciprocul său contravariant.

Această relație se extinde la doi trivectori oarecare, duali în raport cu o bază dată $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$; $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$.

Din relația (184',II) deducem:

$$(\alpha\overline{p}, \beta\overline{q}, \gamma\overline{r})\ (\alpha\overline{p}', \beta\overline{q}', \gamma\overline{r}') = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \geqq 0,$$

deci, ținând seama de (182,II) și (182',II), adică de faptul că orice trivector poate fi făcut paralel cu trivectorul fundamental, vom avea în general:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})\ (\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}') = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \geqq 0; \qquad (185,II)$$

$$(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}') = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})}.$$

Prin urmare:

Produsul a doi trivectori duali este egal cu pătratul măsurii lor în raport cu trivectorii reciproci fundamentali $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$, $(\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}')$.

Orientând trivectorul $(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')$ prin dualul său $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ și produsul lor fiind pozitiv, avem proprietatea:

Orice trivector covariant are orientarea dualului său contravariant.

Constatăm astfel că *orientarea spațiului printr'un triedru fundamental atrage după sine orientarea tuturor mărimilor derivate obținute ca produse de vectori*, cu ajutorul dualității și isomorfismelor stabilite.

Aplicația 1. *Vectorul contravariant și bivectorul covariant.* Fiind dat un trivector covariant $(\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}')$ și un bivector covariant oarecare $(\overline{u}', \overline{v}')$, există o infinitate de vectori covarianți $\overline{w}'$, astfel încât

$$(\overline{u}'\overline{v}'\overline{w}') = (\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}'). \qquad (186,II)$$

Un astfel de vector $\overline{w}'$ se obține (fig. 78) luând dualul $(\overline{u}, \overline{v})$ al lui $(\overline{u}', \overline{v}')$ și construind biplanul $\overline{w}' = (R_1, R_2)$, paralel cu $(\overline{u}, \overline{v})$ sau, ceeace este echivalent, paralel cu vectorul covariant reprezentativ al lui $(\overline{u}', \overline{v}')$, impunând condiția (185,II) volumului format.

Mulțimea tuturor vectorilor $\overline{w}'$, care satisfac condiția (186, II), se obține ca o combinație liniară de forma $\overline{w}' + \lambda\overline{u}' + \mu\overline{v}'$.

Notând cu

$$\overline{P} = \overline{OI}$$

segmentul orientat interceptat de biplanul (R_1, R_2) pe muchiile prismei $(\overline{u}', \overline{v}')$, acest vector, care rămâne neschimbat când $\overline{w}'$ descrie combinația liniară $\overline{w}' + \lambda\overline{u}' + \mu\overline{v}'$, este *vectorul contravariant* $\overline{P}$, *asociat bivectorului covariant* $(\overline{u}', \overline{v}')$.

Scanned with OKEN Scanner

Asocierea este independentă de orientarea spaţiului. Bivectorului nul i se asociază un vector nul, iar relaţia de asociere este un isomorfism determinat prin alegerea trivectorului covariant $(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')$, cum se poate vedea refăcând prin dualitate raţionamentele din § 70. (Exerciţiu).

Presupunând $(\bar{u}', \bar{v}') \neq 0$, triedrul $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{P})$ va fi nedegenerat. Să măsurăm vectorii cu trei unităţi pe direcţiile lui $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{P})$. Vom avea

$$\bar{u}' = \alpha\bar{p}'; \quad \bar{v}' = \beta\bar{q}'; \quad \bar{w}' = \gamma\bar{r}',$$

de unde

$$(\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}') = (\alpha\bar{p}', \beta\bar{q}', \gamma\bar{r}') = (\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'),$$

deci

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

Mărimea obţinută, raportând pe $(\bar{u}', \bar{v}')$ la $(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')$, va fi:

$$\frac{(\bar{u}', \bar{v}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')} = \frac{(\alpha\bar{p}', \beta\bar{q}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')} = \alpha\beta\frac{(\bar{p}', \bar{q}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')} = \frac{1}{\gamma}\frac{(\bar{p}', \bar{q}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')}.$$

Măsura acestei mărimi în raport cu unitatea $\frac{(\bar{p}', \bar{q}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')}$ este $\frac{1}{\gamma}$, deci inversa măsurii lui $\bar{w}'$ pe direcţia lui $\bar{P}$. Cum însă, măsura unui vector covariant pe direcţia unui vector contravariant este inversa măsurii segmentului orientat, interceptat pe acel vector, $\frac{1}{\gamma}$ va fi chiar măsura lui $\overline{OI} = \bar{P}$.

Punând

$$\bar{P}_1 = \frac{(\bar{u}', \bar{v}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')}$$

fără a cunoaşte specia acestei mărimi, vom avea:

$$\bar{P}_1\bar{w}' = \frac{(\bar{u}'\bar{v}'\bar{w}')}{(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')} = 1$$

pentru orice $\bar{w}'$ din combinaţia liniară $\bar{w}' + \lambda\bar{u}' + \mu\bar{v}'$. Aceeaşi relaţie se obţine între vectorul contravariant $\bar{P}$ şi $\bar{w}'$, iar dacă înlocuim $\bar{w}'$ prin $\nu\bar{w}'$, vom avea:

$$\bar{P}_1(\lambda\bar{u}' + \mu\bar{v}' + \nu\bar{w}') = \nu.$$

Produsul scalar al mărimii $\bar{P}_1$ cu orice vector covariant este egal cu produsul scalar al vectorului contravariant $\bar{P}$ cu acelaşi vector.

In adevăr, avem:

$$\bar{P}\bar{u}' = 0 \quad \text{şi} \quad \bar{P}\bar{v}' = 0$$

deoarece $\bar{P}$ este paralel atât cu $\bar{u}'$ cât şi cu $\bar{v}'$, fiind situat pe muchia $\bar{OI}$.

In acelaş timp

$$\bar{P}\bar{w}' = 1$$

fiindcă $\bar{P} = \overline{OI}$ are extremităţile pe R_1 şi R_2. Deci

$$\bar{P}(\lambda\bar{u}' + \mu\bar{v}' + \nu\bar{w}') = \nu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\overline{P}_1$ are pe direcţia lui $\overline{P}$ aceeaşi măsură r în raport cu unitatea $\frac{(\overline{p}', \overline{q}')}{(\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}')}$, iar produsul său scalar cu orice vector covariant $\lambda\overline{u}' + \mu\overline{v}' + \nu\overline{w}'$ are aceeaşi valoare ν ca produsul scalar al lui $\overline{P}$ cu acelaşi vector, *vom considera mărimea* $\overline{P}_1$ *egală cu* $\overline{P}$, *deci ca fiind un vector contravariant:*[1])

$$\overline{P} = \frac{(\overline{u}', \overline{v}')}{\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}'} \qquad (187, II)$$

Prin urmare:

Vectorul contravariant, asociat unui bivector covariant oarecare $(\overline{u}', \overline{v}')$ *este raportul acestuia la trivectorul de bază* $(\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}')$ *al isomorfismului,*

$$(\overline{u}', \overline{v}') \longleftrightarrow \overline{P} = \frac{(\overline{u}', \overline{v}')}{(\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}')}$$

Vectorul $\overline{P}$ astfel definit este dualul vectorului $\overline{P}'$, asociat bivectorului contravariant $(\overline{u}, \overline{v})$, dualul lui $(\overline{u}', \overline{v}')$ şi exprimat prin formula (153, II), deci este *egal cu vectorul reprezentativ al lui* $(\overline{u}, \overline{v})$ *în baza aleasă* $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$; $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$.

Aplicaţia 2. *Dualitate şi reciprocitate.* Fiind daţi trei vectori contravarianţi $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ cu $(\overline{p}\overline{q}\overline{r}) \neq 0$, reciprocii lor $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$ sunt în acelaşi timp dualii lor în dualitatea

$$\overline{p} \longleftrightarrow \overline{p}'; \quad \overline{q} \longleftrightarrow \overline{q}'; \quad \overline{r} \longleftrightarrow \overline{r}'.$$

Expresiilor (79, II) ale reciprocilor

$$\overline{p}' = \frac{(\overline{q}, \overline{r})}{\overline{p}\overline{q}\overline{r}}; \quad \overline{q}' = \frac{(\overline{r}, \overline{p})}{\overline{p}\overline{q}\overline{r}}; \quad \overline{r}' = \frac{(\overline{p}, \overline{q})}{\overline{p}\overline{q}\overline{r}}$$

le corespund algebric, prin dualitate, formulele:

$$\overline{p} = \frac{(\overline{q}', \overline{r}')}{\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}'}; \quad \overline{q} = \frac{(\overline{r}', \overline{p}')}{\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}'}; \quad \overline{r} = \frac{(\overline{p}', \overline{q}')}{\overline{p}'\overline{q}'\overline{r}'}. \qquad (188, II)$$

Aceste expresii au acum o semnificaţie precisă prin definirea bivectorilor şi trivectorilor covarianţi, deoarece ştim că o expresie de forma (187, II) defineşte un vector contravariant. În acelaşi timp, sistemul de relaţii

$$\overline{p}\overline{p}' = 1; \qquad \overline{q}\overline{q}' = 1; \qquad \overline{r}\overline{r}' = 1;$$

$$\overline{p}\overline{q}' = \overline{p}'\overline{q} = 0; \qquad \overline{q}\overline{r}' = \overline{q}'\overline{r} = 0; \qquad \overline{r}\overline{p}' = \overline{r}'\overline{p} = 0,$$

satisfăcut de $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ şi reciprocii lor $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$, admite ca soluţii vectorii contravarianţi (188, II) şi numai pe aceştia.

În adevăr, dacă ar mai exista un sistem de soluţii $\overline{p}_1, \overline{q}_1, \overline{r}_1$, ar trebui să avem:

$$\overline{p}'(\overline{p} - \overline{p}_1) = 0; \quad \overline{q}'(\overline{p} - \overline{p}_1) = 0; \quad \overline{r}'(\overline{p} - \overline{p}_1) = 0.$$

---

[1]) Vom da acestui criteriu de recunoaştere a naturii unei mărimi — prin comparaţia măsurilor sale cu măsurile unei mărimi cunoscute — un caracter general, în paragrafele următoare, sub numele de criteriul măsurii.

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul $\overline{p}-\overline{p}_1$ ar fi paralel cu vectorii covarianţi $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$ liniar independenţi, ceeace nu este posibil decât dacă

$$\overline{p}-\overline{p}_1=0; \quad \overline{p}_1=\overline{p}.$$

Prin urmare, expresiile vectorilor $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$, în funcţie de $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$, sunt cele date de (188, II).

In geometria metrică aceste formule pot fi stabilite prin verificare sau prin rezolvarea sistemului de relaţii, la care se adaugă

$$(\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r})\,(\overline{p}'\,\overline{q}'\,\overline{r}')=1,$$

deoarece produsele vectoriale sunt înlocuite prin vectorii reprezentativi, iar produsele multiple sunt reduse prin formula de desvoltare a dublului produs vectorial. In geometria afină este necesar să se dea semnificaţia mărimilor ce intervin în aceste produse şi să se stabilească relaţiile dintre ele prin dualitate.

Deoarece între mărimile duale există isomorfismul determinat de corespondenţa

$$\alpha\overline{p}+\beta\overline{q}+\gamma\overline{r} \longleftrightarrow \alpha\overline{p}'+\beta\overline{q}'+\gamma\overline{r}',$$

putem enunţa următoarea proprietate:

Orice relaţie de egalitate între mărimi obţinute prin produse de vector poate fi transformată prin dualitate într'o relaţie valabilă între mărimile duale.

Este suficient să raportăm vectorii la cele două baze reciproce $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$; $\overline{p}', \overline{q}', \overline{r}'$ şi să înlocuim fiecare mărime prin duala sa, deci fiecare vector prin dualul său. Vectorii de bază se vor transforma în reciprocii lor, iar măsurile vor rămâne neschimbate, astfel încât relaţiei date îi va corespunde relaţia obţinută, înlocuind fiecare vector prin dualul său.

Astfel, relaţia

$$\overline{P}'=\frac{(\overline{u}, \overline{v})}{\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}},$$

care determină vectorul covariant asociat unui bivector contravariant, se poate scrie:

$$\overline{P}'=\frac{(\alpha_1\overline{p}+\beta_1\overline{q}+\gamma_1\overline{r},\ \alpha_2\overline{p}+\beta_2\overline{q}+\gamma_2\overline{r})}{\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}}=$$

$$=\frac{1}{\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}}\left[(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\,(\overline{p}, \overline{q})+(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)\,(\overline{q}, \overline{r})+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)\,(\overline{r}, \overline{p})\right].$$

Transformată prin dualitate, această relaţie va deveni:

$$\overline{P}=\frac{1}{\overline{p}'\,\overline{q}'\,\overline{r}'}\left[(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\,(\overline{p}', \overline{q}')+(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)(\overline{q}'\overline{r}')+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)\,(\overline{r}', \overline{p}')\right]=$$

$$=\frac{(\alpha_1\overline{p}'+\beta_1\overline{q}'+\gamma_1\overline{r}',\ \alpha_2\overline{p}'+\beta_2\overline{q}'+\gamma_2\overline{r}')}{\overline{p}'\,\overline{q}'\,\overline{r}'}=\frac{(\overline{u}', \overline{v}')}{\overline{p}'\,\overline{q}'\,\overline{r}'}$$

şi va defini un vector contravariant $\overline{P}$, dualul lui $\overline{P}'$, asociat bivectorului covariant $(\overline{u}', \overline{v}')$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca formulele astfel obţinute să aibă sens, este necesar ca produsele de vectori, care intervin în ele, să aibă ele însele un sens, deci să fie asociate unor obiecte geometrice (cu semnificaţia de produse de vectori).

NOTA II. DUBLUL PRODUS VECTORIAL

1. Dublul produs vectorial ca mărime geometrică. Isomorfismul dintre bivectori şi vectori, definit prin relaţiile duale:

$$\frac{(\bar{u}, \bar{v})}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}} = \bar{P}' \longleftrightarrow \frac{(\bar{u}', \bar{v}')}{\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'} = \bar{P}, \tag{189,II}$$

ne permite să considerăm produse vectoriale multiple şi să introducem mărimi măsurabile cu trei unităţi isomorfe cu vectorii.

In geometria metrică reducerea acestor produse multiple la produse vectoriale şi a mărimilor determinate prin ele la mărimi vectoriale este bazată pe operaţia de dublu produs vectorial.

Este necesar, în conformitate cu observaţia făcută mai sus (§ 53), să examinăm în primul rând mărimile obţinute prin operaţiile algebrice introduse.

Dublul produs vectorial $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ din geometria metrică este un vector obţinut reducând întâi produsul $\bar{v} \times \bar{w}$ la vectorul reprezentativ $\bar{z} = \bar{v} \times \bar{w}$ şi efectuând apoi produsul vectorial $\bar{u} \times \bar{z}$.

In geometria afină, *înlocuirea produsului vectorial* $\bar{v} \times \bar{w}$ *prin vectorul reprezentativ nu are caracter invariant,* deoarece acest vector contravariant depinde de baza $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ a isomorfismului, stabilit în prealabil între bivectori şi vectori contravarianţi, putând fi un vector oarecare $\bar{V}$, necoplanar cu $(\bar{u}, \bar{v})$. Expresia astfel obţinută, neavând o semnificaţie independentă de baza $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, nu constitue o mărime asociată unui obiect geometric, determinat de vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Prin urmare: *un dublu produs vectorial de forma* $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ *nu determină o mărime asociată unui obiect geometric determinat numai de vectorii* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Pentru a obţine un dublu produs vectorial cu semnificaţia de mărime geometrică asociată unui obiect geometric, vom considera de exemplu, produsul vectorial $\bar{u} \times \bar{P}$, unde $\bar{u}$ şi $\bar{P}$ sunt doi vectori contravarianţi oarecare. Fie $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$; $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ un paralelipiped fundamental şi $(\bar{v}', \bar{w}')$ bivectorul covariant *asociat lui P prin isomorfismul* (189,II). Vom putea scrie:

$$\bar{u} \times \bar{P} = \frac{\bar{u} \times (\bar{v}', \bar{w}')}{\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'} = \frac{1}{\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'} \left[\bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}') \right],$$

deci

$$\frac{\bar{u} \times \bar{P}}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}} = \frac{1}{(\bar{p}\bar{q}\bar{r})(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')} \left[\bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}') \right] = \bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}').$$

Ori, mărimea din primul membru este un vector covariant, iar cea din ultimul membru, un produs formal dintre un vector contravariant şi un bivector covariant. Prin urmare:

Dublul produs vectorial

$$\bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}') \tag{190,II}$$

Scanned with OKEN Scanner

dintre un vector contravariant şi un bivector covariant defineşte un vector covariant, independent de bază şi deci, o mărime asociată obiectului geometric $\bar{u}, (\bar{v}', \bar{w}')$, *reprezentat printr'un segment orientat şi o prismă orientată.*

Vectorul contravariant $\overline{P}$ fiind oarecare, bivectorul covariant $(\bar{v}', \bar{w}')$ poate fi deasemenea oarecare. Schimbarea trivectorului $(\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}')$ nu modifică decât măsura lui $\overline{P}$, a cărui direcţie este aceea a muchiilor prismei $(\bar{v}', \bar{w}')$.

In fig. 80 sunt reprezentaţi vectorii covarianţi

$$\bar{v}' = (V_1, V_2); \quad \bar{w}' = (W_1, W_2)$$

formând bivectorul covariant $(\bar{v}', \bar{w}')$ şi vectorul contravariant $\bar{u} = \overline{OD}$. O secţiune oarecare printr'un plan, care trece prin O, determină pe feţele prismei vectorii contravarianţi

$$\overline{OB} = b; \quad \overline{OC} = \bar{c},$$

iar, împreună cu o secţiune paralelă cu ea, interceptează vectorul

$$\overline{OA} = \bar{a}$$

pe muchiile prismei $(\bar{v}', \bar{w}')$. Vectorul $\bar{a}$ este paralel cu vectorul

$$\overline{P} = \frac{(\bar{v}', \bar{w}')}{\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'} = (\bar{p}\bar{q}\bar{r})(\bar{v}', \bar{w}'),$$

asociat lui $(\bar{v}', \bar{w}')$.

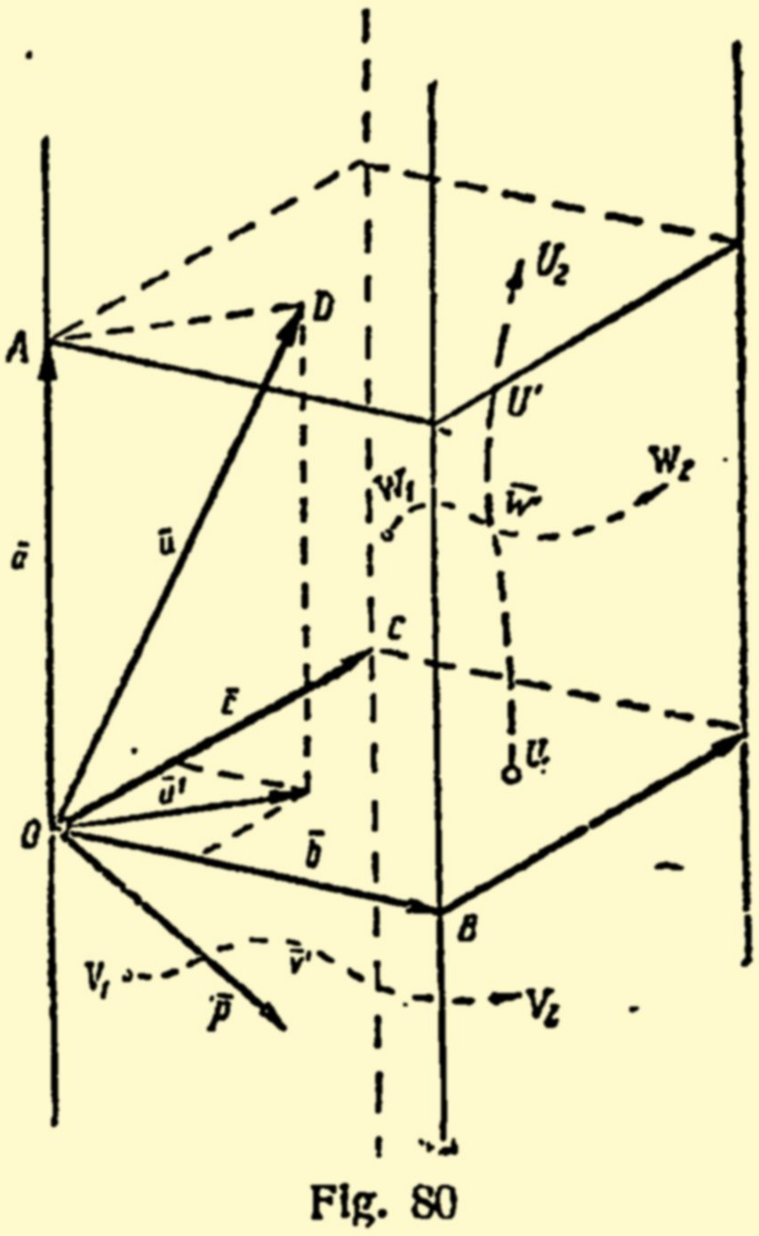


Fig. 80

Dublul produs $\bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}')$ poate fi scris sub forma

$$\bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}') = \frac{1}{\bar{p}\bar{q}\bar{r}} (\bar{u} \times \overline{P}). \qquad (191,II)$$

Relaţia de echivalenţă a figurilor obiectului geometric format de $\overline{OD}$ şi prisma orientată (V_1, V_2), (W_1, W_2) se deduce din (191,II), deoarece factorul $\bar{u} \times \overline{P}$ este un produs vectorial de vectori contravarianţi. Vom avea:

$$(\bar{u} \times \overline{P}) = (\bar{u} + \lambda \overline{P}) \times (\overline{P} + \mu \bar{u}). \qquad (192,II)$$

Dublul produs vectorial nu se schimbă dacă se adaugă vectorului $\bar{u}$ *un vector contravariant, paralel cu muchiile bivectorului covariant* $(\bar{v}', \bar{w}')$; *deasemenea, dacă se adaugă bivectorului* $(\bar{v}', \bar{w}')$ *un bivector covariant cu muchiile paralele cu vectorul contravariant* $\bar{u}$.

Relaţia de omogenitate, reprezentând *adunarea dublelor produse vectoriale paralele* (asociate la prisme cu muchii paralele şi la vectori $\lambda \overline{OD}$ paraleli) va fi:

$$\lambda \bar{u} \times (\mu \bar{v}' \times \nu \bar{w}') = \lambda\mu\nu [\bar{u} \times (\bar{v}' \times \bar{w}')] \qquad (193,II)$$

şi se va deduce din proprietatea analoagă a bivectorului contravariant.

Aceste duble produse formează o specie măsurabilă cu o singură unitate.

Scanned with OKEN Scanner

Dublul produs vectorial este nul când cei doi factori sunt paraleli, deci când vectorul contravariant $\overline{u}$ este paralel cu muchiile prismei asociate bivectorului covariant $(\overline{v}', \overline{w}')$.

Evident, cazurile $\overline{u}=0$ şi $(\overline{v}', \overline{w}')=0$ sunt cuprinse în această definiţie a paralelismului.

Dublul produs vectorial este *alternat* în cei doi factori. Vom avea deci

$$\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')=-(\overline{v}'\times\overline{w}')\times\overline{u}, \qquad (194,II)$$

mărimea din membrul al doilea fiind *opusă* celei din membrul întâi.

Proprietatea de distributivitate a produsului vectorial atrage, deasemenea, după sine distributivitatea dublului produs vectorial. Vom avea:

$$(\overline{u}+\overline{u}_1)\times(\overline{v}'\times\overline{w}')=\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')+\overline{u}_1\times(\overline{v}'\times\overline{w}'); \qquad (195,II)$$

$$\overline{u}\times[(\overline{v}'\times\overline{w}')+(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1')]=\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')+\overline{u}\times(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1').$$

Aceste relaţii definesc adunarea a două duble produse vectoriale, care au un factor comun.

Folosind relaţiile de echivalenţă şi omogenitate, putem face ca două duble produse vectoriale oarecare să aibă un factor comun. În adevăr, este suficient să considerăm bivectorii contravarianţi isomorfi cu aceste duble produse vectoriale prin isomorfismul (191,II) şi să aplicăm acestor bivectori operaţiile corespunzătoare.

Vom putea face ca unul din cei doi factori $\overline{u}$ sau $\overline{P}$ să aibă direcţia dreptei de intersecţie a planelor celor doi bivectori.

Două duble produse vectoriale oarecare

$$\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}') \quad \text{şi} \quad \overline{u}_1\times(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1')$$

pot fi transformate prin echivalenţă, astfel încât să aibă, fie vectorul $\overline{u}$, fie bivectorul $(\overline{v}', \overline{w}')$, paraleli.

Fie $(\overline{u}, \overline{P})$ şi $(\overline{u}_1, \overline{P}_1)$ bivectorii contravarianţi, asociaţi celor două produse vectoriale şi $\overline{\tau}$ un vector pe intersecţia planelor acestor bivectori. Vom putea scrie:

$$(\overline{u}, \overline{P})=(\alpha\overline{\tau}, \overline{P})=(\overline{\tau}, \alpha\overline{P}); \quad (\overline{u}_1, \overline{P}_1)=(\overline{\tau}, \alpha_1\overline{P}_1),$$

dacă $\overline{\tau}$ nu este paralel cu $\overline{P}$ sau $\overline{P}_1$, deci cele două duble produse vor deveni

$$\alpha\overline{\tau}\times(\overline{v}'\times\overline{w}') \quad \text{şi} \quad \alpha_1\overline{\tau}\times(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1').$$

Vom avea deasemenea:

$$(\overline{u}, \overline{P})=(\overline{u}, \beta\overline{\tau})=(\beta\overline{u}, \overline{\tau}); \quad (\overline{u}_1, \overline{P}_1)=(\beta_1\overline{u}_1, \overline{\tau}),$$

dacă $\overline{u}$ sau $\overline{u}_1$ nu sunt paraleli cu $\overline{\tau}$.

Evident, în cazul când $\overline{\tau}$ este paralel cu unul din factori, putem modifica direcţia acestuia pentru a reveni la cazurile examinate.

Suntem astfel conduşi la suma a două duble produse vectoriale oarecare:

Suma a două duble produse vectoriale este un dublu produs vectorial.

Dublele produse vectoriale formează o specie măsurabilă cu trei unităţi.

Scanned with OKEN Scanner

Ambele propoziţii rezultă din faptul că dublele produse vectoriale reprezintă vectori covarianţi prin isomorfism cu bivectorii, dar se pot demonstra şi direct, folosind rezultatele de mai sus (Exerciţiu).

Două duble produse vectoriale paralele se numesc *liniar dependente.* Ele vor fi proporţionale, deci vor satisface o relaţie de forma:

$$\alpha\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')+\beta\overline{u}_1\times(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1')=0.$$

Două duble produse vectoriale liniar independente determină un *fascicol* de duble produse vectoriale, adică mulţimea tuturor mărimilor de forma :

$$\overline{U}\times(\overline{V}'\times\overline{W}')=\alpha\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')+\beta\overline{u}_1\times(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1')$$

având un factor comun τ, care poate fi pus în evidenţă ca mai sus.

Un fascicol de duble produse vectoriale este o specie măsurabilă cu două unităţi.

Trei duble produse vectoriale legate prin relaţia liniară:

$$\alpha_1\overline{u}_1\times(\overline{v}_1'\times\overline{w}_1')+\alpha_2\overline{u}_2\times(\overline{v}_2'\times\overline{w}_2')+\alpha_3\overline{u}_3\times(\overline{v}_3'\times\overline{w}_3')=0 \qquad (196,II)$$

cu coeficienţi nu toţi nuli, se numesc *liniar dependente.*

Ele aparţin aceluiaşi fascicol, putând fi şi paralele.

Trei duble produse vectoriale liniar independente constitue un sistem de unităţi al speciei lor. Orice alt dublu produs vectorial este o combinaţie liniară a acestor unităţi, coeficienţii respectivi reprezentând măsura acestuia în raport cu baza considerată. Evident, această bază se reduce la o bază de vectori covarianţi (sau de bivectori contravarianţi).

Fie $\overline{p},\overline{q},\overline{r}$; $\overline{p}',\overline{q}',\overline{r}'$ un paralelipiped fundamental al spaţiului afin. Să considerăm dublele produse vectoriale formate cu vectorii bazei. Vom avea, ţinând seama de (191,II)

$$\overline{p}\times(\overline{q}'\times\overline{r}')=\frac{1}{\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}}(\overline{p}\times\overline{p})=0;$$

$$\overline{p}\times(\overline{r}'\times\overline{p}')=\frac{1}{\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}}(\overline{p}\times\overline{q})=\overline{r}';$$

$$\overline{p}\times(\overline{p}'\times\overline{q}')=\frac{1}{\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}}(\overline{p}\times\overline{r})=-\overline{q}'.$$

Prin urmare:

Dublele produse vectoriale formate cu vectorii fundamentali şi având trei factori diferiţi sunt nule. Cele formate dintr'un vector, dualul său şi un al doilea vector covariant sunt egale cu acest al doilea vector covariant — când constitue factorul din mijloc, şi cu opusul său — când este ultimul.

Vom avea formulele:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}\times(\overline{q}'\times\overline{r}')=\overline{q}\times(\overline{r}'\times\overline{p}')=\overline{r}\times(\overline{p}'\times\overline{q}')=0;\\
&\overline{q}\times(\overline{p}'\times\overline{q}')=\overline{r}\times(\overline{p}'\times\overline{r}')=\overline{p}';\\
&\overline{r}\times(\overline{q}'\times\overline{r}')=\overline{p}\times(\overline{q}'\times\overline{p}')=\overline{q}';\\
&\overline{p}\times(\overline{r}'\times\overline{p}')=\overline{q}\times(\overline{r}'\times\overline{q}')=\overline{r}';
\end{aligned} \qquad (197,II)$$

cele obţinute prin permutarea factorilor deducându-se imediat. Orice dublu

Scanned with OKEN Scanner

produs vectorial poate fi raportat la această bază, formată din trei duble produse vectoriale liniar independente şi deci pus sub forma:

$$\bar{u}\times(\bar{v}'\times\bar{w}')=\alpha\bar{q}\times(\bar{p}'\times\bar{q}')+\beta\bar{r}\times(\bar{q}'\times\bar{r}')+\gamma\bar{p}\times(\bar{r}'\times\bar{p}'). \quad (198,II)$$

Dublul produs vectorial astfel definit, fiind un vector covariant, va fi numit *dublu produs vectorial covariant. Produsul*

$$\bar{u}'\times(\bar{v}\times\bar{w})+\frac{1}{\bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'}(\bar{u}'\times\bar{P}') \quad (199,II)$$

dintre un vector covariant şi un bivector contravariant defineşte un vector contravariant, independent de baza $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$; $\bar{p}',\bar{q}',\bar{r}'$. El este o mărime asociată obiectului geometric $\bar{u}'$, $(\bar{v},\bar{w})$, reprezentat printr'un biplan şi un paralelogram, ambele orientate.

Vom numi *dublu produs vectorial contravariant* această mărime, duală dublului produs vectorial covariant.

Proprietăţile sale se deduc prin dualitate din cele stabilite mai sus.

2. Formulele de desvoltare ale dublelor produse vectoriale. Presupunând $\bar{u}\neq 0$ şi $(\bar{v}',\bar{w}')\neq 0$ şi intersectând prisma $(\bar{v}',\bar{w}')$ printr'un biplan oarecare $\bar{U}'=(U_1,U_2)$ (fig. 80), se determină un paralelipiped având ca muchii

$$\overline{OA}=\bar{a};\quad \overline{OB}=\bar{b};\quad \overline{OC}=\bar{c},$$

care poate fi ales ca paralelipiped fundamental. Vom avea;

$$\bar{u}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c};$$

$$\bar{v}'=\frac{\bar{c}\times\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}};\quad \bar{w}'=\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}};\quad \bar{U}'=\frac{\bar{b}\times\bar{c}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}: \quad (200,II)$$

$$\bar{a}=\frac{\bar{v}'\times\bar{w}'}{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}=(\bar{a}\bar{b}\bar{c})(\bar{v}'\times\bar{w}'),\ \text{etc.}$$

Vectorii $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$; $\bar{U}',\bar{v}',\bar{w}'$ sunt reciproci unii altora.[1])

Dublul produs vectorial $\bar{u}\times(\bar{v}'\times\bar{w}')$ poate fi scris succesiv:

$$\bar{u}\times(\bar{v}'\times\bar{w}')=\frac{\bar{u}\times\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}=\frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}[(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c})\times\bar{a}]=$$

$$=\frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}[\beta(\bar{b}\times\bar{a})+\gamma(\bar{c}\times\bar{a})]=\gamma\bar{v}'-\beta\bar{w}'. \quad (201,II)$$

Coeficienţii β şi γ se determină din formulele (200,II) înmulţind expresia lui $\bar{u}$ scalar cu $\bar{v}',\bar{w}'$. Vom avea

$$\beta=(\bar{u}\bar{v}');\quad \gamma=(\bar{u}\bar{w}'),$$

de unde:

$$\bar{u}\times(\bar{v}'\times\bar{w}')=\bar{v}'\ (\bar{u}\bar{w}')-\bar{w}'\ (\bar{u}\bar{v}'). \quad (202,II)$$

Se obţine astfel *formula de desvoltare a dublului produs vectorial covariant*, a cărei analogie cu cea cunoscută din geometria metrică este evidentă.

---

[1]) S'a notat $\bar{U}'$ în loc de $\bar{u}$ pentru a se evita confuzii eventuale: $\bar{u}$ şi $\bar{U}'$ nu sunt duali

Scanned with OKEN Scanner

Ea se obține *amplificând factorul din mijloc cu produsul scalar al celor extremi și scăzând din acesta ultimul factor, amplificat cu produsul scalar al primilor doi.*

Această formulă pune în evidență pe altă cale faptul că dublul produs vectorial este un vector covariant.

Din formula (202,II) deducem, înmulțind scalar cu $\overline{u}$:

$$\overline{u}\,[\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')]=0.$$

Aceasta arată că:

Dublul produs vectorial covariant este un vector covariant paralel cu vectorul contravariant $\overline{u}$.

El este un vector covariant din fascicolul determinat de $\overline{v}'$ *și* $\overline{w}'$, *care conține vectorul* $\overline{u}$, *dacă* $(\overline{v}', \overline{w}')\neq 0$.

Formula de desvoltare este valabilă și în cazurile $\overline{u}=0$ sau $(\overline{v}', \overline{w}')=0$, dublul produs vectorial fiind atunci nul, cum se poate verifica imediat.

Formula de desvoltare a dublului produs vectorial contravarian se deduce prin dualitate. Vom avea:

$$[\overline{u}'\times(\overline{v}\times\overline{w})=\overline{v}\,(\overline{u}'\overline{w})]-\overline{w}\,[(\overline{u}'\overline{v}). \qquad (203,II)$$

Dublul produs vectorial contravariant $\overline{u}'\times(\overline{v}\times\overline{w})$ *este paralel cu vectorul covariant* $\overline{u}'$. *El este un vector contravariant din fascicolul determinat de vectorii* $\overline{v}$ *și* $\overline{w}$, *care este conținut de vectorul covariant* $\overline{u}'$, *dacă* $(\overline{v}, \overline{w})\neq 0$.

Vectorul $\overline{a}$, asociat bivectorului covariant $(\overline{v}', \overline{w}')$ în isomorfismul definit prin baza $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$; $\overline{U}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$, este în același timp vectorul reprezentativ al bivectorului contravariant $(\overline{b}, \overline{c})$, dualul lui $(\overline{v}', \overline{w}')$. (Nota I, Aplicația 1).

Pe de altă parte, vectorul

$$\overline{b}\,(\overline{u}\overline{w}')-\overline{c}\,(\overline{u}\overline{v}'),$$

dualul dublului produs vectorial covariant (202,II), este în același timp reprezentativul său în dualitate.

Acest vector este coplanar cu $\overline{b}$ și $\overline{c}$, deci vom putea stabili următoarea propoziție (fig. 80):

Vectorul contravariant $\overline{P}$, *reprezentativ al dublului produs vectorial covariant* $\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')$, *este paralel cu bivectorul* $(\overline{b}, \overline{c})$, *dualul lui* $(\overline{v}', \overline{w}')$ *în dualitatea definită prin paralelipipedul format de* $(\overline{v}', \overline{w}')$ *și un vector covariant oarecare* $\overline{U}'$, *deci paralel cu* $\overline{U}'$, *cu condiția* $(\overline{U}'\overline{v}'\overline{w}')\neq 0$.

Rezultă că direcția vectorului $\overline{P}$, reprezentativ al dublului produs vectorial covariant $\overline{u}\times(\overline{v}'\times\overline{w}')$, depinde de alegerea vectorului covariant $\overline{U}'$.

In geometria metrică, dublul produs vectorial are ca al doilea factor bivectorul contravariant $(\overline{v}, \overline{w})$, dual al lui $(\overline{v}', w')$ față de o bază ortogonală. Formula de desvoltare conduce la un vector contravariant

$$\overline{v}\,(\overline{u}\overline{w})-\overline{w}\,[(\overline{u}\overline{v})=\overline{u}\times(\overline{v}\times\overline{w})$$

din planul bivectorului $(\overline{v}, \overline{w})$, având direcția lui $\overline{P}$. Acest vector este unic determinat, deoarece vectorul covariant $\overline{U}'$ este determinat prin cunoașterea lui $(\overline{v}, w)$.

Scanned with OKEN Scanner

Facem observaţia că formula de desvoltare din geometria metrică:

$$\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})=\bar{v}\,(\bar{u}\bar{w})-\bar{w}\,(\bar{u}\bar{v})$$

este numai *formal* echivalentă cu cea din geometria afină, deoarece produsele scalare $(\bar{u}\bar{v})$ şi $(\bar{u}\bar{w})$ au dimensiunile unor lungimi la pătrat, pe când $(\bar{u}\bar{v}')$ şi $(\bar{u}\bar{w}')$ sunt numere.

EXERCIŢII

1. Să se arate că produsul scalar are proprietatea de distributivitate

$$(\bar{p}'+\bar{q}'\cdot\bar{u})=(\bar{p}'\,\bar{u})+(\bar{q}'\,\bar{u}).$$

Indicaţie. Se va descompune vectorul $\bar{q}'$ după direcţiile lui $\bar{p}'$ şi a unui plan paralel cu $\bar{u}$.

2. Orice pereche $\bar{q}', \bar{\rho}$ de vectori poate fi transformată, prin operaţiile geometrice cuprinse în relaţia de echivalenţă, într'o pereche de vectori paraleli cu o pereche de vectori daţi $\bar{p}', \bar{r}$, lăsând invariant produsul scalar $(\bar{q}'\,\bar{\rho})$.

Indicaţie. Se vor descompune vectorii $\bar{q}'$ şi $\bar{\rho}$ în vectori paraleli respectiv cu $\bar{p}'$ şi $\bar{r}$, celelalte componente având direcţii convenabil alese pentru a dispare din produsul scalar.

3. Să se demonstreze relaţia

$$l\,(\lambda U)=\lambda\,(lU)$$

pentru orice λ real, unde l este o mărime dintr'o specie măsurabilă cu o unitate şi U o mărime dintr'o specie măsurabilă cu p unităţi.

Indicaţie. Se va folosi regula de adunare (96,II), extinzând-o la n termeni egali lU, scriind convenţional

$$lU+lU=l\,(U+U)=2\,lU, \text{ etc.}$$

Se va introduce relaţia $l\,(-U)=-lU$ justificând-o. Se va stabili relaţia $l\left(\frac{m}{n}U\right)=\frac{m}{n}(lU)$, apoi se va extinde la un număr real $\lambda>0$ şi la un λ real oarecare.

4. L şi U fiind două specii de mărimi asociate la două obiecte geometrice $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{U}$, se formează un nou obiect geometric $\mathcal{W}$, asociind câte două elementele $\mathcal{L}_0$ şi $\mathcal{U}_0$ în toate modurile posibile. Obiectul $\mathcal{W}=(\mathcal{L},\mathcal{U})$ este împărţit în clase disjuncte, strângând în aceeaşi clasă toate elementele $(\mathcal{L}_0,\mathcal{U}_0)$ care corespund unui L_0 şi unui U_0 daţi. Notând prin $W_0=(L_0,U_0)$ mărimea astfel formată, se obţine o nouă specie de mărimi W. Să se arate că subspeciile $S_0=(L_0,U)$ şi $T_0=(L,U_0)$ fomate, ţinând fixe elementele L_0, respectiv U_0, sunt în corespondenţă biunivocă, respectiv cu speciile U şi L.

Aplicaţie la mărimile care sunt produse ale unei mărimi măsurabile cu o unitate prin mărimi măsurabile cu p unităţi.

Indicaţie. Se va proceda ca în § 62.

5. Două specii de mărimi măsurabile isomorfe au acelaşi număr de unităţi.

Indicaţie. Se arată în primul rând că elementele nule se corespund biunivoc în ambele specii. Dacă S şi Σ sunt cele două specii şi dacă $U_1, U_2, \ldots, U_p$ sunt p elemente din S, şi $V_1, V_2, \ldots, V_p$ — corespunzătoarele lor din Σ, din corespondenţa

$$\alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\cdots+\alpha_pU_p\longleftrightarrow\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\cdots+\alpha_pV_p$$

se deduce că aceste elemente sunt în acelaşi timp liniar independente sau dependente şi se ajunge la rezultatul urmărit.

6. Relaţia de isomorfism are proprietăţile egalităţii.

Indicaţie. Se vor verifica pe rând reflexivitatea, simetria şi transitivitatea.

7. Relaţia de echiorientare a bivectorilor coplanari, care au unul din vectori comuni are proprietăţile egalităţii.

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Se va verifica reflexivitatea pe fig. 71, în care $\bar{v}' = \bar{v}$ deci B şi B' sunt confundate. Segmentul BB nu conţine niciun punct al dreptei D, dacă B nu este pe această dreaptă.

Verificarea simetriei este imediată. Pentru tranzitivitate, se consideră un al treilea bivector $(\bar{u}, \bar{v}'')$ şi triunghiul $BB'B''$. Dacă D nu intersectează pe BB' şi BB'' între extremităţi, nu va intersecta nici pe $B'B''$ între B' şi B'', conform cu axioma lui Pasch a spaţiului euclidian, care în spaţiul proiectiv este teoremă [1]).

[1]) Vezi *N.V. Efimov*, Op. cit., p. 329.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

MASURA MĂRIMILOR ÎN SPAȚIUL METRIC EUCLIDIAN

A. SISTEME DE REFERINȚĂ ORTOGONALE. MĂSURA MĂRIMILOR FIZICE

§ 74. Măsura mărimilor

Proprietățile mărimilor vectoriale şi scalare, examinate în capitolele precedente, rezultă din operațiile ce se pot face cu ele, deci, în primul rând, din adunarea şi amplificarea lor cu un număr.

Am numit *specie aditivă* de mărimi o mulțime S de mărimi $a, b, \ldots$ astfel încât dacă $a \epsilon S$ şi $b \epsilon S$ [1]), atunci suma $a+b \epsilon S$ (§ 1).

Adunarea mărimilor conduce şi la formarea multiplilor lor întregi naturali $na, nb, \ldots$ Evident, dacă $na = b$, vom putea scrie $a = \frac{1}{n} b$ şi vom putea vorbi de submultiplii lui b; deasemenea, relația $ma = \frac{m}{n} b$ ne va permite să luăm în considerație amplificarea mărimii b printr'un număr rațional pozitiv.

Dacă în specia S introducem scăderea ca operație inversă adunării prin relația:

$$a+x=b,$$

aceasta poate să fie verificată, sau nu, pentru a şi b dați. Dacă scăderea este posibilă pentru orice pereche de elemente a şi b, se arată că există un *element nul*, notat deobicei cu 0, astfel încât $a+0=a$ pentru orice $a \epsilon S$ şi un element $(-a)$, numit *opusul* lui a, astfel încât $a+(-a)=0$.

In acest caz, vom putea introduce şi multiplii negativi ai mărimilor a, sub forma $-na$.

O specie aditivă a fost numită *măsurabilă* dacă, odată cu un element a, conține şi orice multiplu λa, dacă $\lambda \geqq 0$ (§ 1).

Fiind dat un element a, dacă există un element b, astfel încât:

$$b = \lambda a$$

pentru orice λ real, elementul a va admite multipli şi submultipli într un sens mai larg, deoarece λ parcurge nu numai mulțimea tuturor întregilor naturali, ci mulțimea tuturor numerelor reale.

Să considerăm o specie măsurabilă S. Mulțimea tuturor elementelor λa formează o specie măsurabilă S_a, cuprinsă în S.

---

[1]) Semnul ϵ înseamnă „aparține" sau „este un element din". Astfel $a \epsilon S$ înseamnă a aparține speciei S.

Scanned with OKEN Scanner

Orice element $b \epsilon S_a$ *este multiplu al unui element oarecare* $c \epsilon S_a$ *(cu* $c \neq 0$*).*

In adevăr, avem:

$$b = \mu a; \quad c = \nu a,$$

de unde

$$a = \frac{1}{\mu} b = \frac{1}{\nu} c; \quad (\mu, \nu \neq 0).$$

Deducem imediat:

$$b = \frac{\mu}{\nu} c = \lambda c; \quad \lambda = \frac{\mu}{\nu},$$

ca o consecinţă a faptului că înmulţirea şi împărţirea sunt două operaţii posibile cu orice numere reale (excluzând împărţirea prin zero).

Dacă $b = 0$, vom avea evident $b = 0c$ şi rezultatul rămâne valabil.

Dacă $b = \lambda a$, spunem că a este o *unitate* pentru b, că b este măsurabil cu unitatea a şi că λ este *măsura* lui b prin a (cu a).

Dacă orice element $b \epsilon S$ este măsurabil cu o unitate dată $a \epsilon S$, spunem că specia S este *măsurabilă cu acea unitate* şi *generată de elementul* a $(S = S_a)$.

Fixându-ne atenţia asupra măsurii λ, aceasta este un număr real, care poate fi întreg, raţional, iraţional, pozitiv, negativ, par, impar, etc.

Este posibil să formăm o specie numai cu multiplii întregi naturali a, $2a$, $3a, \ldots, na \ldots$ ai aceluiaşi element a: de exemplu, cu rotaţiile de amplitudine a ale unui corp solid în jurul unei axe şi în sens pozitiv. Dacă a nu este comensurabil cu π, toate poziţiile a, $2a, \ldots$ sunt diferite şi specia va avea o infinitate de elemente distincte măsurabile cu unitatea a.

Vom putea numi, mai general, *specie măsurabilă* (pe o mulţime de numere) o specie aditivă care, odată cu elementul a, conţine şi orice element λa, unde λa aparţine unei mulţimi de numere.

Dacă orice element al unei specii măsurabile cu o anumită unitate poate fi ales ca unitate, spunem că specia este *măsurabilă cu o unitate* (§ 5).

Pentru aceasta este necesar şi suficient ca orice element $b \epsilon S$ să fie un multiplu al oricărui alt element $c \epsilon S$, cu $c \neq 0$.

Punând $b = \lambda c$ şi considerând mulţimea tuturor măsurilor λ, observăm că ea trebue să se bucure de proprietatea că suma, produsul şi câtul a două măsuri este un număr, care face parte din această mulţime. Dacă în specia considerată se poate face şi operaţia de scădere, atunci şi diferenţa a două măsuri este un număr, care face parte din mulţimea măsurilor.

Când o mulţime de numere are proprietatea că adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea (zero exclus) a două numere din mulţime au ca rezultat un număr, care face parte din acea mulţime, spunem că ea formează un *corp de numere*.

Mulţimea numerelor raţionale formează un corp, mulţimea numerelor reale formează deasemenea un corp, care cuprinde corpul numerelor raţionale, precum şi orice alt corp de numere reale.

Se vede deci, *că operaţia de măsură a mărimilor printr'o unitate ne conduce la considerarea măsurii din punct de vedere algebric*, adică din punctul de vedere al operaţiilor ce se pot face cu numerele ce exprimă măsura.

Măsurând elementele unei specii S măsurabile cu o unitate, vom obţine oricând numere, care fac parte din corpul real, dar nu în mod obligator toate numerele reale. Este posibil, pentru unele specii, ca măsurile să formeze un

Scanned with OKEN Scanner

corp cuprins în corpul real, sau chiar o parte din mulțimea numerelor reale, care să nu constitue un corp.

Vom spune că o specie S este măsurabilă cu o unitate a pe un corp de numere C, dacă orice element $b \epsilon S$ este de forma

$$b = \lambda a,$$

iar λ *este oricare din numerele corpului C.* Cu alte cuvinte, când λ parcurge corpul C, elementul λa parcurge specia S generată de elementul a ($S = S_a$).

Fiind dată o specie măsurabilă de mărimi $a, b, \ldots$, este posibil ca orice element $\lambda a, \mu b, \ldots$ să facă parte din această specie, când $\lambda, \mu, \ldots$ parcurg un corp de numere.

Vom numi *specie măsurabilă pe un corp C,* orice specie S măsurabilă, cu proprietatea: dacă $a \epsilon S$, atunci și $\lambda a \epsilon S$, pentru orice $\lambda \epsilon C$.

Cu alte cuvinte, dacă a este un element oarecare din S, atunci orice multiplu λa al său face parte din S, când λ parcurge întreg corpul de numere C.

Spațiul vectorial, definit în § 31, are această proprietate: dacă $\bar{v}$ este un vector, atunci și $\lambda \bar{v}$ este un vector, pentru orice λ real. *Spațiul vectorial este deci o specie măsurabilă pe corpul real.*

Nu orice specie de mărimi geometrice sau fizice este măsurabilă pe un corp. Astfel, lungimile, ariile, volumele din geometria elementară euclidiană sunt pozitive și măsurile lor nu parcurg decât mulțimea numerelor pozitive.

Când măsurile elementelor unei specii măsurabile parcurg numai o parte a unui corp C, vom spune că specia este *măsurabilă în corpul C.*

Cum mărimile vectoriale sunt măsurabile *pe* corpul real, iar mărimile scalare cele mai obișnuite sunt măsurabile *pe sau în* corpul real, *pentru ușurința exprimării nu vom specifica în general corpul de numere al măsurilor,* subînțelegând *măsura pe corpul real pentru vectori, bivectori, trivectori și în corpul real pentru scalari și pseudoscalari* (*în* nu exclude *pe*, cum este în cazul volumului orientat).

Fie S o specie de mărimi măsurabilă pe un corp C și a un element al său. Mulțimea elementelor λa, cu $\lambda \epsilon C$, formează o specie S_a măsurabilă cu o unitate pe corpul C. Fie b un element din S. Dacă $b = \lambda a$, atunci $b \epsilon S_a$ și vom spune că b este *liniar dependent de a.* Dacă orice element $b \epsilon S$ aparține și lui S_a, atunci $S = S_a$ și specia S este măsurabilă cu o singură unitate pe corpul C.

Dacă însă $b \neq \lambda a$, atunci b generează la rândul său o *subspecie*[1]) S_b de elemente μb, cu $\mu \epsilon C$ și $S_b \neq S_a$. Cum suma a două elemente $\lambda a \epsilon S$, $\mu b \epsilon S$ este un element din S, elementul:

$$c = \lambda a + \mu b$$

aparține lui S și, în general, nu aparține nici lui S_a, nici lui S_b. Vom spune că c este *liniar dependent* de a și b iar a și b sunt *liniar independenți.*

Dacă orice element $c \epsilon S$ este de forma $c = \lambda a + \mu b$, vom spune că specia S este *măsurabilă cu două unități* și *generată* de elementele a și b.

Presupunând că există în S un element $c \neq \lambda a + \mu b$, atunci elementul

$$d = \lambda a + \mu b + \nu c$$

---

[1]) Vom numi, în general, *subspecie* S' a unei specii date S, orice mulțime de elemente, definită printr'o relație de echivalență, aparținând lui S. Scriem $S' \epsilon S$.

Scanned with OKEN Scanner

va aparţine lui S şi nu va aparţine în general nici lui S_a, nici lui S_b, nici lui S_c. Pentru ca d să aparţină lui S_a, este necesar şi suficient ca $\mu=\nu=0$; pentru ca să aparţină speciei $S_{a,b}$ generate de a şi b, este necesar şi suficient ca $\nu=0$, iar pentru a aparţine deodată lui S_a şi S_b trebue ca

$$\lambda=\mu=\nu=0, \text{ deci } d=0.$$

Dacă orice element $d \epsilon S$ este de forma $d=\lambda a+\mu b+\nu c$, vom spune că specia S este *măsurabilă cu trei unităţi* pe corpul C şi generată de elementele a, b, c liniar independente.

Măsura mărimii d va fi formată din sistemul de trei numere λ, μ, ν.

Presupunând specia S cunoscută, din modul de generare descris mai sus rezultă că *măsura* (λ, μ, ν) *determină în mod unic mărimea d.*

In adevăr, dacă aceluiaşi element d i-ar corespunde două măsuri λ, μ, ν şi λ', μ', ν', am avea

$$\lambda a+\mu b+\nu c=\lambda' a+\mu' b+\nu' c,$$

de unde, aplicând proprietăţile egalităţii

$$(\lambda-\lambda')a+(\mu-\mu')b+(\nu-\nu')c=0.$$

Insă elementele a, b, c sunt liniar independente, deci nu vom putea avea între ele această relaţie decât dacă

$$\lambda-\lambda'=0, \quad \mu-\mu'=0, \quad \nu-\nu'=0$$

şi măsura lui d este unică.

Obţinem astfel un rezultat fundamental, care ne va permite să folosim măsura pentru caracterizarea mărimilor:

Intr'o specie de mărimi măsurabilă cu n unităţi pe un corp C, orice element este unic determinat prin măsura sa, dacă se dau elementele $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *liniar independente, care generează specia şi formează sistemul de unităţi în raport cu care este luată măsura.*

Sistemul de n unităţi liniar independente, care generează specia, se numeşte *bază.*

Proprietatea, pe care o are orice element al unei specii măsurabile cu o unitate de a servi ca unitate, se extinde la cazul general: *Orice sistem de n elemente liniar independente poate constitui o bază.*

Din aceasta rezultă că *măsura mărimilor depinde de bază, deci de sistemul de unităţi folosit.* Totuşi, *mărimile fiind independente de alegerea bazei, diferitele măsuri ale unei aceleiaşi mărimi trebue să fie legate între ele prin relaţii caracteristice speciei de mărimi considerate, astfel încât din cunoaşterea măsurii într'o bază să se deducă măsura în orice altă bază.*

O consecinţă importantă a acestei proprietăţi a măsurii este faptul că *din relaţiile de transformare a măsurii dintr'o bază în alta vom putea deduce specia mărimii măsurate,* deci vom caracteriza mărimile prin măsurile lor.

Operaţiile, care definesc orice specie S de mărimi măsurabilă pe un corp C, sunt adunarea şi înmulţirea cu un număr din corpul C. Prin aceste operaţii, cu ajutorul cărora am definit măsura mărimilor, obţinem totdeauna un element din specia S.

Scanned with OKEN Scanner

Este uşor de văzut că avem următoarea proprietate:

Intr'o specie S măsurabilă cu n unităţi, măsura sumei este suma măsurilor, iar măsura produsului unui element printr'un număr din corpul C este produsul măsurii acelui element prin numărul considerat.

În adevăr, fie $a \epsilon S$ şi $b \epsilon S$ două elemente şi $\lambda \epsilon C$ un număr. Punând:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i, \qquad b = \sum_{i=1}^{n} b^i e_i,$$

unde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sunt unităţile alese, vom avea:

$$a+b = \sum_{i=1}^{n} (a^i + b^i) e_i; \quad \lambda a = \lambda \sum_{i=1}^{n} a^i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a^i) e_i$$

deci:

$$\text{măs. } (a+b) = (a^1 + b^1,\ a^2 + b^2, \ldots, a^n + b^n);$$

$$\text{măs. } \lambda a = (\lambda a^1, \lambda a^2, \ldots, \lambda a^n).$$

Prin urmare, *în operaţiile cu mărimi măsurabile cu n unităţi, vom putea caracteriza şi vom putea recunoaşte mărimile prin măsurile lor.* Această proprietate ne permite, de exemplu, să substituim vectorilor, definiţi axiomatic în § 31, măsurile componentelor lor, care sunt numere reale.

Avem astfel la dispoziţie un mijloc matematic foarte puternic de cercetare prin calcul a proprietăţilor mărimilor fizice şi geometrice, a cărui importanţă este fundamentală, deoarece în aplicaţiile fizice mărimile sunt caracterizate prin măsurile lor.

§ 75. Măsura mărimilor vectoriale. Criteriul măsurii

Am văzut că în spaţiul cu trei dimensiuni orice vector este suma geometrică a trei vectori liniar independenţi, proporţionali cu trei vectori fundamentali $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, orice vector $\bar{V}$ punându-se sub forma:

$$\bar{V} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{w}. \qquad (1,III)$$

Mulţimea tuturor vectorilor constitue o specie măsurabilă cu trei unităţi pe corpul real.

Cele trei unităţi sunt vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ care formează triedrul fundamental, iar numerele α, β, γ constitue măsura vectorului (1,III) în raport cu aceste trei unităţi.

Dacă vectorul $\bar{V}$ reprezintă o mărime fizică vectorială, aparţinând unei anumite specii de mărimi fizice, de exemplu viteze, iar $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ trei mărimi liniar independente din aceeaşi specie, *prin formula* (1,III) *am măsurat mărimea* $\bar{V}$ *cu unităţile vectoriale* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ *din aceeaşi specie măsurabilă cu trei unităţi.*

In cazul vitezei, care rezultă din raportarea unei deplasări în spaţiu la timpul întrebuinţat, orice deplasare putând fi descompusă după trei direcţii

Scanned with OKEN Scanner

liniar independente, vom avea şi pentru viteze trei elemente liniar independente $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, corespunzătoare celor trei deplasări şi deci specia vitezelor va fi măsurabilă cu trei unităţi vectoriale prin formula (1,III).

Orice mărime vectorială va fi caracterizată în spaţiu prin cele trei numere α, β, γ, numite *componente scalare* sau pe scurt *componente.*

Proprietatea esenţială a măsurii (α, β, γ) prin componente este cea stabilită mai sus: *măsura sumei a două mărimi vectoriale este egală cu suma măsurilor lor, iar măsura produsului unei mărimi printr'un număr este produsul mărimii prin acel număr.*

Măsura unei mărimi vectoriale este sistemul de numere α, β, γ, dar ea depinde de unităţile alese. In cazul mărimilor fizice, aceste unităţi au o mare importanţă şi *este necesar să se specifice de fiecare dată unităţile folosite, deoarece ele caracterizează specia de mărimi fizice vectoriale considerată.* Astfel, vitezele se măsoară, de exemplu, în metri pe secundă, iar acceleraţiile în metri pe secundă la pătrat, etc.

Măsura mărimilor vectoriale se traduce geometric prin descompunerea vectorilor respectivi în raport cu triedrul fundamental, iar acesta este reprezentarea geometrică a bazei de unităţi alese în specia considerată.

Din punct de vedere algebrico-geometric, orice specie de mărimi măsurabilă cu trei unităţi pe un corp este un spaţiu vectorial cu trei dimensiuni (§ 31), deoarece satisface cele trei condiţii impuse: 1) dacă $a \epsilon S$ şi $b \epsilon S$, atunci $a+b \epsilon S$; 2) dacă $a \epsilon S$ şi $\lambda \epsilon C$, atunci $\lambda a \epsilon S$; 3) numărul de elemente liniar independente în S este trei.

Ori, vectorii covarianţi constitue o specie de mărimi geometrice măsurabilă cu trei unităţi, deci un spaţiu vectorial cu trei dimensiuni. Deasemenea bivectorii formând o specie măsurabilă cu trei unităţi constituie un spaţiu vectorial.

Putem trage din aceste constatări concluzia că vectorii covarianţi şi bivectorii sunt mărimi vectoriale?

Să analizăm datele acestei probleme în lumina semnificaţiei lor fizice şi geometrice:

Vectorul covariant a fost introdus (§. 35) pornind dela un obiect geometric, biplanul, ca mărime asociată, deci vom fi îndemnaţi să reprezentăm printr'un vector covariant o mărime fizică ce va prezenta anumite caractere geometrice, comparabile cu cele ale biplanului. Astfel, o mărime asociată unui element plan cu două feţe opuse, ca un dublu strat, de exemplu o presiune hidrostatică, ne va sugera analogia cu un vector covariant.

Bivectorul (contravariant) a fost introdus prin reprezentarea elementului de arie, orientat prin circulaţia pe un contur închis, deci vom reprezenta printr'un bivector o mărime fizică ce prezintă aceste caractere geometrice, de exemplu un cuplu de forţe, în urma unei analize a proprietăţilor sale geometrice.

In acelaşi timp, atât vectorul covariant, cât şi bivectorul sunt reprezentabili în geometria metrică printr'un vector normal la planele lor, deci din punctul de vedere al *reprezentării geometrice*, cel puţin în geometria metrică, vom putea înlocui atât vectorul covariant cât şi bivectorul printr'un vector contravariant.

Scanned with OKEN Scanner

Totuşi, chiar şi în geometria metrică există o nepotrivire esenţială în ceace priveşte asimilarea bivectorului cu vectorul contravariant: *vectorul reprezentativ depinde de orientarea spaţiului.* Deaceea se recurge la o diferenţiere a vectorilor în polari şi axiali.

Pe de altă parte, dacă am considera specia bivectorilor ca un spaţiu vectorial cu trei dimensiuni şi am raporta-o la trei bivectori liniar independenţi, aleşi ca unităţi, am putea figura aceste unităţi ca trei vectori contravarianţi în spaţiul *afin* cu trei dimensiuni, formând un triedru fundamental.

Astfel de reprezentări sunt dealtfel curente în fizică, pentru a se da o imagine unei relaţii între trei mărimi. Ori, în acest caz, *orice bivector va fi reprezentabil printr'un vector contravariant, independent de orientarea spaţiului afin reprezentativ.*

Nu trebue însă pierdut din vedere caracterul *convenţional* al acestei reprezentări spaţiale, compatibil în totul cu proprietatea speciei bivectorilor de a fi măsurabilă cu trei unităţi şi deci, de a constitui un spaţiu vectorial *abstract.*

Intrebarea: *„Este bivectorul o mărime vectorială?“* are următoarea semnificaţie corectă: *Este bivectorul o mărime vectorială a spaţiului afin sau metric în care a fost definit ca o mărime geometrică, asociată unui obiect geometric al acestui spaţiu?*

Pentru a da un răspuns acestei întrebări va fi deci necesar să raportăm bivectorul la spaţiu, adică să-l considerăm ca o mărime asociată unui obiect caracterizat prin proprietăţi, care decurg din axiome.

Ori, elementul plan, paralelogramul orientat, fiind caracterizat prin două bipuncte, bivectorul va fi o mărime derivată din vector.

A compara bivectorul cu vectorul nu înseamnă a compara obiectele geometrice asociate, ci a trece comparaţia pe un plan mai abstract, al mărimilor însăşi, ca mărimi ale spaţiului: comparaţia obiectelor nu poate constitui un criteriu, deoarece obiectul poate fi schimbat convenţional, cum am observat mai sus şi cum s'a şi procedat cu produsul vectorial în aplicaţii.

Ori, *pentru comparaţia mărimilor este necesar să se pună în lumină un element caracteristic al lor şi acesta este măsura.*

Două mărimi sunt comparabile prin modul lor de măsură, nu prin valorile numerice ale măsurilor.

In adevăr, speciile de mărimi sunt constituite prin aplicarea adunării şi a măsurii elementelor unele prin altele. A compara două specii înseamnă a compara tocmai structurile lor, modul în care sunt alcătuite din elementele lor, care pot avea semnificaţii fizice deosebite. Am dat în paragraful precedent o construcţie a speciilor măsurabile cu una, două, trei, n unităţi, independentă de semnificaţia mărimilor cuprinse în aceste specii pentru a pune în evidenţă structura algebrică a acestor specii.

Dacă ambele specii sunt formate din mărimi derivate din mărimi fundamentale ale spaţiului, deci exprimabile cu ajutorul acestora, prin înlocuire vom fi conduşi la comparaţia a două specii formate cu aceleaşi elemente, dar asociate prin diverse operaţii. De exemplu, punând:

$$\overline{V}=\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}+\gamma\overline{w}\,;\quad \overline{W}=\alpha'\overline{u}+\beta'\overline{v}+\gamma'\overline{w}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi construind bivectorul:

$$\overline{V}+\overline{W}=(\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}+\gamma\overline{w})\times(\alpha'\overline{u}+\beta'\overline{v}+\gamma'\overline{w})=$$
$$=(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\overline{u}\times\overline{v})+(\beta\gamma'-\gamma\beta')(\overline{v}\times\overline{w})+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')(\overline{w}\times\overline{u}),$$

unităţile în specia bivectorilor vor fi:

$$\overline{u}\times\overline{v},\ \overline{v}\times\overline{w},\ \overline{w}\times\overline{u}.$$

Pentru a compara bivectorii cu vectorii va fi iluzoriu să comparăm aceste unităţi cu $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, deoarece nu facem decât să încercăm comparaţia dintre *anumiţi* bivectori şi vectori. *Singurul teren comun pentru comparaţie rămâne acela al măsurilor numerice, nu al valorilor acestor măsuri, ci al modului în care cele două specii se comportă la măsură.*

Toate speciile de mărimi măsurabile în acelaşi mod vor forma *o categorie*, de exemplu vitezele, acceleraţiile, translaţiile, măsurându-se la fel cu vectorii vor fi mărimi vectoriale.

Prin *mod de măsură* înţelegem relaţiile dintre măsurile calculate în două oarecare dintre sistemele de unităţi posibile în specia considerată, raportată la spaţiu.

Două mărimi vor fi măsurabile *în acelaşi mod* când relaţiile dintre măsurile lor faţă de două sisteme oarecare de unităţi vor fi aceleaşi.

Măsura ne permite să introducem o caracterizare a mărimilor, independentă de obiectul geometric căruia îi sunt asociate, constituind un criteriu aplicabil atât mărimilor geometrice, cât şi celor fizice.

Criteriul măsurii

Două mărimi sunt de aceeaşi categorie, dacă au acelaşi mod de măsură, deci dacă măsurile lor în raport cu două sisteme de unităţi, induse de raportarea acestor mărimi la spaţiu, sunt legate prin aceleaşi relaţii.

De exemplu, pentru raportarea vitezelor la spaţiu, vom raporta deplasarea în direcţia mişcării la un triedru fundamental şi, prin împărţire cu timpul întrebuinţat, vom deduce unităţile de viteză pe cele trei direcţii. Schimbând în orice mod sistemul fundamental, relaţiile între măsurile vitezei vor fi aceleaşi ca şi pentru deplasări şi deci, vitezele şi deplasările sunt de aceeaşi categorie a mărimilor vectoriale.

In comparaţia bivectorilor cu vectorii (contravarianţi), criteriul măsurii va conduce la un rezultat diferit: relaţiile dintre măsuri nu sunt aceleaşi, deci *bivectorii nu sunt mărimi vectoriale ale spaţiului afin* (sau metric).

Acelaşi criteriu al măsurii va pune în evidenţă deosebirea dintre trivector şi mărimile scalare: deşi trivectorul este o mărime măsurabilă cu o unitate, el nu este o mărime scalară: fiindcă nu are acelaşi mod de măsură ca scalarii.

Măsura reprezintă un caracter esenţial al mărimilor, fiind legată de proprietatea de comparabilitate şi de operaţia de adunare. Ea este prezentă în orice relaţie între mărimi, astfel încât a fost utilizată în toate calculele precedente sub forma unui coeficient asociat simbolurilor ce reprezentau mărimile.

Totuşi, în aceste calcule accentul a fost pus pe simbolurile reprezentative, pentru care au fost definite operaţii algebrice, fără a se scoate în evidenţă proprietăţile măsurii şi modul în care ea caracterizează mărimile.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, operaţiile cu mărimi geometrice au reprezentat algebric anumite operaţii geometrice simple, efectuate asupra obiectelor geometrice.

Nu trebue însă pierdut din vedere faptul că mărimile geometrice nu sunt decât mărimi fizice, prin care se caracterizează proprietăţi din cele mai simple ale materiei şi că ele servesc pentru *reprezentarea* unora din cele mai importante dintre mărimile fizice ca vitezele, acceleraţiile, forţele aplicate solidelor, momentele, cuplurile, tensiunile în fire, presiunile hidrostatice, etc.

Dificultatea în problema reprezentării geometrice a mărimilor fizice constă în alegerea mărimii geometrice corespunzătoare unei mărimi date. Dacă pentru anumite mărimi simple imaginea geometrică este uşor de obţinut, cum este în cazul vitezei al cărui caracter spaţial este vizibil, pentru altele această imagine nu apare imediat sau, dacă apare, are un caracter convenţional.

Astfel, reprezentarea unui cuplu printr'un vector perpendicular pe planul său este convenţională, deoarece depinde de orientarea spaţiului.

Criteriile geometrice folosite pentru reprezentarea mărimilor fizice sunt bazate pe intuiţie şi deci nu sunt riguroase. Ele nu sunt prin aceasta condamnabile într'un prim stadiu de formare a unui calcul cu mărimi, dar nu pot fi utilizate decât în cazurile cele mai simple şi supuse apoi unei analize critice bazate pe criterii independente de intuiţie.

Pe măsură ce aplicaţiile unui procedeu de calcul se desvoltă, suntem puşi în faţa unui număr din ce în ce mai mare de mărimi, a căror reprezentare geometrică devine din ce în ce mai complicată.

Caracterul algebric al calculelor cu mărimi, în particular al Calculului vectorial, elimină rolul intuiţiei şi prin aceasta introduce rigoarea necesară operaţiilor, dar înafară de faptul că în anumite probleme *aplicaţia* sa întâmpină dificultăţi, el nu poate să diferenţieze două specii de mărimi cu aceleaşi caractere algebrice, cum sunt vectorii şi bivectorii.

Introducerea măsurii ca element reprezentativ al mărimilor şi raportarea acestora la spaţiu reprezintă un progres calitativ în Calculul vectorial şi deschide calea unei lărgiri considerabile a cadrului său prin trecerea la Calculul tensorial.

Criteriul măsurii corespunde unei proprietăţi fundamentale a mărimilor fizice, şi anume invarianţei lor faţă de modul particular în care sunt măsurate în spaţiu şi timp.

§ 76. Metodă analitică şi triedrul fundamental

Strânsa legătură dintre fenomenele fizice şi spaţiu apare extrem de clară din constatarea că *numărul unităţilor dintr'o specie de mărimi vectoriale este cel mult egal cu numărul de dimensiuni ale spaţiului.*

Triedrul fundamental, care servea ca sistem de referinţă al spaţiului, capătă astfel o semnificaţie fizică importantă: *el constitue un sistem de referinţă şi pentru mărimile fizice vectoriale, întrucât permite măsura acestor mărimi.*

Nu trebue, însă, să pierdem din vedere că o mărime fizică este independentă de orice sistem de referinţă. Prin urmare, măsura sa trebue să fie independentă de alegerea unui sistem particular.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţile mărimilor vectoriale trebue să fie independente de alegerea celor trei unităţi $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ prin care sunt măsurate. Cum aceste unităţi sunt reprezentate geometric prin triedrul fundamental $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, suntem conduşi la concluzia că *operaţiile vectoriale sunt independente de alegerea triedrului fundamental.*

Necesitatea introducerii acestui triedru, ca o consecinţă a măsurii mărimilor vectoriale din spaţiul cu trei dimensiuni, ne pune în faţa unei metode de calcul vectorial în care vom ţine seama de măsurile vectorilor. Astfel vom distinge două metode vectoriale:

1. **Metoda simbolică,** în care vectorii sunt consideraţi ca mărimi măsurabile, definite geometric prin axiomele geometriei vectoriale şi afine sau ca nişte consecinţe ale acestora. Egalitatea şi adunarea sunt definite, dar măsura nu este efectuată decât pentru speciile de vectori coliniari, ca urmare a amplificării vectorilor prin numere sau prin scalari. Proprietăţile vectorilor şi ale mărimilor deduse din ei prin diverse operaţii rezultă din aplicarea regulilor de calcul vectorial cu *simbolurile* introduse şi sunt recunoscute în aceste simboluri vectoriale.

2. **Metoda analitică** în care vectorii, consideraţi ca mărimi măsurabile, sunt măsuraţi în raport cu trei unităţi determinate prin alegerea arbitrară a triedrului de referinţă. Din această măsură rezultă componentele scalare α, β, γ ale fiecărui vector. Egalitatea, adunarea şi celelalte operaţii sunt exprimate numeric prin aceste componente, ce reprezintă vectorii. Se stabileşte astfel o corespondenţă între operaţiile geometrice vectoriale şi operaţiile algebrice şi analitice cu numere, operaţiile cu simboluri revenind la operaţii numerice, a căror invarianţă faţă de alegerea triedrului de referinţă trebue pusă în evidenţă.

Când raportăm vectorii la un sistem de referinţă format din $n = 3, 2, 1$ vectori liniar independenţi, spunem că aceşti vectori formează o *bază* (§ 74). care generează întreaga specie a vectorilor.

In spaţiu, baza $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ constitue un triedru etalonat; în plan, baza $\overline{u}$, $\overline{v}$ constitue un sistem de axe etalonate, iar pe o dreaptă, baza $\overline{u}$ — o axă etalonată.

Spunem deasemenea, în general, că o bază de vectori constitue un *sistem de referinţă cartezian al spaţiului.*

§ 77. Sisteme de referinţă carteziene ortogonale

Cel mai simplu sistem de referinţă se obţine formând un triedru fundamental drept cu trei versori ortogonali $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Aceştia satisfac condiţiile

$$\overline{i}\,\overline{j}=0;\ \overline{j}\,\overline{k}=0;\quad \overline{k}\,\overline{i}=0; \tag{2, III}$$

$$\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1.$$

Un vector oarecare $\overline{V}$ se exprimă prin formula

$$\overline{V}=X\overline{i}+Y\overline{j}+Z\overline{k}, \tag{3, III}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde X, Y, Z, sunt componentele scalare ale lui $\overline{V}$ în raport cu acest triedru fundamental triortogonal (tridreptunghi) (fig. 81).

Aceste componente, reprezentând măsurile lui $\overline{V}$ pe cele trei direcţii Ox, Oy, Oz de versori respectivi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, sunt definite prin relaţiile

$$X = \overline{V}\bar{i};\ Y = \overline{V}\bar{j};\ Z = \overline{V}\bar{k} \quad (4,\text{III})$$

şi se obţin înmulţind scalar respectiv cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ambii membri ai egalităţii (3, III).

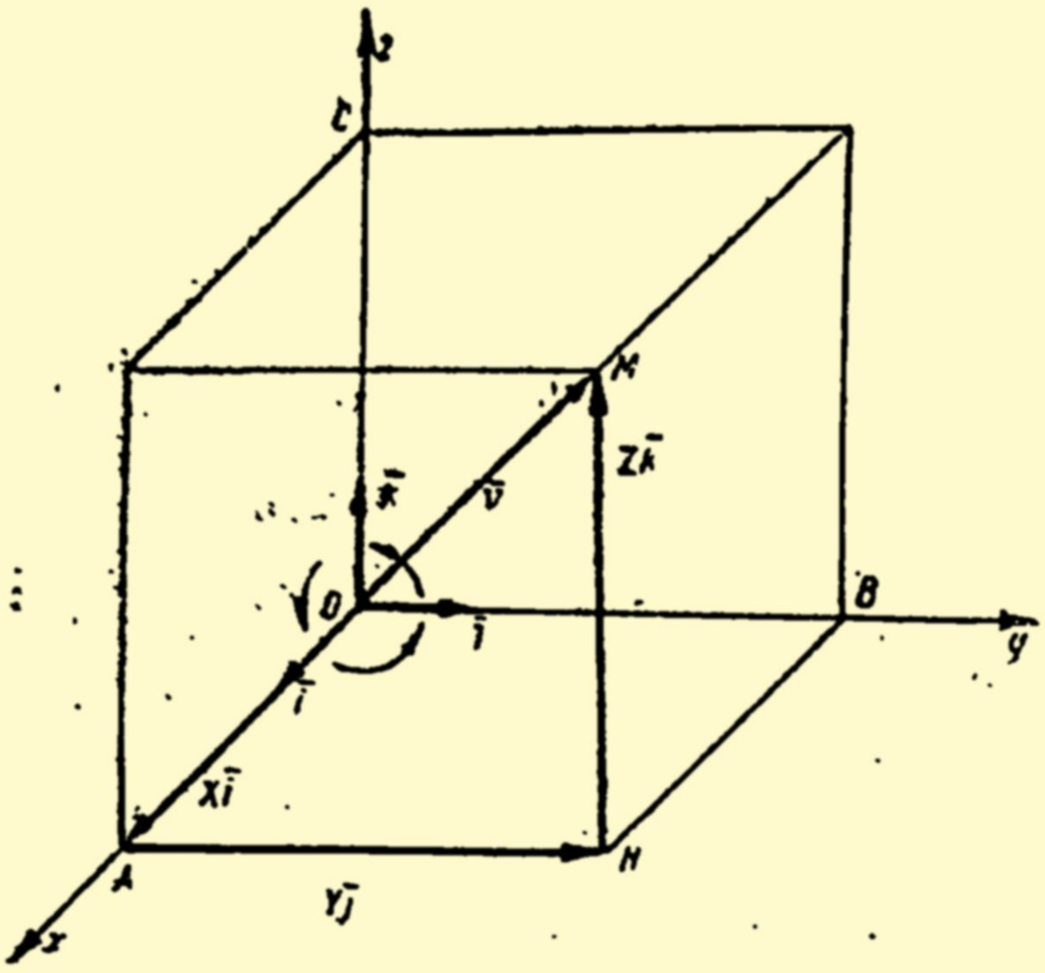


Fig. 81

Dacă notăm cu α, β, γ unghiurile făcute de $\overline{V}$ cu Ox, Oy, Oz, din egalităţile (4, III) deducem

$$X = V\cos\alpha,$$
$$Y = V\cos\beta,\ Z = V\cos\gamma. \quad (5,\text{III})$$

Se vede că X, Y, Z, componentele scalare, sau *coordonatele* vectorului $\overline{V}$, sunt proiecţiile ortogonale ale acestui vector pe cele trei axe.

Aceste componente scalare sunt numite pe scurt *componentele vectorului*. Ele pot fi egale cu orice număr real. Dacă ataşăm punctului M extremitatea vectorului $\overline{V}$ adus în origine, acest punct este determinat prin cunoaşterea lui V, care devine vectorul său de poziţie.

Componentele X, Y, Z sunt în acelaşi timp *coordonatele carteziene ortogonale* ale punctului M faţă de sistemul de referinţă $Oxyz$.

Invers, orice punct M din spaţiu defineşte un vector $\overline{V}$, când este dat punctul de reper O, prin vectorul său de poziţie $\overline{OM} = \overline{V}$.

Raportând pe $\overline{V}$ la sistemul de referinţă $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vom obţine prin componentele sale X, Y, Z, coordonatele lui M.

Prin urmare, între componentele scalare şi coordonatele punctelor spaţiului există o *corespondenţă biunivocă*, adică astfel încât la fiecare punct M corespunde un sistem de componente X, Y, Z şi numai unul, şi invers, ceeace face ca un sistem de referinţă cartezian ortogonal să fie numit şi *sistem de coordonate cartezian ortogonal* [1]).

---

1) In general, fiind date două mulţimi de elemente E şi F şi o corespondenţă g care asociază fiecărui element x din E un element y din F, se spune că g stabileşte o *corespondenţă biunivocă* între E şi F, dacă mulţimile şi corespondenţa satisfac următoarele condiţii:

1. Oricare ar fi elementul y din F, există cel puţin un element x din E, astfel ca $g(x) = y$.

2. Pentru fiecare pereche x şi x' de elemente distincte din E, elementele $g(x)$ şi $g(x')$ din F sunt deasemenea distincte.

Se poate arăta că în acest caz există o corespondenţă f între F şi E, astfel ca:

$$f[g(x)] = x \text{ şi } g[f(y)] = y,$$

oricare ar fi x din E sau y din F.

Corespondenţa — sau funcţia — f se numeşte *inversa corespondenţei* g.

Scanned with OKEN Scanner

Figurilor geometrice formate din puncte le putem ataşa vectorii de poziţie ai acestor puncte, astfel încât oricărei proprietăţi geometrice putem face să-i corespundă o proprietate vectorială.

Exprimând vectorii prin componentele lor ortogonale faţă de triedrul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, obţinem expresiile analitice ale acestor proprietăţi geometrice în sistemul de coordonate cartezian ortogonal Ox, Oy, Oz şi astfel putem regăsi pe cale vectorială rezultatele geometriei analitice, în particular pe cele exprimate în coordonate carteziene ortogonale.

De exemplu, dacă numim $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *cosinusurile directoare* ale direcţiei definite de vectorul $\bar{V}$, formulele (5,III) ne dau aceste cosinusuri directoare, deci unghiurile vectorului cu cele trei axe Ox, Oy, Oz. Vom avea:

$$\cos\alpha=\frac{X}{V},\quad \cos\beta=\frac{Y}{V},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{V}. \qquad (6,III)$$

Dacă $\bar{V}$ este versor, atunci componentele sale sunt chiar cosinusurile directoare.

Modulul vectorului $\bar{V}$ este dat de relaţia

$$V^2=\bar{V}\,\bar{V}=(X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k})(X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k})=X^2+Y^2+Z^2,$$

de unde

$$V=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (7,III)$$

Această formulă exprimă teorema lui Pitagora în spaţiu.

Înlocuind în (7,III) valorile (5,III) ale componentelor X, Y, Z, deducem relaţia fundamentală a cosinusurilor directoare ale unei direcţii

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \qquad (8,III)$$

valabilă când raportăm spaţiul la un sistem cartezian ortogonal. Ea exprimă modulul versorului direcţiei $\frac{\bar{V}}{V}$.

§ 78. Componentele şi măsura mărimilor vectoriale

Rămânând în cadrul sistemelor de referinţă carteziene ortogonale, să considerăm mărimile vectoriale $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n$ aparţinând unei specii S şi să le reprezentăm prin vectorii $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n$.

Presupunând că în această specie există trei mărimi, cărora putem face să le corespundă trei versori ortogonali $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vom alege aceşti versori ca bază.

Vom scrie deci

$$\bar{V}_l=X_l\bar{i}+Y_l\bar{j}+Z_l\bar{k} \qquad (l=1, 2, \ldots, n).$$

Numerele (X_l, Y_l, Z_l), vor constitui măsura lui $\bar{V}_l$ în raport cu baza de unităţi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Îndeplineşte această măsură condiţiile deduse din măsura oricărei mărimi fizice?

În primul rând, *măsurile a doi vectori egali sunt egale* fiindcă, dacă avem $\bar{V}_l=\bar{V}_r$, atunci

$$X_l=X_r,\quad Y_l=Y_r,\quad Z_l=Z_r,$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sunt liniar independenţi; invers, când componentele scalare sunt egale, vectorii respectivi sunt egali.

In treacăt, observăm că din această proprietate rezultă că *vectorul nul are componentele* (0, 0, 0).

Să calculăm suma celor n vectori. Vom avea:

$$\overline{V}=\overline{V}_1+\overline{V}_2+\cdots+\overline{V}_n=\sum_{l=1}^{n}\overline{V}_l=\sum_{l=1}^{n}(X_l\bar{i}+Y_l\bar{j}+Z_l\bar{k})=$$

$$=\bar{i}\sum_{l=1}^{n}X_l+\bar{j}\sum_{l=1}^{n}Y_l+\bar{k}\sum_{l=1}^{n}Z_l\,.$$

Dacă notăm cu X, Y, Z, componentele vectorului sumă, (X, Y, Z) constituind măsura lui V, vom deduce imediat

$$X=\sum_{l=1}^{n}X_l;\quad Y=\sum_{l=1}^{n}Y_l;\quad Z=\sum_{l=1}^{n}Z_l\,. \qquad (9,\text{III})$$

Deci: *măsura sumei celor n mărimi* $\overline{V}_1$, $V_2,\ldots,$ $\overline{V}_n$ *se obţine făcând suma măsurilor lor în raport cu cele trei unităţi.*

Cu alte cuvinte: *componentele vectorului sumă a n vectori sunt sumele componentelor lor pe cele trei direcţii fundamentale.*

Dacă $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sunt n mărimi scalare de aceeaşi specie, astfel încât mărimile $\lambda_l\overline{V}_l$ există, atunci construind mărimea

$$\lambda_1\overline{V}_1+\lambda_2\overline{V}_2+\cdots+\lambda_n\overline{V}_n=\overline{W}.$$

măsura sa va fi

$$\xi=\sum_{l=1}^{n}\lambda_lX_l,\quad \eta=\sum_{l=1}^{n}\lambda_lY_l,\quad \zeta=\sum_{l=1}^{n}\lambda_lZ_l \qquad (10,\text{III})$$

In particular măsura lui $\lambda_l\overline{V}_l$ este $\lambda_lX_l,\lambda_lY_l,\lambda_lZ_l$, deci *măsura produsului unei mărimi vectoriale printr'o mărime scalară este produsul măsurii acestei mărimi prin măsura mărimii scalare.*

Formulele (10,III) condensează cele două proprietăţi fundamentale verificate.

Prin urmare, *asociind mărimilor vectoriale măsura vectorilor prin componentele lor, obţinem un mod de măsură, care satisface toate condiţiile impuse.*

Corespondenţa între mărimile fizice scalare şi vectoriale, pe de o parte şi scalari şi vectori pe de altă parte, ne permite nu numai reprezentarea lor geometrică, dar şi exprimarea măsurii lor, prin urmare introducerea Algebrei şi Analizei în studiul lor şi al fenomenelor în care intervin.

Această corespondenţă va apare cu atât mai esenţială, cu cât vom arăta mai clar că este independentă de sistemele de referinţă, ceeace vom face ulterior.

Metoda analitică, desvoltată din acest punct de vedere, conduce la Calculul tensorial şi ne dă mijlocul de a recunoaşte natura scalară, vectorială, tensorială, etc, a mărimilor fizice măsurate prin componentele lor.

Scanned with OKEN Scanner

Studiul fenomenelor fizice a arătat că măsurile unor mărimi fizice se exprimă printr'un număr mai mare de scalari decât dimensiunile spaţiului; această mulţime de scalari, inseparabili unul de altul, constitue componentele unei noi mărimi fizice, denumită *tensor*. Cuvântul *tensor* provine din cuvântul *tensiune*, deoarece primul tensor care a fost recunoscut în fizică a fost acel al tensiunilor în interiorul unui corp solid supus unei deformaţii.

Mărimile vectoriale considerate au fost reprezentate prin vectori liberi. In cazul când ele se reprezintă prin vectori legaţi, este necesar să introducem în calcule punctele lor de aplicaţie.

Fie vectorul $\bar{V}$ aplicat în punctul M_0 şi având extremitatea în M (fig. 82). Să notăm cu $\bar{r}_0$ şi $\bar{r}$ vectorii de poziţie ai acestor puncte punând

$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k},$$
$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{V} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}.$$

Vom avea evident:

$$\bar{V} = \bar{r} - \bar{r}_0,$$

de unde

$$X = x - x_0; \quad Y = y - y_0; \quad Z = z - z_0. \qquad (10',III)$$

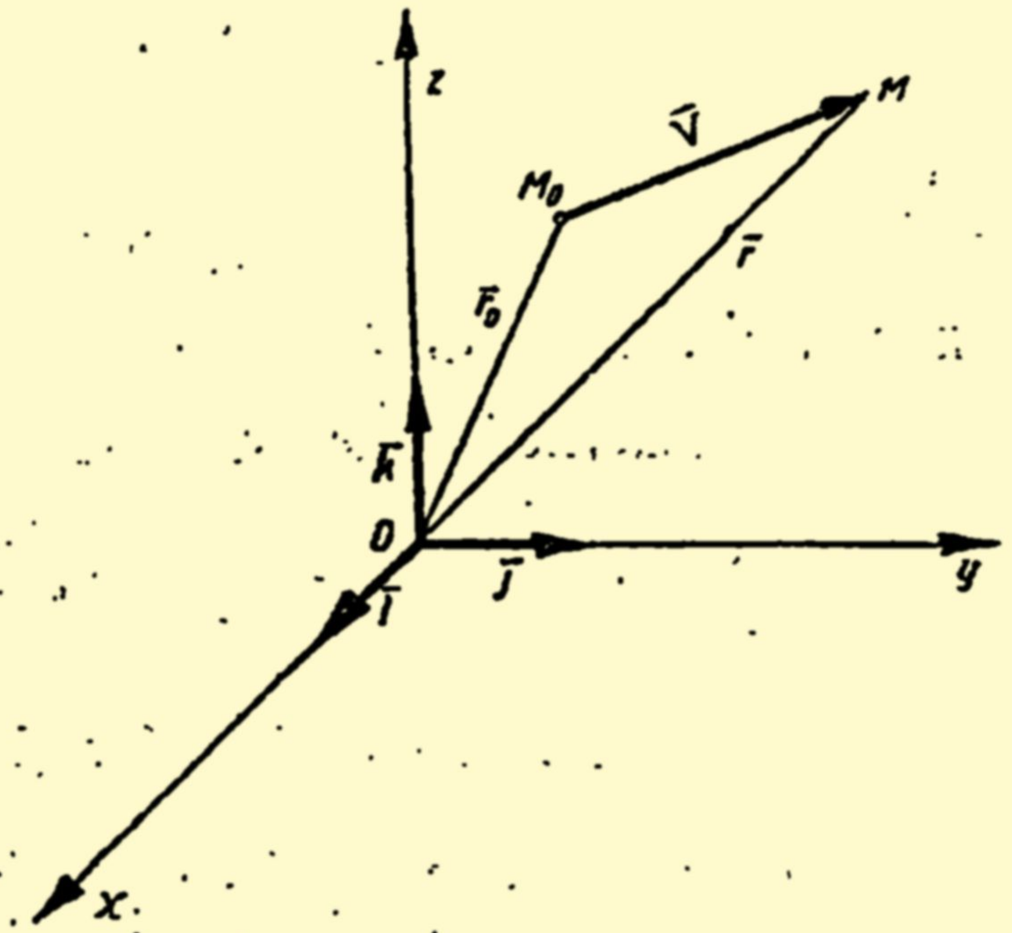


Fig. 82

Aceste formule se obţin direct sau considerând pe $\bar{V}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\bar{r}$ şi $\bar{r}_0$; deci aplicând formulele (10',III), ele exprimă proprietatea importantă următoare:

Componentele unui vector legat se obţin ca diferenţe ale coordonatelor extremităţii şi originii sale.

In particular, componentele vectorului de poziţie sunt coordonatele extremităţii sale M.

Facem observaţia că *vectorul de poziţie, considerat în această calitate, nu are caracter invariant*, adică nu este independent de sistemul de referinţă ales, deoarece depinde de originea O a acestui sistem. *Vectorul legat* $\bar{V}$ *are însă caracter invariant*, cu toate că se exprimă ca diferenţă de vectori de poziţie, deoarece punctele M_0 şi M sunt independente de orice sistem de referinţă.

Caracterul vectorial al unei mărimi rezultă din semnificaţia sa. Trei componente X, Y, Z date nu reprezintă un vector, decât dacă satisfac criteriul măsurii, ceeace implică să cunoaştem valorile lor în orice alt sistem de referinţă, din care poate rezulta caracterul vectorial al mărimii căreia i se atribue aceste componente.

Exemplul 1. *Se dau două puncte* $M_0(1, -1, 0)$ *şi* $M_1(3, 2, 6)$. *Să se determine modulul vectorului* $\overline{M_0M}$, *precum şi cosinusurile unghiurilor formate de acest vector cu axele de coordonate.*

Scanned with OKEN Scanner

Componentele vectorului $\overline{M_0M}$ vor fi $X=2$, $Y=3$, $Z=6$.

$$|\overline{M_0M}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{M_0M}|} = \frac{2}{7}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\overline{M_0M}|} = \frac{3}{7};$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{|\overline{M_0M}|} = \frac{6}{7}.$$

Exemplul 2. *Un triunghi ABC este dat prin vectorii*

$$\overline{AB} = c_1\bar{i}+c_2\bar{j}+c_3\bar{k}, \quad \overline{BC} = a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}.$$

Să se afle lungimea laturii AC, precum şi cosinusurile directoare ale acestei laturi.
Componentele vectorului

$$\overline{AC} = \overline{AB}+\overline{BC}$$

vor fi $X=a_1+c_1$, $Y=a_2+c_2$, $Z=a_3+c_3$. Deci

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(a_1+c_1)^2+(a_2+c_2)^2+(a_3+c_3)^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{AC}|} = \frac{a_1+c_1}{\sqrt{(a_1+c_1)^2+(a_2+c_2)^2+(a_3+c_3)^2}}, \text{ etc.}$$

§ 79. Produsul scalar şi relaţiile metrice

Prin descompunerea vectorilor după triedrul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ toate operaţiile algebrei liniare vectoriale se exprimă liniar prin componente.

Putem astfel trata analitic orice problemă de geometrie afină, adică în care nu intervin distanţe sau unghiuri, în coordonate carteziene ortogonale. Aceste probleme se pot trata absolut la fel chiar dacă triedrul fundamental este oarecare, nu ortogonal.

In schimb, *problemele de geometrie metrică, adică cele în care intervin distanţa sau unghiul, se tratează mult mai simplu în coordonate carteziene ortogonale.*

O primă justificare a acestei constatări o avem calculând expresiile distanţelor şi unghiurilor în coordonate carteziene ortogonale. Fiind daţi doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, vom scrie produsul lor scalar

$$\overline{V}_1\overline{V}_2 = (X_1\bar{i}+Y_1j+Z_1\bar{k})(X_2\bar{i}+Y_2\bar{j}+Z_2\bar{k}) = X_1X_2\bar{i}\bar{i}+X_1Y_2\bar{i}\bar{j}+X_1Z_2\bar{i}\bar{k}+\cdots$$

de unde, ţinând seama de relaţiile fundamentale (2,III) obţinem

$$\overline{V}_1\overline{V}_2 = X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \qquad (11,III)$$

Produsul scalar a doi vectori este suma produselor componentelor lor de acelaşi nume în raport cu triedrul fundamental ortogonal.

Practic, el se reţine din tabela:

$$\frac{\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix}}{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}$$

Scanned with OKEN Scanner

obţinută scriind cei doi vectori într'o ordine oarecare unul sub altul, păstrând doar componentele, înmulţindu-le pe coloane şi adunând rezultatele.

In particular, dacă $\overline{V}_2=\overline{V}_1=\overline{V}$, obţinem

$$\overline{V}^2=V^2=X^2+Y^2+Z^2. \qquad (12,III)$$

Vom numi V^2, adică pătratul modulului, *norma lui* $\overline{V}$.

Unghiul a doi vectori apare din formula $\overline{V}_1\,\overline{V}_2=V_1V_2\cos\theta$ şi este dat de expresia

$$\cos\theta=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)\,(X_2^2+Y_2^2+Z_2^2)}}. \qquad (13,III)$$

Condiţia de ortogonalitate a doi vectori se obţine din (11,III) sau (13,III) anulând produsul scalar (sau $\cos\theta$). Ea este

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \qquad (14,III)$$

In cazul când $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ sunt versori, vom nota

$$\overline{V}_1=\alpha_1\bar{i}+\beta_1\bar{j}+\gamma_1\bar{k};$$

$$\overline{V}_2=\alpha_2\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\gamma_2\bar{k}.$$

Este o notaţie utilă în geometria analitică, cu ajutorul căreia deducem formulele:

$$\cos\theta=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2; \qquad (15,III)$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1.$$

Din prima reţinem că, *pentru a calcula cosinusul unghiului a două direcţii se efectuează produsul scalar al versorilor lor*, deci suma produselor două câte două ale cosinusurilor directoare.

Proiecţia unui vector pe o axă, deşi este un caz particular al produsului scalar, este o noţiune metrică foarte importantă. Se obţine ca produsul scalar al vectorului considerat prin versorul axei de proiecţie.

Dacă notăm cu

$$\overline{u}=\bar{i}\cos a+\bar{j}\cos b+\bar{k}\cos c,$$

versorul axei, proiecţia lui $\overline{V}$ pe axă va fi

$$\text{pr. } \overline{V}_{\overline{u}}=\overline{V}\,\overline{u}=(X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k})\,(\bar{i}\cos a+\bar{j}\cos b+\bar{k}\cos c)= \qquad (16,III)$$

$$=X\cos a+Y\cos b+Z\cos c,$$

a, b, c fiind unghiurile făcute de axa $\overline{u}$ cu cele trei axe de coordonate Ox, Oy, Oz.

Exemplul 1. *Să se afle unghiul format de prima bisectoare a triedrului $OXYZ$ cu axele Ox, Oy, Oz, precum şi unghiurile formate cu primele bisectoare ale axelor (Ox, Oy), (Oy, Oz), (Oz, Ox).*

Un vector situat pe prima bisectoare a triedrului este $\overline{V}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, axele fiind reprezentate prin vectorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Aplicând formula (13,III) vom avea

$$\cos a=\cos b=\cos c=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Bisectoarea unghiului xOy poate fi reprezentată prin vectorul $\overline{V}_1=\overline{i}+\overline{j}$. Unghiul format de $\overline{V}$ cu $\overline{V}_1$, va fi

$$\cos 0_1=\frac{\overline{V}\,\overline{V}_1}{VV_1}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Exemplul 2. *Se dau punctele* A $(1, 2, -3)$ *şi* B $(-1, -2, 1)$. *Să se afle proiecţiile vectorului* $\overline{AB}$ *pe prima bisectoare a triedrului* $Oxyz$.

Versorul $\overline{u}$ al primei bisectoare a triedrului are componentele $\cos a=\cos b=\cos c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, iar componentele vectorului $\overline{AB}$ sunt $X=-2$, $Y=-4$, $Z=4$. Aplicând formula (16,III) găsim

$$\text{pr. } \overline{AB}_{\overline{u}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Exemplul 3. *Se dau punctele* A $(1, 1, 0)$ *şi* B $(3, -2, 5)$. *Să se găsească un punct* C *pe prima bisectoare a unghiului* yOz, *astfel încât triunghiul* ABC *să fie dreptunghic în* A.

Coordonatele punctului C vor fi de forma $C(0, \lambda, \lambda)$. Va trebui să scriem că vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ sunt ortogonali. Componentele lor sunt

$$(2, -3, 5);\quad (-1, \lambda-1, \lambda).$$

Condiţia de ortogonalitate (14,III), aplicată vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, ne dă

$$-2-3(\lambda-1)+5\lambda=0,$$

de unde $\lambda=-\frac{1}{2}$.

§ 80. Produsul vectorial şi bivectorul în coordonate carteziene ortogonale

Expresia analitică a produsului vectorial se obţine din aplicarea regulilor de înmulţire vectorială expresiei:

$$\overline{V}_1\times\overline{V}_2=(X_1\overline{i}+Y_1\overline{j}+Z_1\overline{k})\times(X_2\overline{i}+Y_2\overline{j}+Z_2\overline{k}).$$

Intre cei trei versori fundamentali există relaţiile (§ 49)

$$\begin{aligned}
&\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k};\quad \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j};\quad \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i};\\
&\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k};\quad \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j};\quad \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i};\\
&\overline{i}\times\overline{i}=\overline{0};\quad \overline{j}\times\overline{j}=\overline{0};\quad \overline{k}\times\overline{k}=\overline{0},
\end{aligned}\qquad (17,III)$$

astfel încât unul dintre ei este exprimabil în funcţie de ceilalţi doi, ca produs vectorial.

Vom avea deci

$$\overline{V}=\overline{V}_1\times\overline{V}_2=X_1X_2(\overline{i}\times\overline{i})+(X_1Y_2-Y_1X_2)(i\times\overline{j})+\cdots$$

şi ţinând seama de relaţiile (17,III):

$$\overline{V}=\overline{V}_1\times\overline{V}_2=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\overline{i}+(Z_1X_2-X_1Z_2)\overline{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\overline{k}. \quad (18,III).$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel

$$\begin{aligned} X &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \\ Y &= Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \\ Z &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{aligned} \qquad (19,III)$$

sunt componentele produsului vectorial pe cele trei axe.

Aceste formule se reţin uşor cu ajutorul tabelei utilizate pentru produsul scalar, complectat cu o linie formată de $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, constituind astfel un determinant simbolic

$$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad (20,III)$$

desfăşurabil exclusiv după linia întâi. Se vede că pentru a avea componentele produsului vectorial, vom lua minorii primei linii cu semnele impuse chiar de regula de desvoltare.

Dacă triedrul fundamental $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, ar fi fost negativ (stâng), componentele produsului vectorial ar fi apărut în formulele (19,III) cu semn schimbat, deoarece relaţiile fundamentale (17,III) ar fi avut deasemenea semne schimbate. Astfel, în loc de $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, am fi avut $\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{k}$, păstrând sensul de rotaţie pozitiv în definiţia produsului vectorial.

Este uşor de văzut că schimbarea sensului triedrului revine la schimbarea orientării unuia din versorii fundamentali, de exemplu a lui $\bar{i}$, sau la permutarea a doi dintre aceşti vectori, de exemplu $\bar{i}$ cu $\bar{j}$.

Dacă însă, adoptând un triedru stâng (negativ), schimbăm şi sensul de rotaţie în definiţia produsului vectorial, atunci formulele (19,III) îşi păstrează semnul, deoarece orientarea produsului vectorial $\bar{V}_1 \times \bar{V}_2$ faţă de planul bivectorului $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ se schimbă şi ea. Prin urmare, între produsul vectorial şi triedrul fundamental există o relaţie strânsă.

Definiţia adoptată iniţial corespunde alegerii unui triedru drept, adică orientării pozitive a spaţiului.

Dacă se orientează spaţiul în sens invers printr'un triedru fundamental stâng, produsul vectorial trebue definit deasemenea printr'o orientare inversă, adică prin rotaţia în sensul orar, dacă vrem ca formulele (19,III) să rămână valabile.

Dacă nu ţinem seama de aceste consideraţii, obţinem rezultate cu semne schimbate şi toate interpretările fizice trebue făcute pe baza unei rotaţii de sens contrar. Foarte multă vreme, Geometria analitică a utilizat un triedru stâng, adoptat şi în Statică, pe când Electromagnetismul a întrebuinţat triedrul drept.

Din expresiile componentelor unui produs vectorial deducem componentele bivectorului $(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ pe cele trei plane fundamentale xOy, yOz, zOx.

In adevăr, rămânând la orientarea pozitivă a spaţiului, cei trei versori fundamentali $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ definesc trei bivectori fundamentali $(\bar{i},\bar{j})$, $(\bar{j},\bar{k})$, $(\bar{k},\bar{i})$, care sunt în planele fundamentale orientate.

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (17,III) pentru aceşti bivectori fundamentali se vor scrie

$$(\bar{i},\bar{j})=-(\bar{j},\bar{i});\ (\bar{j},\bar{k})=-(\bar{k},\bar{j});\ (\bar{k},\bar{i})=-(\bar{i},\bar{k});\ (\bar{i},\bar{i})=(\bar{j},\bar{j})=(\bar{k},\bar{k})=0. \quad (21,III)$$

Nu mai este cazul, bineînţeles, să înlocuim pe fiecare din ei printr'un vector ca în formulele (17,III).

Deoarece lui $(\bar{i},\bar{j})$ îi corespunde produsul vectorial $\bar{i}\times\bar{j}$ etc., din formula produsului vectorial vom deduce imediat expresia bivectorului:

$$(\bar{V}_1,\bar{V}_2)=(X_1Y_2-Y_1X_2)(\bar{i},\bar{j})+(Y_1Z_2-Z_1Y_2)(\bar{j},\bar{k})+(Z_1X_2-X_1Z_2)(\bar{k},\bar{i}), \quad (22,III)$$

dacă înlocuim produsele vectoriale fundamentale prin bivectorii respectivi.

Constatăm astfel că, după cum am descompus vectorii după vectorii fundamentali, *putem descompune bivectorii după cei trei bivectori fundamentali* $(\bar{i},\bar{j})$, $(\bar{j},\bar{k})$, $(\bar{k},\bar{i})$.

Componentele bivectorului $(\bar{V}_1,\bar{V}_2)$ *sunt egale cu componentele produsului vectorial reprezentativ într'un sistem de referinţe cartezian ortogonal.*

Triedrul fundamental trebue deci considerat ca format din cei trei vectori fundamentali pentru măsura vectorilor şi a mărimilor vectoriale, dar ca *format deasemenea şi din cele trei plane fundamentale orientate pentru măsura bivectorilor.*

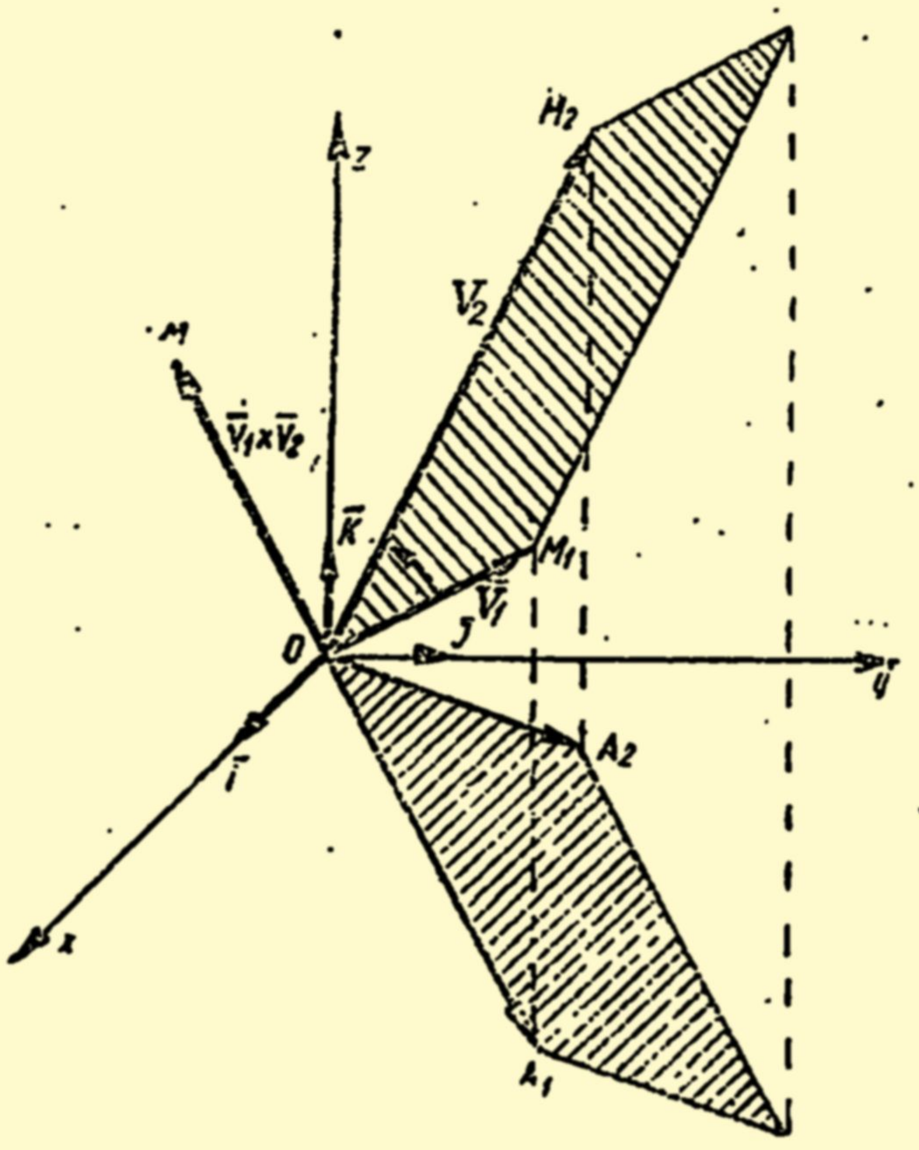


Fig. 83

Interpretarea geometrică a componentelor bivectorului rezultă imediat din formula (22,III).

In adevăr, vectorii $\overline{OA_1}$ şi $\overline{OA_2}$, proiecţiile lui $\overline{OM_1}=\bar{V}_1$ şi $\overline{OM_2}=\bar{V}_2$ pe planul xOy (fig. 83), vor avea componentele $(X_1,Y_1,0)$ şi $(X_2,Y_2,0)$, deci vor fi de forma

$$\overline{OA_1}=X_1\bar{i}+Y_1\bar{j},\quad \overline{OA_2}=X_2\bar{i}+Y_1\bar{j}.$$

Bivectorul $(\overline{OA_1},\overline{OA_2})$ se va deduce din (22,III) făcând $Z_1=Z_2=0$ şi vom avea

$$(\overline{OA_1},\ \overline{OA_2})=$$
$$=(X_1Y_2-Y_1X_2)(\bar{i},\bar{j}). \quad (23,III)$$

Prin urmare, putem spune *că cele trei componente ale unui bivector pe planele fundamentale sunt bivectorii-proiecţii ale bivectorului dat pe aceste plane.*

Să observăm că dacă luăm ca modul al bivectorului aria paralelogramului format cu cei doi vectori, *neorientată*, deci pozitivă, vom avea

$$\text{mod.}(\bar{i},\bar{j})=\text{mod.}(\bar{j},\bar{k})=\text{mod.}(k,\bar{i})=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Componenta scalară $X_1Y_2 - Y_1X_2$ va reprezenta *aria orientată* a paralelogramului $OA_1, \overline{OA}_2$, deci:

Componentele scalare ale unui bivector sunt ariile orientate ale proiecțiilor sale ortogonale pe cele trei plane fundamentale.

Vom putea calcula și modulul bivectorului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ știind că modulul produsului vectorial $\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = \overline{OM}$ este chiar aria definită de acest bivector.

$$\text{mod.}(\overline{V}_1, \overline{V}_2) = \sqrt{(X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 + (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2}. \quad (24,III)$$

Putem spune că și din punctul de vedere al măsurii, bivectorul este reprezentat de produsul vectorial astfel: *Componentele bivectorului față de un sistem cartezian ortogonal sunt egale cu componentele produsului vectorial, iar modulul său este modulul produsului vectorial.*

Este necesar să observăm că X corespunde componentei pe yOz, etc.

Unghiurile λ, μ, ν făcute de produsul vectorial cu axele Ox, Oy, Oz vor fi date de formulele

$$\cos\lambda = \frac{(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\bar{i}}{|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2|} = \frac{Y_1Z_2 - Z_1Y_2}{|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2|}; \quad \cos\mu = \frac{Z_1X_2 - X_1Z_2}{|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2|}; \quad \cos\nu = \frac{X_1Y_2 - Y_1X_2}{|\overline{V}_1 \times \overline{V}_1|}. \quad (25,III)$$

Aceleași formule ne vor da unghiurile făcute de bivectorul $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ cu cele trei plane fundamentale, respectiv yOz, zOx, xOy.

Condiția de paralelism a doi vectori fiind ca produsul lor vectorial să fie nul, din formulele (19,III) deducem

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = p. \quad (26,III)$$

Deci: *condiția necesară și suficientă ca doi vectori să fie paraleli este ca ei să aibă componentele proporționale.*

Fiind vorba de o proprietate afină, ea se putea obține și fără a recurge, la produsul vectorial, scriind că cei doi vectori sunt coliniari: $\overline{V}_2 = p\overline{V}_1$ și trecând la componente.

Formula (24,III) ne conduce la *componentele bivectorului nul.*

In adevăr, pentru ca mod. $(\overline{V}_1, \overline{V}_2) = 0$, trebue ca fiecare din cele trei pătrate să se anuleze, de unde regăsim condițiile (26, III). *Bivectorul nul are componentele nule* și poate fi considerat ca format de doi vectori coliniari oarecare.

Observăm în această împrejurare că bivectorul, care este o mărime bidimensională, devine nul când este făcut unidimensional.

Aceeași observație este valabilă și pentru vector, care este o mărime unidimensională. Vectorul nul este un vector zero-dimensional, deci asociat unui obiect redus la un punct.

Exemplul 1. *Să se scrie expresia analitică a produsului vectorial* $\bar{c} \times \bar{r}$ *unde* $\bar{c}(c_1, c_2, c_3)$ *este un vector constant iar* $\bar{r}$ *este vectorul de poziție al unui punct* $M(x, y, z)$ *din spațiu.*

Componentele lui $\bar{r}$ fiind tocmai x, y, z, vom avea după formula (20,III)

$$\bar{c} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2z - c_3y)\bar{i} + (c_3x - c_1z)\bar{j} + (c_1y - c_2z)\bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 2. *Se dau trei puncte A, B, C, situate respectiv pe Ox, Oy, Oz. Să se verifice că cele trei componente ale bivectorului* $(\overline{AB}, \overline{AC})$ *pe planele fundamentale sunt* $(\overline{OB}, \overline{OC}), (\overline{OC}, \overline{OA}), (\overline{OA}, \overline{OB})$.

Fie $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$, $C(0, 0, z)$. Vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ vor avea componentele $\overline{AB}(-x, y, 0)$, $\overline{AC}(-x, 0, z)$, iar $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ vor avea drept componente scalare coordonatele punctelor respective A, B, C. Vom avea

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = yz(\bar{j}, \bar{k}) + zx(\bar{k}, \bar{i}) + xy(\bar{i}, \bar{j}),$$

$$(\overline{OB}, \overline{OC}) = yz(\bar{j}, \bar{k}), \quad (\overline{OC}, \overline{OA}) = zx(\bar{k}, \bar{i}), \quad (\overline{OA}, \overline{OB}) = xy(\bar{i}, \bar{j}).$$

Bivectorii $(\overline{BC}, \overline{BA})$ şi $(\overline{CA}, \overline{CB})$ vor avea aceleaşi componente. (Dece?)

Exemplul 3. *Să se afle unghiurile formate de planul ABC din exemplul precedent cu planele de coordonate.*

Avem, folosind rezultatele de mai sus:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}; \quad |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}.$$

Unghiurile formate de planul ABC cu planele de coordonate sunt aceleaşi cu unghiurile formate de $(\overline{AB} \times \overline{AC})$ cu axele. Ţinem seama de (25,III) şi obţinem

$$\cos\lambda = \frac{(\overline{AB} \times \overline{AC})\bar{i}}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|} = \frac{yz}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}; \quad \cos\mu = \frac{zx}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}};$$

$$\cos\nu = \frac{xy}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}.$$

§ 81. Produsul mixt în coordonate carteziene ortogonale

Fiind daţi trei vectori $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ raportaţi la un triedru ortogonal, expresia analitică a produsului mixt $\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3$ rezultă imediat. Vom avea:

$$\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_3 = (\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)\,\overline{V}_3 = (\bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z)(\bar{i}X_3 + \bar{j}Y_3 + \bar{k}Z_3) =$$

$$= XX_3 + YY_3 + ZZ_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (27,III)$$

dacă ţinem seama de formulele (19,III).

Ajungem la acelaşi rezultat folosind expresia simbolică (20,III) a produsului vectorial. In adevăr, avem:

$$\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_3 = (\bar{i}X_1 + \bar{j}Y_1 + \bar{k}Z_1) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

înmulţind simbolic determinantul cu $\bar{i}X_1 + \bar{j}Y_1 + \bar{k}Z_1$, deci prima sa linie cu această expresie. Calculul este justificat, dacă ţinem seama că efectuăm un produs scalar.

Formula (27,III) ne dă măsura unui trivector în funcţie de componentele celor trei vectori, care îl definesc. Avem astfel, expresia volumului paralelipipedului format de trei vectori. Modulul trivectorului este volumul neorientat.

Scanned with OKEN Scanner

Pătratului modulului trivectorului este dat de determinantul lui Gram (78,II).

Expresia produsului mixt cu ajutorul componentelor ne permite stabilirea acestei formule şi chiar a uneia mai generale.

Să calculăm produsul de produse mixte

$$[\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_3]\,[\overline{V}'_1\,\overline{V}'_2\,\overline{V}'_3]$$

folosind formula (20,III) şi regula de înmulţire a determinanţilor.

Vom scrie:

$$[\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_3][\overline{V}'_1\,\overline{V}'_2\,\overline{V}'_3]=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}.$$

Înmulţind aceşti determinanţi linie cu linie, observăm că obţinem produse scalare de vectori, astfel încât vom avea imediat:

$$[\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_3]\,[\overline{V}'_1\,\overline{V}'_2\,\overline{V}'_3]=\begin{vmatrix} \overline{V}_1\overline{V}'_1 & \overline{V}_1\overline{V}'_2 & \overline{V}_1\overline{V}'_3 \\ \overline{V}_2\overline{V}'_1 & \overline{V}_2\overline{V}'_2 & \overline{V}_2\overline{V}'_3 \\ \overline{V}_3\overline{V}'_1 & \overline{V}_3\overline{V}'_2 & \overline{V}_3\overline{V}'_3 \end{vmatrix} \qquad (28,III)$$

ormulă care generalizează determinantul lui Gram.

In particular, dacă $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt liniar independenţi, iar $\overline{V}'_1$, $\overline{V}'_2$, $\overline{V}'_3$ sunt reciprocii lor, regăsim în formula (28,III) proprietatea produselor mixte ale acestor vectori.

In adevăr, ţinând seama de relaţiile (59,II), vom avea

$$[\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_3]\,[\overline{V}'_1\,\overline{V}'_2\,\overline{V}'_3]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

care dă relaţia (75,II) a produselor mixte ale sistemelor reciproce.

Exemplu. *Să se scrie expresia volumului unui tetraedru dat prin vârfurile sale* A_0, A_1, A_2, A_3.

Fie $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ vectorii de poziţie ai punctelor A_0, A_1, A_2, A_3. Volumul tetraedrului va fi $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului construit pe $\overline{A_0A_1}=\bar{r}_1-\bar{r}_0$; $\overline{A_0A_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_0$; $\overline{A_0A_3}=\bar{r}_3-\bar{r}_0$ ca laturi. Deci

$$V=\frac{1}{6}\,(\bar{r}_1-\bar{r}_0,\ \bar{r}_2-\bar{r}_0,\ \bar{r}_3-\bar{r}_0).$$

Trecând la componente,

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

De aici se poate deduce condiţia ca patru puncte să fie în acelaşi plan, precum şi ecuaţia unui plan dat prin trei puncte, egalând cu zero determinantul în care am înlocuit x_0, y_0, z_0 cu x, y, z, coordonatele unui punct curent al planului.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Să notăm cu a_1, a_2, a_3 lungimile muchiilor A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, cu λ_1, λ_2, λ_3 unghiurile feţelor: $\lambda_1 = \measuredangle A_2A_0A_3$, $\lambda_2 = \measuredangle A_3A_0A_1$, $\lambda_3 = \measuredangle A_1A_0A_2$ şi cu V volumul neorientat al tetraedrului $A_0A_1A_2A_3$.

Determinantul lui Gram ne conduce la

$$V^2 = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2\cos\lambda_3 & a_1a_3\cos\lambda_2 \\ a_2a_1\cos\lambda_3 & a_2^2 & a_2a_3\cos\lambda_1 \\ a_3a_1\cos\lambda_2 & a_3a_2\cos\lambda_1 & a_3^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{36}a_1^2a_2^2a_3^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda_3 & \cos\lambda_2 \\ \cos\lambda_3 & 1 & \cos\lambda_1 \\ \cos\lambda_2 & \cos\lambda_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

sau, desvoltând determinantul:

$$V^2 = \frac{1}{9}a_1^2a_2^2a_3^2\sin\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2}\sin\frac{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1}{2}\sin\frac{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}{2}\sin\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}.$$

Deoarece într'un triedru unghiul unei feţe este mai mic decât suma celorlalte două, iar suma celor trei unghiuri ale feţelor este mai mică decât patru unghiuri drepte, toţi factorii din membrul al doilea sunt pozitivi şi produsul de sinusuri este mai mic decât unu. Notând acest produs cu $\sin^2\delta$, expresia volumului tetraedrului este:

$$V = \frac{1}{3}a_1a_2a_3\sin\delta,$$

cu totul analoagă formulei ariei unui triunghi, în funcţie de două laturi şi unghiul cuprins între ele.

§ 82. Vectori şi sisteme carteziene ortogonale în plan

Operaţiile vectoriale sunt concepute în ipoteză că vectorii sunt mărimi geometrice ale spaţiului cu trei dimensiuni. Unele din ele se extind uşor şi la spaţii cu $n>3$ dimensiuni, sau se pot aplica şi spaţiilor cu $n<3$ dimensiuni, în particular planului şi dreptei.

Astfel, operaţiile algebrei liniare vectoriale, ca suma sau combinaţia liniară de vectori, se efectuează la fel în spaţiu şi în plan.

Produsul scalar fiind aplicat la doi vectori, în planul definit de aceştia, el poate fi efectuat independent de spaţiu. Produsul vectorial însă, conduce la un vector perpendicular pe planul celor doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, deci nu poate fi reprezentat în acest plan; ci presupune existenţa spaţiului ambiant.

In adevăr, fie $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ doi vectori situaţi într'un plan P. Să alegem ca triedru de referinţă un triedru format de doi versori ortogonali $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ din planul P şi de un al treilea versor $\bar{k}$ perpendicular pe plan, astfel încât $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ să fie un triedru drept.

Vom putea scrie:

$$\overline{V}_1 = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j}, \quad \overline{V}_2 = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j},$$

deoarece aceşti vectori sunt coplanari cu $\bar{i}$ şi $\bar{j}$. Produsul scalar fiind:

$$\overline{V}_1\,\overline{V}_2 = (X_1\bar{i} + Y_1\bar{j})(X_2\bar{i} + Y_2\bar{j}) = X_1X_2 + Y_1Y_2,$$

este exprimat exclusiv prin componentele celor doi vectori în planul P, măsurate pe direcţiile lui $\bar{i}$ şi $\bar{j}$. Dimpotrivă, produsul vectorial va fi:

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = (X_1\bar{i} + Y_1\bar{j}) \times (X_2\bar{i} + Y_2\bar{j}) = (X_1Y_2 - Y_1X_2)\,\bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că el nu poate fi reprezentat geometric decât considerând planul ca scufundat în spațiul cu trei dimensiuni, deși expresia $X_1Y_2 - Y_1X_2$ este calculată cu componentele vectorilor din planul P.

Bivectorul, în schimb, este o noțiune geometrică, pe care putem să o considerăm exclusiv în planul celor doi vectori $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$.

Vom avea în acest plan bivectori cu orientări pozitive și negative.

Planul, considerat ca spațiu cu două dimensiuni, va avea o singură față, ca în geometria plană, deoarece noțiunea de față presupune un spațiu ambiant.

Vom putea orienta planul în sine cu ajutorul bivectorilor considerând sensul de rotație antiorar (sau trigonometric) ca pozitiv și sensul orar (al acelor ceasornicului) ca negativ. Tot așa am procedat și în spațiul cu trei dimensiuni, considerat ca independent de ori ce alt spațiu cu un număr mai mare de dimensiuni.

Am descoperit în spațiu existența trivectorilor, deci a triedrelor orientabile în două sensuri: drept și stâng și am recunoscut astfel posibilitatea de orientare a spațiului. Acest mod de a exprima proprietățile de orientabilitate ale spațiului și planului nu face decât să dea expresia matematică a acestor proprietăți fizice, pe care le verificăm permanent în viața de toate zilele, de exemplu celor două feluri de înșurubări.

In cazul planului, vom obține un sistem de referință vectorial din descompunerea oricărui vector după doi vectori $(\overline{u}, \overline{v})$, care definesc acest plan în spațiu, sau care sunt liniar independenți în acest plan, considerat ca independent de spațiul înconjurător. Prin urmare, un bivector oarecare din plan poate fi considerat ca *bivector fundamental* $(\overline{u}, \overline{v})$. Dacă $(\overline{u}, \overline{v})$ are orientare pozitivă, adică în sensul antiorar, adoptat ca pozitiv, planul va fi orientat pozitiv, și invers, dacă $(\overline{u}, \overline{v})$ are orientarea negativă, planul va fi orientat negativ. Putem chiar lua ca pozitivă orientarea lui $(\overline{u}, \overline{v})$ în mod convențional.

Măsura mărimilor vectoriale din acest plan se va face, ca și în spațiu, descompunând vectorii reprezentativi după $\overline{u}$ și $\overline{v}$ aleși ca vectori-unitate. Vom avea

$$\overline{V} = X\overline{u} + Y\overline{v} \qquad (29,III)$$

pentru orice vectori $\overline{V}$ din plan, X și Y fiind componentele scalare și reprezentând măsura vectorială a lui $\overline{V}$.

Vom putea studia vectorii prin componentele lor și vom regăsi ușor rezultatele geometriei analitice plane.

Bivectorii nu vor mai putea avea un vector reprezentativ, deoarece acesta este perpendicular pe plan. După cum în spațiu, trivectorul este un element constitutiv, tot așa *în plan bivectorul este element constitutiv,* cu care se poate parcela întreg planul. *Măsura bivectorului ne dă elementul de măsură al planului, adică elementul de arie orientat.*

Ca și trivectorul în spațiu, bivectorul în plan, neavând vector reprezentativ, va apărea sub aspect pseudo-scalar, fiind reprezentat chiar prin măsura sa.

Formula (29,III) ne arată că putem trata vectorii din plan considerându-i în spațiu raportați la un triedru $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ și având componenta $Z=0$. Putem deasemenea considera planul ca independent de spațiu. In acest caz, regăsim aceleași rezultate, dar unele dintre ele cu o semnificație prea restrânsă și

Scanned with OKEN Scanner

chiar inexactă. Este instructiv să facem comparaţii între cele două moduri de cercetare a vectorilor din plan, având în vedere numeroasele lor aplicaţii tehnice, deoarece fenomenele considerate ca având loc într'un plan, sunt de fapt spaţiale şi ca atare trebue raportate la spaţiu. Reducerea lor la o desfăşurare exclusiv plană ascunde unele din proprietăţile, care rezultă din relaţiile lor cu alte fenomene din spaţiu.

Cel mai simplu sistem de referinţă plan ortogonal poate fi obţinut cu ajutorul a doi versori ortogonali $\bar{i}$, $\bar{j}$ formând un bivector pozitiv. Vom avea

$$\bar{i}\,\bar{j}=0;\quad i^2=j^2=1;\quad (\bar{i},\bar{j})=-(\bar{j},\bar{i}). \tag{30,III}$$

Un vector oarecare $\overline{V}$ se va pune sub forma

$$\overline{V}=X\bar{i}+Y\bar{j}, \tag{31,III}$$

unde

$$X=\overline{V}\bar{i};\quad Y=\overline{V}\bar{j}. \tag{32,III}$$

Dacă notăm cu α, β unghiurile făcute de $\overline{V}$ cu direcţiile Ox, Oy ale axelor definite de $\bar{i}$, $\bar{j}$, vom avea

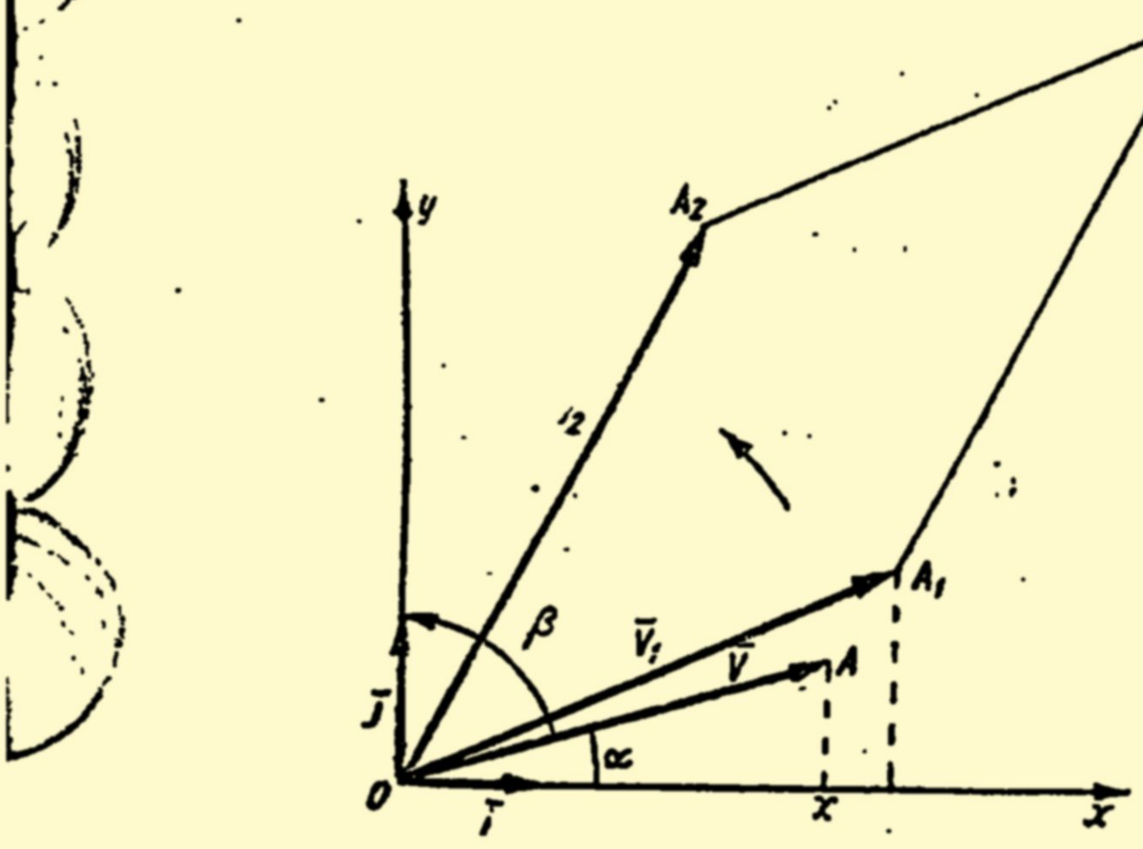


Fig. 84

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

şi deci

$$X=V\cos\alpha;\quad Y=V\cos\beta. \tag{33,III}$$

Componentele scalare X, Y ale lui $\overline{V}$ sunt coordonatele extremităţii vectorului $\overline{OA}=\overline{V}$ (fig. 84).

Sistemul de referinţă cartezian ortogonal, astfel definit, este şi sistem de coordonate cartezian ortogonal pentru punctele planului.

Produsul scalar a doi vectori $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ are expresia

$$\overline{V}_1\,\overline{V}_2=X_1X_2+Y_1Y_2, \tag{34,III}$$

iar modulul vectorului $\overline{V}$ este

$$V=\sqrt{X^2+Y^2}. \tag{35,III}$$

Bivectorul are în plan o singură componentă. Dacă planul este considerat în spaţiu, aceasta reiese imediat din fig. 83 rotind bivectorul $(\overline{OM}_1, \overline{OM}_2)$ până se aşterne pe planul $(\bar{i}, \bar{j})$. Mai precis, dacă un bivector $(\overline{OA}_1, \overline{OA}_2)$ se găseşte în planul fundamental (i, j), componentele Z_1 şi Z_2 ale vectorilor sunt nule şi obţinem expresia (23,III) care este valabilă şi în cazul când studiem vectorii din planul fundamental $(\bar{i}, j)$.

Vom scrie deci

$$(\overline{OA}_1, \overline{OA}_2)=(X_1Y_2-Y_1X_2)\,(\bar{i},\bar{j}) \tag{36,III}$$

Scanned with OKEN Scanner

alegând în plan ca bivector unitate, bivectorul fundamental unic $(\bar{i}, \bar{j})$ (fig. 84). Dacă planul este considerat independent, orice bivector $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ fiind proporţional cu $(\bar{i}, \bar{j})$, bivectorul fundamental nu mai apare în formule, astfel încât orice bivector este reprezentat numai prin măsura sa $X_1Y_2 - Y_1X_2$, adică prin aria orientată a paralelogramului $(\overline{OA}_1, \overline{OA}_2)$. Când în geometria analitică se calculează aria paralelogramului, se constată că ea poate fi pozitivă sau negativă şi se disting cele două cazuri prin orientarea circulaţiei pe conturul paralelogramului.

In realitate, această arie nu este decât singura componentă scalară a bivectorului $(\overline{OA}_1, \overline{OA}_2)$, *care este corect exprimat prin formula* (36, III) *şi nu prin componenta sa* $X_1Y_2 - Y_1X_2$.

Când însă aria este exprimată, de exemplu, în metri pătraţi, bivectorul-unitate $(\bar{i}, \bar{j})$ intervine implicit, locuţiunea 7 m² însemnând de fapt măsura bivectorului de 7 ori mai mare decât bivectorul-unitate $(\bar{i}, \bar{j})$. In cazul când se obţine aria negativă —7 m², expresia înseamnă măsura unui bivector de orientare negativă de 7 ori mai mare ca $(\bar{i}, \bar{j})$.

Uneori când o mărime are într'un spaţiu o singură componentă, ea este considerată ca scalară în mod *impropriu.*

Deosebirea dintre o mărime scalară şi o mărime pseudo-scalară constă în faptul că măsura primei nu depinde, pe când măsura ultimei depinde, de sistemul de referinţă al spaţiului respectiv.

Trivectorul în spaţiu, bivectorul în plan şi vectorul pe o dreaptă apar ca mărimi pseudo-scalare.

§ 83. Complimentul unui vector în plan

După cum oricărui bivector din spaţiu i se asociază un vector reprezentativ perpendicular pe el — produsul vectorial, tot aşa oricărui vector din plan i se poate asocia un vector perpendicular pe el.

Produsul vectorial formează cu bivectorul un trivector pozitiv şi este prin aceasta complect determinat în spaţiu.

Vom impune şi în cazul planului aceeaşi condiţie, ca vectorul asociat să formeze cu vectorul dat un bivector *pozitiv* şi să aibă ca modul modulul vectorului dat.

Vom numi vectorul $\overline{V}^*$ astfel definit *complimentul* vectorului $\overline{V}$.

Pentru determinarea lui $\overline{V}^*$, vom raporta planul la un sistem cartezian ortogonal pozitiv $(\bar{i}, \bar{j})$ şi vom scrie

$$\overline{V} = X\bar{i} + Y\bar{j}; \quad \overline{V}^* = X^*\bar{i} + Y^*\bar{j}.$$

Condiţiile impuse sunt

$$\overline{V}\,\overline{V}^* = 0; \quad (\overline{V}, \overline{V}^*) = K^2(\bar{i}, \bar{j}); \quad V^* = V, \tag{37,III}$$

unde K^2 este modulul bivectorului $(\overline{V}, \overline{V}^*)$.

Utilizând componentele, condiţiile (37,III) devin

$$XX^* + YY^* = 0; \quad XY^* - YX^* = K^2; \quad X^{*2} + Y^{*2} = X^2 + Y^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din primele două deducem imediat

$$X^* = -\frac{K^2}{X^2+Y^2}Y; \quad Y^* = \frac{K^2}{X^2+Y^2}X.$$

Introducând aceste valori în ultima, vom avea

$$K^2 = X^2+Y^2 = X^{*2}+Y^{*2},$$

iar componentele complimentului lui $\overline{V}$ se vor reduce la

$$X^* = -Y, \quad Y^* = X. \qquad (38,III)$$

Acest compliment se obţine prin *rotaţia de amplitudine* $\frac{\pi}{2}$ *a vectorului* $\overline{V}$ *în sensul pozitiv.*

Orice vector $\overline{V}$ *şi complimentul său* $\overline{V}^*$ *definesc în plan un sistem de referinţă pozitiv, cartezian, ortogonal.*

Pentru aceasta este suficient să considerăm versorul lui $\overline{V}$ în loc de $\overline{V}$. Vom putea deci pune

$$\frac{\overline{V}}{V} = \bar{i}, \quad \frac{\overline{V}^*}{V^*} = \bar{j}.$$

In aplicaţiile geometrice şi fizice se impune în mod natural alegerea unui astfel de sistem de referinţă. Este suficient să ne gândim la studiul unei curbe plane în jurul unui punct al ei, la calculul curburii, etc. Luând tangenta orientată la curbă ca vector $\overline{V}$, complimentul acestuia va fi normala orientată la curbă. Sistemul de referinţă astfel format este intrinsec legat de curbă şi proprietăţile acesteia se exprimă simplu în raport cu el. Aceeaşi observaţie este valabilă pentru calculul vitezei şi acceleraţiei.

Complimentul $\overline{V}^*$ *al unui vector* $\overline{V}$ *dintr'un plan* P *poate fi obţinut prin operaţia de dublu produs vectorial.*

In adevăr fie $(\bar{i}, \bar{j})$ un bivector pozitiv format cu doi vectori ortogonali $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ din planul P (fig. 85).

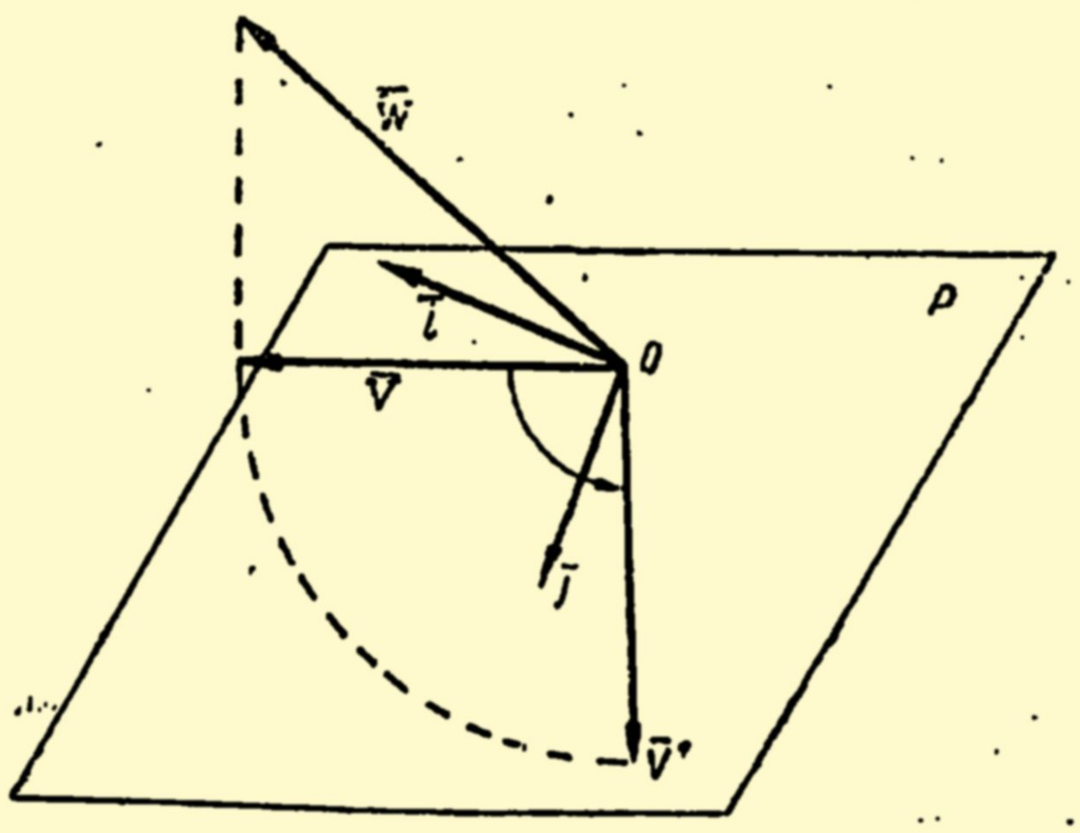


Fig. 85

Vom avea:

$$(\bar{i}\times\bar{j})\times\overline{V} = \bar{j}(\overline{V}\bar{i}) - \bar{i}(\overline{V}\bar{i}) =$$
$$= -(\overline{V}\bar{j})\bar{i} + (\overline{V}\bar{i})\bar{j}.$$

Componentele scalare ortogonale ale lui $\overline{V}$ pe direcţiile i, j fiind:

$$X = (\overline{V}\bar{i}); \quad Y = (\overline{V}\bar{j}),$$

vom deduce imediat:

$$(\bar{i}\times\bar{j})\times\overline{V} = -Y\bar{i} + X\bar{j} =$$
$$= X^*\bar{i} + Y^*\bar{j},$$

ţinând seama de (38,III), deci:

$$\overline{V}^* = (i\times\bar{j})\times\overline{V}. \qquad (39,III)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare: *Complimentul $\overline{V}^*$ al unui vector dintr'un plan P este dublul produs vectorial al unui bivector fundamental $(\bar{i}, \bar{j})$ format de doi versori ortogonali $\bar{i}$ și $\bar{j}$ din plan cu vectorul $\overline{V}$.*

Se vede că *produsul la stânga prin $(\bar{i} \times \bar{j})$ are ca efect rotația vectorului $\overline{V}$ în sensul pozitiv, de amplitudine $\frac{\pi}{2}$*. In mod analog vom avea:

$$\overline{V} \times (\bar{i} \times \bar{j}) = -\overline{V}^*$$

deci *produsul la dreapta prin $(\bar{i} \times \bar{j})$ are ca efect rotația vectorului $\overline{V}$ în sensul negativ, de amplitudine $\frac{\pi}{2}$*.

Fiind dat un vector $\overline{W}$ în spațiu, putem exprima în mod analog proiecția sa $\overline{V}$ pe planul P. Vom avea dublul produs vectorial

$$(\bar{i} \times \bar{j}) \times \overline{W} = (\bar{i} \times \bar{j}) \times \overline{V} = \overline{V}^*$$

deoarece factorul $\overline{W}$ poate fi înlocuit prin proiecţia sa pe planul $(\bar{i}, \bar{j})$ în dublul produs vectorial.

Dacă rotim pe $\overline{V}^*$ în sensul negativ cu $\frac{\pi}{2}$ vom obţine $\overline{V}$, deci:

$$\overline{V} = [(\bar{i} \times \bar{j}) \times \overline{W}] \times (\bar{i} \times \bar{j}) \qquad (39',III)$$

Fiind daţi doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, produsul scalar $\overline{V}_1^* \overline{V}_2$ are expresia

$$\overline{V}_1^* \overline{V}_2 = (-Y_1\bar{i} + X_1\bar{j})\,(X_2\bar{i} + Y_2\bar{j}) = X_1Y_2 - Y_1X_2, \qquad (40,III)$$

deci este egal cu componenta scalară a bivectorului $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$.

Vom avea

$$\overline{V}_2^* \overline{V}_1 = -\overline{V}_1^* \overline{V}_2$$

şi vom numi expresia (40,III) *produs alternat* al celor doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ din plan, pentru a pune în evidenţă această proprietate[1]).

Fiind dat un vector $\overline{u}$, orice alt vector $\overline{V}$ din plan este determinat, dacă se cunosc produsele scalar şi alternat ale lui $\overline{u}$ cu $\overline{V}$.

In adevăr, vom determina pe $\overline{V}$ prin componentele sale faţă de sistemul de referinţă ortogonal $\overline{u}, \overline{u}^*$ scriind

$$\overline{V} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{u}^*$$

şi ţinând seama că avem

$$\overline{u}\,\overline{V} = a, \quad \overline{u}^*\overline{V} = b$$

---

[1]) Dacă exprimăm vectorii $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ prin componentele lor într'un sistem de axe $\bar{i}, \bar{j}$, avem

$$\overline{V}_1 = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j}, \quad \overline{V}_2 = \gamma\bar{i} + \delta\bar{j}$$

şi valoarea produsului alternat va fi dată de determinantul

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde a, b sunt cantităţi scalare cunoscute. Înmulţind scalar cu $\overline{u}$ şi $\overline{u}^*$, obţinem

$$\alpha=\frac{\overline{u}\overline{V}}{u^2}=\frac{a}{u^2};\quad \beta=\frac{\overline{u}^*\overline{V}}{u^{*2}}=\frac{b}{u^2},$$

de unde

$$\overline{V}=\frac{a}{u^2}\overline{u}+\frac{b}{u^2}\overline{u}^*.$$

Este uşor de văzut că, notând cu $\overline{i}$ şi $\overline{j}$ versorii lui $\overline{u}$ şi $\overline{u}^*$, regăsim descompunerea cunoscută

$$\overline{V}=\frac{a}{u}\overline{i}+\frac{b}{u}\overline{j}=(\overline{i}\overline{V})\overline{i}+(\overline{j}\overline{V})\overline{j}.$$

Cunoaşterea celor două produse revine la cunoaşterea proiecţiilor vectorului pe două axe rectangulare.

Dacă notăm cu α unghiul făcut de $\overline{V}$ cu $\overline{u}$, vom avea

$$X=V\cos\alpha;\quad Y=V\sin\alpha;$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{u}\overline{V}}{uV}=\frac{a}{uV};\quad \sin\alpha=\frac{\overline{u}^*\overline{V}}{uV}=\frac{b}{uV}.$$

Deci

$$\overline{V}=\overline{i}(V\cos\alpha)+\overline{j}(V\sin\alpha)=V(\overline{i}\cos\alpha+\overline{j}\sin\alpha). \qquad (41,\text{III})$$

§ 84. Vectorii din plan şi reprezentarea complexă

Faptul că putem determina un vector $\overline{V}$ prin modulul său şi prin unghiul α, pe care îl face cu un vector dat $\overline{u}$ prin formula (41,III), adică prin cele două produse $\overline{u}\overline{V}$ şi $\overline{u}^*\overline{V}$, conduce la o nouă reprezentare a vectorilor din plan prin numere complexe.

Dacă notăm cu i numărul complex $\sqrt{-1}$, atunci un număr complex oarecare Z se scrie

$$Z=X+iY,$$

unde X şi Y sunt părţile reală, respectiv imaginară, ale lui Z.

Unui număr complex Z putem face să-i corespundă un punct A din planul raportat la un sistem de referinţă cartezian ortogonal. Acest punct, de coordonate X, Y, determină un vector $\overline{V}=\overline{OA}$, astfel încât oricărui număr complex Z îi corespunde un vector $\overline{V}$, şi invers. Vectorului nul îi corespunde numărul $0+i0$, iar la doi vectori egali corespund două numere complexe egale, fiindcă se ştie că dacă punem

$$Z=X+iY;\quad Z'=X'+iY',$$

atunci

$$Z=Z' \text{ dacă } X=X' \text{ şi } Y=Y'$$

şi numai în acest caz.

Sumei a doi vectori îi corespunde suma a două numere complexe

$$Z+Z'=(X+X')+i(Y+Y').$$

Scanned with OKEN Scanner

In general, o combinaţie liniară

$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \cdots + \lambda_n Z_n$$

de numere complexe cu coeficienţi reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ corespunde unei combinaţii liniare de vectori din planul considerat.

Reprezentarea vectorilor prin numere complexe permite exprimarea complimentului unui vector $\overline{V}$ printr'o operaţie algebrică.

In adevăr, vom avea

$$iZ = i(X + iY) = -Y + iX,$$

deci *vectorul corespunzător lui iZ este* $\overline{V}^*$.

Inmulţirea cu simbolul complex i corespunde rotaţiei unui vector în sens pozitiv, de amplitudine $\frac{\pi}{2}$. Numărul

$$Z^+ = X - iY$$

se numeşte *conjugatul* lui Z şi corespunde unui vector simetric lui $\overline{V}$ faţă de axa Ox.[1])

Un vector oarecare $\overline{V}$, de componente X, Y, se mai poate scrie şi sub forma

$$Z = X + iY = V(\cos\alpha + i\sin\alpha) = Ve^{i\alpha}, \qquad (42,III)$$

corespunzătoare formulei (41,III).

Unghiul α se numeşte *argumentul* numărului complex Z şi uneori, *faza* vectorului V.

Dacă efectuăm produsul $Z_1 Z_2$ a două numere complexe vom avea

$$Z_1 Z_2 = (X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) = X_1 X_2 - Y_1 Y_2 + i(Y_1 X_2 + X_1 Y_2), \qquad (43,III)$$

iar dacă întrebuinţăm reprezentarea (42,III), putem scrie

$$Z_1 Z_2 = V_1 e^{i\alpha_1} V_2 e^{i\alpha_2} = V_1 V_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}. \qquad (44,III)$$

Produsului a două numere complexe îi corespunde deci un vector de modul egal cu produsul modulelor celor doi vectori $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ şi de argument egal cu suma argumentelor lor.

Putem spune că acest vector se obţine rotind unul din vectori de un unghi egal cu argumentul celuilalt în sens pozitiv sau negativ, după semnul acestui argument şi amplificându-l prin modulul acestui vector.

In cazul particular când

$$Z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

formula (44,III) arată că Z se roteşte de unghiul $\frac{\pi}{2}$.

---

[1]) In general conjugatul unui număr Z se notează prin $\overline{Z}$, dar această notaţie ar putea conduce la confuzii în acest paragraf.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede deci că *reprezentarea complexă a vectorilor din plan ne dă posibilitatea de a transforma vectorii prin rotaţie şi amplificare*, mai bine zis, de a reprezenta aceste operaţii geometrice, care transformă o figură într'o figură asemenea cu ea, fără a scufunda planul în spaţiul cu trei dimensiuni.

Facem observaţia că *amplificarea cu simbolul complex* $i=\sqrt{-1}$ *este echivalentă cu înmulţirea vectorială la stânga prin produsul vectorial* $(\bar{i}\times\bar{j})$. Această ultimă operaţie presupune, însă, că planul este scufundat în spaţiul cu trei dimensiuni. *Introducerea produsului algebric de numere complexe substitue unei operaţii vectoriale în spaţiu o operaţie geometrică în planul în care aceasta are loc, independent de spaţiul ambiant.*

Reprezentarea complexă a vectorilor din plan are aplicaţii foarte importante în Electrotehnică şi în general în reprezentarea fenomenelor periodice [1]).

Formula (43,III), aplicată produsului $Z_1^+Z_2$, devine:

$$Z_1^+Z_2=(X_1-iY_1)(X_2+iY_2)=X_1X_2+Y_1Y_2+i(X_1Y_2-Y_1X_2).$$

Ţinând seama de expresiile produselor scalar şi alternat ale vectorilor $\overline{V}_1, \overline{V}_2$, vom putea scrie

$$Z_1^+Z_2=\overline{V}_1\overline{V}_2+i\overline{V}_1\overline{V}_2. \qquad (45,III)$$

Deci: *partea reală a numărului complex* $Z_1^+Z_2$ *este produsul scalar al vectorilor* $\overline{V}_1, \overline{V}_2$, *iar partea imaginară este produsul lor alternat.*

Produsul algebric al numerelor complexe defineşte deci o operaţie nouă asupra vectorilor din plan, care nu este conţinută în Algebra vectorială plană şi care se poate exprima cu operaţia de produs scalar şi cu simbolul complex i. Utilizarea acestui simbol evită operaţia de dublu produs vectorial, care este spaţială.

Utilizarea aceleiaşi litere i cu două semnificaţii poate produce confuzii, dacă se pierde din vedere că în reprezentarea complexă simbolul i nu este un vector, ci un operator, cu ajutorul căruia se obţine un nou mijloc de calcul cu vectorii din plan.

In Electrotehnică se utilizează simbolul $j=\sqrt{-1}$ în locul lui i, (cu aceleaşi posibilităţi de confuzie), păstrându-se simbolul i pentru rotarea intensităţii curentului.

Reprezentarea complexă a vectorilor dintr'un plan depinde de alegerea axelor, mai precis, de alegerea unui singur vector fundamental $\overline{u}$. In adevăr celălalt este atunci determinat, fiind complementul $\overline{u}^*$.

Conjugatul Z^+ al unui vector dat Z depinde deasemenea de alegerea axelor, deci nu are caracter invariant, dar produsul $Z_1^+Z_2$ are un caracter invariant, după cum rezultă din formula (45,III) în care nu intervin decât produsul scalar şi produsul alternat al celor doi vectori. Prin faptul că această reprezentare permite exprimarea simbolică a rotaţiilor, translaţiilor şi amplificărilor, deci a asemănării figurilor plane, ea constitue baza unui calcul simbolic foarte util în aplicaţii, dar care iese din cadrul calculului vectorial prin metodele sale speciale.

---

[1]) A se vedea la sfârşitul punctului *A*.

Scanned with OKEN Scanner

§ 85. Schimbarea sistemului de referinţă ortogonal

Măsura mărimilor vectoriale cu trei unităţi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ne-a condus la reprezentarea lor prin componentele scalare. *Această reprezentare trebue, însă, să nu depindă de alegerea specială a acestor unităţi,* prin urmare trebue ca mărimile vectoriale să poată fi măsurate, independent de modul particular în care au fost alese unităţile.

Prin urmare, dacă în locul triedrului fundamental $\bar{i}, j, \bar{k}$ folosim un alt triedru fundamental $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, format cu alţi trei versori ortogonali, noile componente trebue să se exprime în funcţie de cele vechi cu ajutorul relaţiilor dintre versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ pe de o parte şi $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ pe de altă parte.

Trecerea dela reprezentarea într'un sistem la cea în cel de al doilea constitue *schimbarea sistemului de referinţă.*

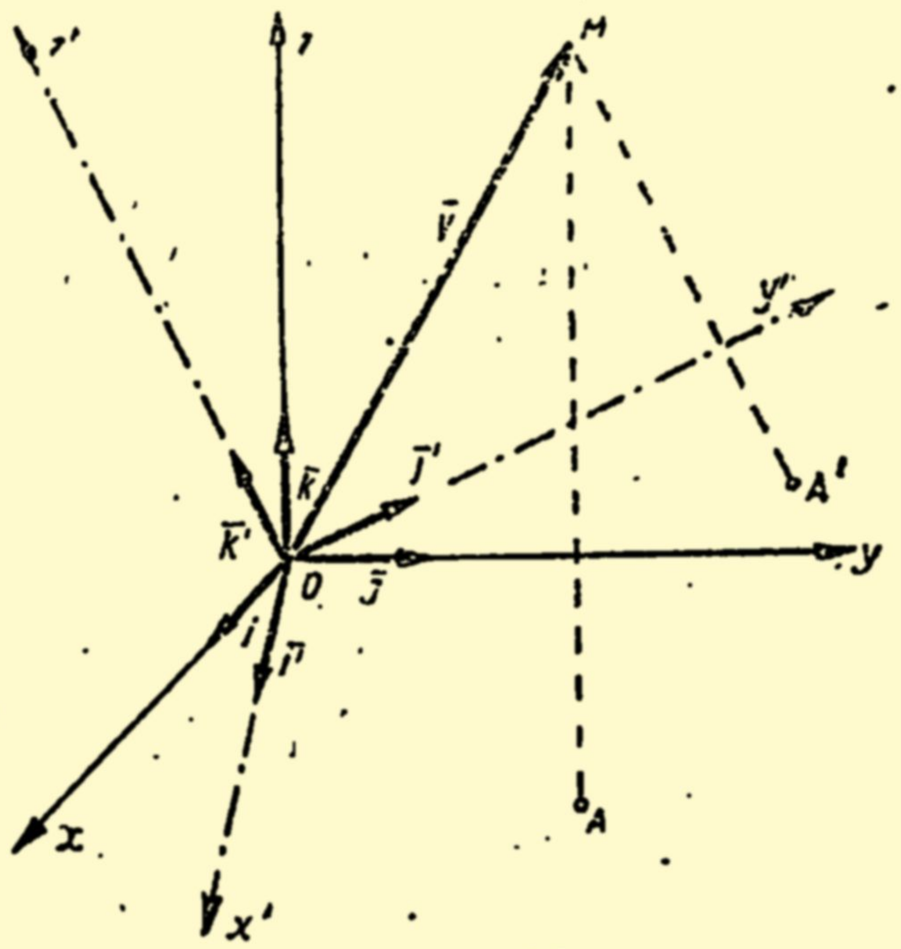


Fig. 86

Putem oricând considera cele două triedre ca având acelaşi vârf O şi vectorul $\bar{V}$ aşezat cu originea în acest punct, deoarece ne ocupăm de vectori liberi (fig. 86). Cazul vectorilor legaţi se deduce imediat dând o translaţie noului triedru.

Fie

$$\bar{V} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \qquad (46,III)$$

expresia vectorului $\bar{V}$ faţă de primul triedru şi

$$\bar{V} = X'\bar{i}' + Y'\bar{j}' + Z'\bar{k}' \qquad (47,III)$$

faţă de cel nou.

Versorii $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ pot fi şi ei reprezentaţi faţă de baza $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, fiind trei vectori din spaţiu. Vom pune deci

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= \alpha_1\bar{i} + \beta_1\bar{j} + \gamma_1\bar{k}; \\ \bar{j}' &= \alpha_2\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \gamma_2\bar{k}; \\ \bar{k}' &= \alpha_3\bar{i} + \beta_3\bar{j} + \gamma_3\bar{k}; \end{aligned} \qquad (48,III)$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{i}'\bar{i}; \quad \beta_1 = \bar{i}'\bar{j}; \quad \gamma_1 = \bar{i}'\bar{k}; \\ \alpha_2 &= \bar{j}'\bar{i}; \quad \beta_2 = \bar{j}'\bar{j}; \quad \gamma_2 = \bar{j}'\bar{k}; \\ \alpha_3 &= \bar{k}'\bar{i}; \quad \beta_3 = \bar{k}'\bar{j}; \quad \gamma_3 = \bar{k}'\bar{k}; \end{aligned} \qquad (49,III)$$

fiindcă avem, de exemplu,

$$\bar{i}' = (\bar{i}'\bar{i})\,\bar{i} + (\bar{i}'\bar{j})\,\bar{j} + (\bar{i}'\bar{k})\,\bar{k},$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă aplicăm formula (41,II) de reprezentare a unui vector oarecare $\overline{V}$, raportat la triedrul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Vom putea raporta deasemenea pe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ la noul triedru $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ scriind

$$\bar{i} = (\bar{i}\bar{i}')\,\bar{i}' + (\bar{i}\bar{j}')\,\bar{j}' + (\bar{i}\bar{k}')\bar{k}', \text{ etc.}$$

şi ţinând seama de (49,III) vom avea

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \alpha_1\bar{i}' + \alpha_2\bar{j}' + \alpha_3\bar{k}' ; \\ \bar{j} &= \beta_1\bar{i}' + \beta_2\bar{j}' + \beta_3\bar{k}' ; \\ \bar{k} &= \gamma_1\bar{i}' + \gamma_2\bar{j}' + \gamma_3\bar{k}' . \end{aligned} \qquad (50,III)$$

Calculând din formulele (48,III) şi (50,III) produsele scalare şi normele versorilor utilizaţi, vom avea

$$\begin{aligned} &\bar{i}'\bar{j}' = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 ; \quad \bar{i}'^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 ; \\ &\bar{i}\,\bar{j} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 ; \quad \bar{i}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 ; \\ &\bar{j}'\bar{k}' = \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 ; \quad \bar{j}'^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 ; \\ &\bar{j}\bar{k} = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 ; \quad \bar{j}^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 ; \\ &\bar{k}'\bar{i}' = \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 ; \quad \bar{k}^2 = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 ; \\ &\bar{k}\bar{i} = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 ; \quad \bar{k}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (51,III) \\ \\ \\ (51,III) \end{matrix}$$

Obţinem astfel trei grupe de patru relaţii între cele nouă cosinusuri directoare. Dintre acestea, *cele şase obţinute din prima linie prin permutarea literelor sunt independente între ele,* deoarece exprimă perpendicularitatea versorilor $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, doi câte doi, şi faptul că modulele lor sunt egale cu unitatea.

Se arată că *celelalte şase sunt consecinţe ale acestora şi deci, pentru fixarea poziţiei noului triedru faţă de cel vechi sunt necesare trei unghiuri.*

In adevăr, faptul că aceste ultime relaţii determină poziţia vechiului triedru faţă de cel nou dă o indicaţie asupra acestei proprietăţi, care însă se poate demonstra analitic. (Exerciţiu).

Relaţiile între cele două sisteme de referinţă sunt date de formulele (48,III) şi (50,III) în funcţie de cele două unghiuri, din care numai trei sunt independente.

Putem deduce imediat relaţiile între componentele vectorului $\overline{V}$ egalând cele două expresii ale sale (46,III) şi (47,III)

$$\overline{V} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} = X'\bar{i}' + Y'\bar{j}' + Z'\bar{k}' \qquad (47',III)$$

şi exprimând succesiv versorii fundamentali unii în funcţie de ceilalţi. Obţinem astfel formulele

$$\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z ; \\ Y' &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z ; \\ Z' &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z ; \end{aligned} \qquad (52,III)$$

Scanned with OKEN Scanner

exprimând noile componente în funcţie de cele vechi şi

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + \alpha_3 Z' ; \\ Y &= \beta_1 X' + \beta_2 Y' + \beta_3 Z' ; \\ Z &= \gamma_1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma_3 Z' ; \end{aligned} \qquad (53,III)$$

exprimând vechile componente în funcţie de cele noi.

Din aceste formule rezultă că *între componentele vechi şi noi există relaţii liniare şi omogene, care permit trecerea dela unele la celelalte,* coeficienţii depinzând exclusiv de unghiurile care stabilesc poziţiile mutuale ale celor două sisteme de referinţă.

Trecerea dela formulele (52,III) la formulele (53,III) trebue să se poată face analitic prin rezolvarea sistemului (52,III), în care considerăm pe X, Y, Z ca necunoscute.

Pentru aceasta este însă necesar ca determinantul sistemului să fie diferit de zero.

Acest determinant se poate calcula uşor prin ridicarea la pătrat şi folosind relaţiile (51,III) ale cosinusurilor.

Putem deasemenea folosi în acest scop formula (28,III), care generalizează determinantul lui Gram, deoarece toţi termenii au semnificaţii geometrice. Vom avea

$$[\bar{i}\bar{j}\bar{k}][\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}'] = \begin{vmatrix} \bar{i}\bar{i}' & \bar{i}\bar{j}' & \bar{i}\bar{k}' \\ \bar{j}\bar{i}' & \bar{j}\bar{j}' & \bar{j}\bar{k}' \\ \bar{k}\bar{i}' & \bar{k}\bar{j}' & \bar{k}\bar{k}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad (54,III)$$

dacă ţinem seama de (49,III), obţinând astfel determinantul comun al celor două sisteme (52,III) şi (53,III).

Acest determinant este sigur diferit de zero, deoarece produsele mixte $[\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}]$, $[\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}']$ reprezintă volumele orientate formate de versorii triedrelor.

Dacă aceste triedre sunt drepte, volumele respective sunt egale cu unitatea. Să observăm că *în toate raţionamentele făcute nu am luat în consideraţie o anumită orientare a triedrelor fundamentale.*

Aceasta ne permite să admitem că ele pot fi orientate în ambele sensuri. In acest caz, produsele mixte pot fi egale cu ± 1 şi vom putea scrie în general

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (54',III)$$

Acest determinant caracterizează trecerea dela un sistem ortogonal la alt sistem ortogonal prin valoarea sa absolută, semnul său indicând dacă orientarea spaţiului a fost păstrată sau schimbată.

In adevăr, conform cu formula (54,III), vom avea

$$D = [\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}'][\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă noul triedru $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ are aceeaşi orientare ca $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vom avea $D=+1$; iar dacă orientarea sa este contrară, vom avea $D=-1$.

Formulele de transformare ale vectorilor liberi sunt aplicabile şi schimbărilor de sisteme de coordonate ortogonale ale punctelor spaţiului, care lasă neschimbată originea.

Dacă originea este deplasată într'un punct O_0' de vector de poziţie

$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k},$$

vom aplica aceste formule nu vectorului de poziţie $\bar{r}$, ci lui $\bar{\rho}=\bar{r}-\bar{r}_0$ şi vom avea formulele

$$\begin{aligned} x-x_0 &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y-y_0 &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z-z_0 &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \qquad (55,III)$$

pentru vechile componente în funcţie de cele noi, aşa cum este necesar în practică.

Formulele (55,III) *determină schimbarea generală de sisteme de referinţă carteziene ortogonale, când originea este deplasată într'un punct* O'

Vom avea deasemenea:

$$\begin{aligned} x'-x_0' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y'-y_0' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z'-z_0' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \qquad (56,III)$$

dacă notăm cu

$$\bar{r}_0' = -\bar{r}_0 = x_0'\bar{i}' + y_0'\bar{j}' + z_0'\bar{k}'$$

vectorul de poziţie al vechei origini faţă de cea nouă.

Cu aceste formule se obţine şi transformarea vectorilor legaţi, consideraţi ca diferenţe de vectori de poziţie.

Se vede că din (55,III) şi 56,III) vor dispărea coordonatele originii şi formulele se vor înfăţişa ca şi pentru vectorii liberi.

In concluzie: *formulele de transformare, atât pentru vectori, cât şi pentru puncte, sunt liniare şi exprimă o serie de componente în funcţie de cealaltă, coeficienţii depinzând exclusiv de poziţia mutuală a celor două triedre.*

§86. Definiţia analitică a vectorilor în spaţiul metric euclidian

In aplicaţii, mărimile vectoriale apar adesea prin componentele lor. Dacă o teorie fizică utilizează pe lângă mărimi fizice de naturi cunoscute şi alte mărimi definite în funcţie de primele şi a căror natură nu este cunoscută, ci trebue tocmai să reiasă din relaţiile în care intervin, atunci aceste mărimi sunt introduse prin componentele lor.

Alteori, din cercetarea unor relaţii se pune în evidenţă un grup de mărimi care apar împreună, fiind bănuite că reprezintă la un loc o mărime vectorială.

Scanned with OKEN Scanner

Se pune atunci problema esenţială: *când reprezintă trei cantităţi cele trei componente scalare ale unei mărimi vectoriale?*

După cum am observat anterior, mărimile vectoriale sunt independente de modul particular în care sunt măsurate, deci de sistemele de referinţă adoptate. Orice sistem de referinţă corespunde fizic unui mod particular de măsură, în care intervin înregistrări de aparate de măsură şi calcule matematice. Este evident că mărimile vectoriale, care depind de direcţii, vor fi măsurate prin componente diferite în sisteme de referinţe diferite, fiindcă unghiurile făcute de vectori cu axele diferă dela un sistem la altul.

Când spunem că mărimile vectoriale, ca mărimi fizice, sunt independente de sistemul de referinţă, *nu înţelegem că trebue să aibă aceleaşi componente, oricare ar fi aceste sisteme, ci că trebue ca aceste componente să reprezinte acelaşi vector, când le măsurăm pe axele respective.*

Criteriul de recunoaştere a mărimilor vectoriale dat anterior (§ 49), exprimă geometric această condiţie esenţială.

Când în schimbarea de sisteme de referinţă carteziene ortogonale am egalat cele două expresii (46,III) şi (47,III) ale aceluiaşi vector, am exprimat analitic aceeaşi condiţie, aplicând criteriul măsurii § 75, prin stabilirea relaţiilor între măsurile aceluiaşi vector în două sisteme, aplicabile apoi tuturor vectorilor.

Rezultatul obţinut este condensat în formulele de transformare (52,III) şi (53,III) ale componentelor vectorului $\overline{V}$.

Prin urmare: *pentru ca trei cantităţi X, Y, Z, calculate faţă de un sistem de referinţă cartezian ortogonal, să reprezinte componentele scalare ale unei mărimi vectoriale, este necesar ca, măsurând în alt sistem de referinţă cartezian ortogonal cantităţile X', Y', Z', care au aceeaşi semnificaţie fizică sau geometrică, între prima măsură şi a doua să existe relaţiile* (52,III) *sau* (53,III).

Cu alte cuvinte: *între vechile şi noile componente scalare, presupuse că reprezintă o mărime vectorială, trebue să existe formulele de transformare liniare şi omogene* (52,III) *şi* (53,III).

Am văzut că orice vector $\overline{V}$ îndeplineşte această condiţie. Invers, dacă ea este îndeplinită, atunci (X, Y, Z), pe de o parte, şi (X', Y', Z'), pe de altă parte, conduc la doi vectori care, figuraţi independent unul de altul în cele două sisteme de referinţă, vor coincide, deci vom avea

$$X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}=X'\bar{i}'+Y'\bar{j}'+Z'\bar{k}'=\overline{V}, \qquad (57,III)$$

cum se verifică imediat ţinând seama de (52,III), (53,III) şi (48,III), (50,III).

Prin urmare, *condiţia enunţată este şi suficientă pentru ca X, Y, Z şi X', Y', Z' să fie componentele aceluiaşi vector $\overline{V}$.*

Acest rezultat ne conduce la definiţia analitică a vectorului în spaţiul metric euclidian.

Se numeşte vector liber orice sistem de trei cantităţi X, Y, Z măsurate într'un sistem de referinţă cartezian ortogonal, care există în orice alt sistem cartezian ortogonal, având alte valori X', Y', Z' şi astfel încât între (X, Y, Z) şi (X', Y', Z') să aibă loc relaţiile (52,III) *sau* (53,III).

Orice vector liber se reprezintă geometric prin clasa tuturor segmentelor orientate, echipolente cu segmentul $\overline{OM}$ având proiecţiile X, Y, Z pe axele Ox, Oy, Oz.

Scanned with OKEN Scanner

În acest mod, *vectorul, ca mărime geometrică, devine o imagine, a. vectorului analitic, deci componentele trec pe primul plan şi imaginea geometrică, utilizată în metoda simbolică, rămâne ca un simplu auxiliar al intuiţiei.*

Orice mărime vectorială a fost reprezentată printr'un vector geometric *Când vom spune că o mărime este vectorială?*

Prin adoptarea definiţiei analitice răspunsul este imediat: *Oridecâteori trei cantităţi X, Y, Z, măsurate într'un sistem de referinţă cartezian ortogonal şi având semnificaţii astfel, încât să poată fi măsurate şi în orice alt sistem analog, constituie componentele unui vector, verificându-se* (52,III) *şi* (53,III) *vom spune că mărimea reprezentată prin aceste trei componente este vectorială.*

Prin urmare: *formulele de transformare ale componentelor constitue criteriul analitic de recunoaştere a mărimilor vectoriale, conform cu criteriul general al măsurii:*

Exemplul 1. Fiind daţi trei vectori $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ de componente respectiv $\overline{V}_l$ (X_l, Y_l, Z_l), $l = 1, 2, 3$ într'un sistem de referinţă cartezian ortogonal, cantităţile

$$X_1-2X_2-2X_3,\ Y_1-2Y_2-2Y_3,\ Z_1-2Z_2-2Z_3$$

sunt componentele unui vector.

In adevăr, dacă aplicăm formulele (53,III) de transformare, ţinând seama că X_l, Y_l, Z_l sunt considerate ca formând un vector, vom avea

$$X_1-2X_2-2X_3=\alpha_1(X_1'-2X_2'-2X_3')+\beta_1(Y_1'-2Y_2'-2Y_3')+\gamma_1(Z_1'-2Z_2'-2Z_3')$$

şi analoagele, astfel încât punând

$$X=X_1-2X_2-2X_3 \quad \text{şi} \quad X'=X_1'-2X_2'-2X_3',$$

vedem că X, Y, Z şi $X'\ Y'\ Z'$ sunt legaţi prin ecuaţii de forma (53,III) şi deci constitue componentele aceluiaşi vector.

Exemplul 2. O mărime are componentele 3, 3, 3 într'un anumit sistem de referinţă şi 3, 4, 5 într'un al doilea sistem, obţinut din primul prin transformarea:

$$X'=\frac{1}{2}(X+Y\sqrt{3});$$

$$Y'=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}X+Y);$$

$$Z'=-Z.$$

Este aceasta o mărime vectorială?

Aplicând formulele de transformare, dacă numerele 3, 3, 3 ar fi fost componentele unui vector, ele ar fi trebuit să se transforme în $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$; $\frac{3}{2}(1-\sqrt{3})$; -3.

Prin urmare, mărimea considerată nu este vectorială.

§ 87. Vectori şi transformări liniare ortogonale

Definiţia analitică a vectorului ne impune să examinăm formulele de transformare ale componentelor, deoarece ele constitue criteriul de recunoaştere al vectorilor.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că toate aceste formule se construesc cu cele nouă cosinusuri aşezate într'o anumită ordine. Ele sunt foarte uşor de reţinut datorită acestei simetrii, care apare imediat chiar din expresiile versorilor fundamentali.

Tabela

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\bar{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\bar{k}'$	α_3	β_3	γ_3

(58,III),

ne permite:

1. Reţinerea formulelor (49,III), care dau expresiile celor nouă cosinusuri directoare. Acestea sunt produsele scalare ale versorilor din prima linie şi din prima coloană şi se găsesc la intersecţia liniilor şi coloanelor.

2. Reţinerea formulelor (48,III) şi (50,III), care exprimă versorii noi în funcţie de cei vechi, şi invers. Acestea se obţin pentru fiecare versor, făcând suma produselor versorilor din cealaltă categorie cu cosinusurile liniei sau coloanei respective.

Astfel, pentru $\bar{i}'$ vom avea

$$\bar{i}' = \alpha_1 \bar{i} + \beta_1 \bar{j} + \gamma_1 \bar{k},$$

deci $\bar{i}'$ rezultă din versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, înmulţiţi cu cosinusurile de pe linia lui $\bar{i}'$.

3. Reţinerea componentelor tuturor versorilor în celălalt sistem de referinţă. Acestea se găsesc pentru fiecare pe linia sau coloana respectivă.

Astfel, pentru $\bar{j}$ vom avea în sistemul $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$, componentele β_1, β_2, β_3 pe coloana sa.

O tabelă analoagă rezumă cele două serii de transformări liniare omogene ale componentelor. In adevăr, tabela

	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

(59,III)

formată cu cele nouă cosinusuri şi având în prima linie componentele vechi, iar în prima coloană componentele noi, ne va da toate formulele (52,III) şi (53,III). Este suficient să facem sumele produselor primei linii cu celelalte şi vom obţine X', Y', Z' sau sumele produselor primei coloane cu celelalte şi vom obţine pe X, Y, Z.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu

$$Y' = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z$$

şi se obţine din înmulţirea primei linii X, Y, Z cu linia lui Y', deci cu α_2, β_2, γ_2.

Constatăm că tabela (59,III) este formată pe linii şi coloane cu componente de vectori. Tabela cosinusurilor, citită orizontal, conţine componentele versorilor $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$, iar vertical—componentele versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, ceeace rezultă din tabela anterioară (58,III).

Ea este mărginită cu componentele X, Y, Z şi X', Y', Z' ale aceluiaşi vector $\overline{V}$. *Pentru a găsi aceste componente, unele în funcţie de celelalte, efectuăm produsele scalare ale vectorului $\overline{V}$ cu versorii consideraţi.*

Determinantul tabelei are valorile ± 1, după cum cele două triedre au aceeaşi orientare sau orientări contrare.

Formulele obţinute constitue *transformări ortogonale* ale componentelor dintr'un sistem în componentele celuilalt sistem. Ele pot fi considerate independent de schimbările de sistem de referinţă, ca *transformări liniare.*

Dacă trei variabile X, Y, Z sunt legate de alte trei variabile X', Y', Z' prin formule de forma (52,III), în care membrii ai doilea sunt funcţii liniare şi omogene, se spune că aceste variabile sunt supuse la o *transformare liniară şi omogenă.*

Dacă determinantul format cu coeficienţii este diferit de zero, putem rezolva sistemul (52,III) în raport cu $X, Y, Z,$ care apar tot ca funcţii liniare de X', Y', Z'.

Spunem atunci că transformarea liniară este *proprie* sau *nesingulară* şi transformarea, care exprimă pe X, Y, Z, în funcţie de X', Y', Z, se numeşte *inversa* primei.

In cazul formulelor (52,III) determinantul $D = \pm 1$, deci transformarea liniară şi omogenă este nesingulară.

Formulele (53,III) constitue transformarea inversă a lui (52,III) şi se obţin din rezolvarea sistemului (52,III) în raport cu X, Y, Z.

Faptul că sunt satisfăcute relaţiile (51,III), face ca rezolvarea să fie simplă şi să se exprime prin formule în care apare acelaşi determinant cu liniile schimbate în coloane.

Oridecâteori coeficienţii unei transformări liniare şi omogene satisfac relaţiile (51,III) ale cosinusurilor, numite şi *relaţii de ortogonalitate,* transformarea se va numi *ortogonală* şi determinantul său va fi egal cu ± 1.

Dacă variabilele X, Y, Z sunt supuse unei transformări ortogonale, ele pot fi interpretate ca fiind componentele X, Y, Z ale unui vector $\overline{V}$, faţă de un sistem de referinţă cartezian ortogonal, iar X', Y', Z' vor fi componentele aceluiaşi vector faţă de un al doilea sistem ortogonal.

Transformarea ortogonală reprezintă în acest caz trecerea dela primul sistem la al doilea.

Consideraţiile făcute stabilesc o legătură strânsă între transformările ortogonale şi schimbările de sisteme de referinţă carteziene ortogonale. Aceste transformări sunt de două categorii:

1. Dacă $D = 1$, ele reprezintă *schimbarea unui sistem dat într'un sistem cu aceeaşi orientare.*

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă $D=-1$, ele reprezintă *schimbarea unui sistem dat într'un sistem cu orientarea contrară.*

Transformările din prima categorie sunt echivalente cu *rotațiile* triedrului fundamental.

Cele din a doua categorie sunt echivalente cu o *rotație urmată de schimbarea sensului uneia din axe,* ceeace revine la o simetrie față de planul fundamental perpendicular pe acea axă; această simetrie se numește *oglindire.*

Transformările ortogonale din prima categorie pot fi interpretate și ca rotații ale spațiului întreg în jurul unui axe, care trece prin originea sistemului de referință.

Aplicație. *Unghiurile lui Euler.* Pentru a determina poziția unui corp solid, mobil în jurul unui punct fix O, față de un reper fix, este suficient să determinăm poziția unui triedru ortogonal $Ox'y'z'$ legat de corpul solid mobil, față de un triedru fix $Oxyz$. Vom presupune ambele triedre drepte.

Poziția triedrului $Ox'y'x'$ față de $Oxyz$ se poate determina cu ajutorul celor nouă cosinusuri directoare ale versorilor $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$, față de versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Aceste nouă cosinusuri directoare sunt legate prin șase relații. *Deci, poziția triedrului $Ox'y'z'$ față de triedrul $Oxyz$ va fi determinată de trei parametri.*

Vom alege în mod convenabil acești parametri. și anume trei unghiuri, *denumite unghiurile lui Euler.*

Fie OT linia de intersecție a planelor Oxy și $Ox'y'$. Vom alege pe OT un sens pozitiv, astfel ca triedrul (Ox, OT, Oz) să fie drept (fig. 87). Dacă se notează cu φ unghiul pe care Ox îl face cu axa OT, avem $0\leq\varphi<\pi$. Se notează cu ψ unghiul pe care OT îl face cu Ox' în planul $Ox'y'$ și deci $0\leq\psi<2\pi$. Vom nota în sfârșit cu θ unghiul dintre Oz și Oz', adică unghiul planelor Oxy și $Ox'y'$. Acest unghi îl vom măsura în planul perpendicular pe OT și deci $0\leq\theta<2\pi$.

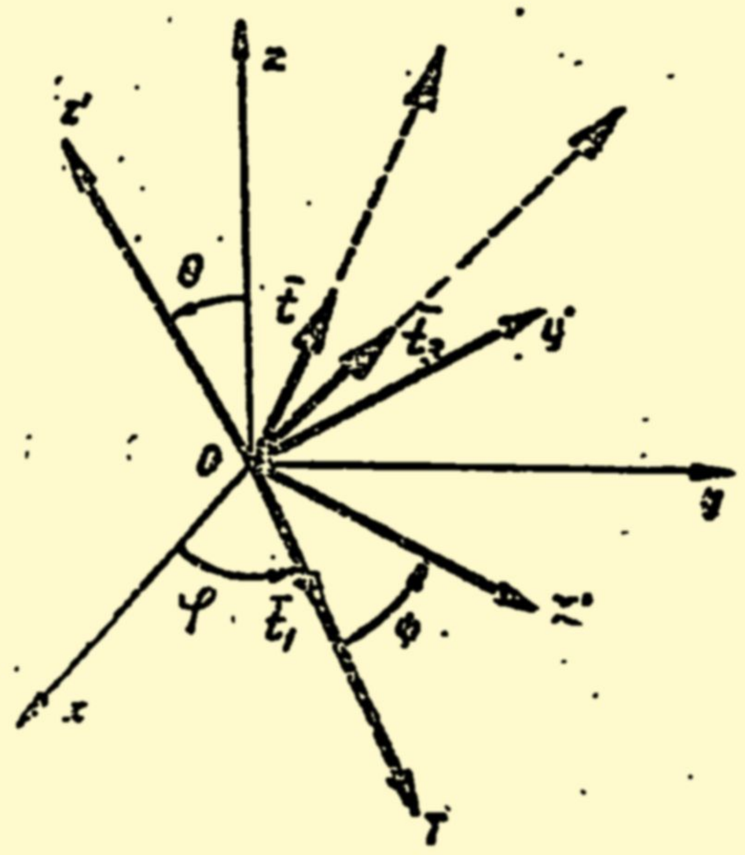


Fig. 87

Pentru a găsi relațiile dintre versorii $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ și $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, vom face ca triedrul inițial $Oxyz$ să coincidă cu triedrul $Ox'y'z'$ prin trei rotații consecutive.

1. Fie $\bar{t}_1$ versorul lui OT și $\bar{t}_2$ un versor perpendicular pe $\bar{t}_1$, situat în planul Oxy și astfel ca în acest plan $\measuredangle(\bar{t}_1, \bar{t}_2)=+\frac{\pi}{2}$. O rotație de unghi φ, în jurul lui Oz, aduce triedrul $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ peste $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{k}$, iar formulele de transformare sunt

$$\bar{t}_1=\bar{i}\cos\varphi+\bar{j}\sin\varphi;$$

$$\bar{t}_2=-\bar{i}\sin\varphi+\bar{j}\cos\varphi;$$

$$\bar{t}=\bar{k}.$$

2. Fie $\bar{t}_3$ versorul perpendicular pe $\bar{t}_1$, situat în planul $Ox'y'$ și astfel ca $\measuredangle(\bar{t}_1,\bar{t}_3)=+\frac{\pi}{2}$.

O rotație de unghi θ, în jurul lui $\bar{t}_1$, aduce triedrul $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{k}$ peste $\bar{t}_1$, $\bar{t}_3$, $\bar{k}'$ și formulele de transformare sunt:

$$\bar{t}_1=\bar{t}_1;$$

$$\bar{t}_3=\bar{t}_2\cos\theta+\bar{k}\sin\theta;$$

$$\bar{k}'=-\bar{t}_2\sin\theta+\bar{k}\cos\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. In fine, o rotație de unghi ψ, în jurul lui $\bar{k}'$, aduce triedrul $\bar{i}_1$, $\bar{i}_3$, $\bar{k}'$ peste $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ și formulele de transformare sunt:

$$\bar{i}' = \bar{i}_1 \cos\psi + \bar{i}_3 \sin\psi;$$

$$\bar{j}' = -\bar{i}_1 \sin\psi + \bar{i}_3 \cos\psi;$$

$$\bar{k}' = \bar{k}'.$$

Dacă se elimină succesiv $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$ între relațiile precedente, se obține:

$$\bar{i}' = \bar{i}(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi) + \bar{j}(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi) + \bar{k}\sin\theta\sin\psi;$$

$$\bar{j}' = \bar{i}(-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi) + \bar{j}(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi) + \bar{k}\sin\theta\cos\psi;$$

$$\bar{k}' = \bar{i}\sin\varphi\sin\theta + \bar{j}(-\cos\varphi\sin\theta) + \bar{k}\cos\theta.$$

Invers, dacă se rezolvă sistemul precedent în raport cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, ținând seama că determinantul sistemului este $+1$, se obține:

$$\bar{i} = \bar{i}'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi) + \bar{j}'(-\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi) + \bar{k}'\sin\theta\sin\varphi;$$

$$\bar{j} = \bar{i}'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi) + \bar{j}'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi) + \bar{k}'(-\sin\theta\cos\varphi);$$

$$\bar{k} = \bar{i}'\sin\psi\sin\theta + \bar{j}'\cos\psi\sin\theta + \bar{k}'\cos\theta.$$

Aceste două grupuri de formule sunt foarte utile în Mecanică și în Astronomie.

§ 88. Expresia vectorială a transformărilor ortogonale și a schimbărilor de sisteme de referință carteziene ortogonale

Formulele (52,III) și (53,III) pot fi interpretate și altfel, pornind de la noțiunea de transformare liniară. Ele au fost obținute egalând expresiile *aceluiași* vector $\overline{V}$ în două sisteme de referință diferite. Putem însă să presupunem că sistemul de referință este *același*, dar X, Y, Z reprezintă componentele unui vector $\overline{V}$, iar X', Y', Z' componentele *altui vector* $\overline{V}'$ în *același sistem.*

Formulele (52,III) ne vor exprima atunci o transformare a vectorului $\overline{V}$ în vectorul $\overline{V}'$ și, cum ele sunt valabile pentru orice vector $\overline{V}$, putem spune că *exprimă o transformare a tuturor vectorilor din spațiu în alți vectori din spațiu.*

Această transformare este liniară și ortogonală. Ea poate fi pusă sub formă vectorială, dacă observăm că avem

$$X' = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = (\bar{i}'\overline{V}),$$

$$Y' = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z = (\bar{j}'\overline{V}),$$

$$Z' = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z = (\bar{k}'\overline{V}),$$

fiindcă vom putea scrie

$$\overline{V}' = X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k} = (\bar{i}'\overline{V})\bar{i} + (\bar{j}'\overline{V})\bar{j} + (\bar{k}'\overline{V})\bar{k}. \qquad (60,III)$$

Deci vectorul $\overline{V}$ se transformă în vectorul $\overline{V}'$ prin această transformare vectorială.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă luăm pe rând $\overline{V}=\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, obţinem pentru $\overline{V}'$, respectiv, valorile $\overline{V}'=\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Prin urmare: *transformarea liniară* (60,III) *transformă triedrul* $\bar{i}', \bar{j}' \bar{k}'$, *definit prin tabela* (58,III), *în triedrul* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ *de referinţă.*

Dacă în relaţiile (52,III) înmulţim ambii membri respectiv cu $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ şi adunăm, obţinem

$$X'\bar{i}'+Y'\bar{j}'+Z'\bar{k}'=X(\alpha_1\bar{i}'+\alpha_2\bar{j}'+\alpha_3\bar{k}')+Y(\beta_1\bar{i}'+\beta_2\bar{j}'+\beta_3\bar{k}')+$$

$$+Z(\gamma_1\bar{i}'+\gamma_2\bar{j}'+\gamma_3\bar{k}').$$

Folosind tabela (58,III), sau relaţiile (50,III), deducem următorul rezultat:

$$X'\bar{i}'+Y'\bar{j}'+Z'\bar{k}'=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}=\overline{V}. \qquad (61,III)$$

Dacă socotim $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ca un al doilea triedru de referinţă, sau mai sugestiv, ca triedrul de referinţă al spaţiului înainte de transformare, vom putea interpreta relaţia (61,III) astfel:

Vectorul $\overline{V}$ *are în sistemul de referinţă* $\bar{i}', \bar{j}, \bar{k}'$ *componentele transformatului său* $\overline{V}'$ *faţă de sistemul* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Să folosim şi relaţiile (53,III), de fapt echivalente cu (52,III), deoarece reprezintă transformarea inversă, înmulţindu-le respectiv cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ şi adunându-le. Vom avea

$$X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}=X'(\alpha_1\bar{i}+\beta_1\bar{j}+\gamma_1\bar{k})+Y'(\alpha_2\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\gamma_2\bar{k})+$$

$$+Z'(\alpha_3\bar{i}+\beta_3\bar{j}+\gamma_3\bar{k})=X'\bar{i}'+Y'\bar{j}'+Z'\bar{k}',$$

deci, relaţia (61,III).

Dacă însă ţinem seama de expresiile

$$X'=(\bar{i}\,\overline{V}'), \quad Y'=(\bar{j}\,\overline{V}'), \quad Z'=(\bar{k}\,\overline{V}')$$

ale componentelor lui $\overline{V}'$ în sistemul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vom putea pune rezultatul obţinut, sau relaţia (61,III) sub forma:

$$\overline{V}=(\bar{i}\,\overline{V}')\bar{i}'+(\bar{j}\,\overline{V}')\bar{j}'+(\bar{k}\,\overline{V}')\bar{k}', \qquad (62,III)$$

reprezentând transformarea (53,III), inversa lui (52,III), prin care vectorii $\overline{V}'$, sunt transformaţi în vectorii $\overline{V}$.

Luând $\overline{V}'=\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, vedem imediat că vom avea $\overline{V}=\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, deci:

Transformarea liniară (62,III), *inversa lui* (60,III), *transformă triedrul* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ *în triedrul* $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$.

Dacă interpretăm relaţia (61,III) în această nouă transformare, unde $\overline{V}$ are ca transformat pe V, vom putea spune:

Vectorul $\overline{V}$, *transformat al lui* $\overline{V}'$, *are în sistemul de referinţă* $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ *aceleaşi componente ca şi* $\overline{V}'$ *în sistemul* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

În alţi termeni:

Scanned with OKEN Scanner

Transformatul unui vector $\bar{V}'$ are faţă de triedrul transformat aceleaşi componente ca şi $\bar{V}'$ faţă de triedrul iniţial.

Reunind rezultatele obţinute, putem spune:

Fiind date o transformare ortogonală şi inversa sa, prin care un triedru fundamental ortogonal $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, se transformă în alt triedru fundamental ortogonal $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ şi invers, orice vector $\bar{V}$, măsurat într'unul din aceste sisteme, are aceleaşi componente ca şi transformatul său $\bar{V}'$ în celălalt sistem.

Fiind dat un vector oarecare $\bar{V}'$, el este sigur transformatul unui vector $\bar{V}$, unic determinat.

In adevăr, considerând formulele (52,III) ca un sistem de ecuaţii în care necunoscutele sunt X, Y, Z, iar X', Y', Z' sunt date, acest sistem admite sigur un sistem de soluţii şi numai unul, deoarece $D \neq 0$. Aceste soluţii sunt, dealtfel, date de formulele (53,III). Prin urmare:

Transformările ortogonale transformă vectorii din spaţiu, în vectori din spaţiu, ceeace se mai poate exprima şi spunând că *aceste transformări transformă spaţiul vectorial în el însuşi.*

Această proprietate, datorită faptului că $D \neq 0$, arată că aceste transformări sunt *nesingulare.*

Putem da şi expresia vectorială a schimbărilor de sisteme de referinţă carteziene ortogonale, pornind dela aceleaşi formule (52,III) *şi* (53,III).

Considerând că vectorul rămâne acelaşi, dar sistemul se schimbă, vom căuta să-l exprimăm într'unul din sisteme, în funcţie de expresia sa în celălalt.

Inmulţind în (52,III) prin $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ şi ţinând seama că avem

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = (\bar{i}' \bar{V}), \text{ etc.}$$

vom deduce

$$\bar{V}' = (\bar{i}' \bar{V})\bar{i}' + (\bar{j}' \bar{V})\bar{j}' + (\bar{k}' \bar{V})\bar{k}' = \bar{V}, \qquad (63,III)$$

formulă care ne dă pe $\bar{V}$ în noul sistem şi constituie forma vectorială a transformării (52,III).

Deasemenea, înmulţind în (53,III) cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, vom avea

$$\bar{V} = (\bar{i}\bar{V}')\bar{i} + (\bar{j}\bar{V}')\bar{j} + (\bar{k}\bar{V}')\bar{k} = \bar{V}' \qquad (64,III)$$

formulă care exprimă vectorul $\bar{V}$ în vechiul sistem, când este cunoscut în cel nou şi reprezintă forma vectorială a transformării (53,III).

Se vede că simpla permutare a literelor accentuate cu cele neaccentuate transformă aceste două ultime formule una în alta, oricare din cele două sisteme putând fi considerat ca iniţial.

Aceeaşi observaţie se poate face şi asupra formulelor (60,III) şi (62.III) ale transformărilor ortogonale, ceeace arată că *dacă o transformare este ortogonală, atunci şi inversa sa este tot ortogonală.* Formulele (63,III) şi (64,III) nu sunt de fapt decât reprezentarea unui vector $\bar{V}$ dat, independent de orice sistem de referinţă, faţă de un triedru fundamental ortogonal $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sau $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$, dacă ţinem seama că am presupus $\bar{V}' = \bar{V}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ele puteau fi, deci, obținute imediat și din ele putem deduce toate consecințele privitoare la componentele vectorilor atât în schimbarea sistemelor cât și în transformările ortogonale.

In adevăr, punând

$$\overline{V}=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}=X'\bar{i}'+Y'\bar{j}'+Z'\bar{k}'=\overline{V}',$$

din (63,III) se deduce

$$X'\bar{i}'+Y'\bar{j}'+Z'\bar{k}'=(\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z)\bar{i}'+\dots$$

de unde rezultă formulele (52,III), făcând notațiile (49,III). Deasemenea, din (64,III) se obțin formulele (53,III).

Punând succesiv $\overline{V}'=\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ în (63) și ținând seama că $\overline{V}'=\overline{V}$, obținem formulele (50,III), iar punând $\overline{V}=\bar{i}',\ \bar{j}',\bar{k}'$ în (64,III), obținem formulele (49,III).

Relațiile cosinusurilor (51,III) se deduc ca mai sus, deasemenea și valoarea (54,III) a determinantului $D=\pm 1$.

Pentru a exemplifica metoda analitică am ales, însă, calea directă în care utilizăm componentele în demonstrație.

§ 89. Invarianța produselor scalare și vectoriale în transformările ortogonale

Produsul scalar a doi vectori este o mărime definită independent de orice sistem de referință. Expresia sa analitică trebue să aibă deci aceeași formă în orice sistem cartezian ortogonal.

Fie

$$\begin{aligned}\overline{V}_1&=X_1\bar{i}+Y_1\bar{j}+Z_1\bar{k}=X_1'i'+Y_1'\bar{j}'+Z_1'\bar{k}';\\ \overline{V}_2&=X_2\bar{i}+Y_2\bar{j}+Z_2\bar{k}=X_2'\bar{i}'+Y_2'\bar{j}'+Z_2'\bar{k}';\end{aligned}\qquad (65,III)$$

doi vectori oarecare raportați la două sisteme diferite. Calculând produsul $\overline{V}_1\overline{V}_2$, în ambele reprezentări, obținem relația

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2'=\overline{V}_1\overline{V}_2, \qquad (66,III)$$

care arată că *produsul scalar este invariant față de schimbările de coordonate carteziene ortogonale.*

Dacă, în loc să aplicăm o schimbare de sistem de referință, considerăm cei doi vectori supuși unei transformări ortogonale, atunci ei se vor transforma în alți doi vectori $\overline{V}_1'$, $\overline{V}_2'$, iar triedrul $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, în triedrul $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$.

Pentru a verifica invarianța produsului scalar, folosim relația (61,III), care exprimă proprietatea că $\overline{V}$ are în sistemul $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ aceleași componente ca transformatul său $\overline{V}'$ în sistemul $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ și obținem din nou egalitățile (65,III) cu această semnificație.

Făcând apoi produsul scalar, găsim relația (66,III), care exprimă invarianța acestui produs față de transformările ortogonale.

Din această proprietate deducem că *modulul unui vector și unghiul a doi vectori sunt invariante față de transformările ortogonale.*

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, avem

$$V^2=\overline{V}\,\overline{V}=X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2;$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{V}_1\overline{V}_2}{V_1V_2}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)\,(X_2^2+Y_2^2+Z_2^2)}}=\frac{X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2'}{\sqrt{(X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2)\,(X_2'^2+Y_2'^2+Z_2'^2)}},$$

relații care verifică invarianța unghiului și a modulului.

Consecințele invarianței produsului scalar sunt fundamentale pentru transformările ortogonale și schimbările de sistem de referință. Putem enunța proprietatea fundamentală:

Transformările ortogonale lasă invariante distanțele dintre punctele spațiului și unghiurile dintre direcțiile spațiului.

Exemplu. *Să se verifice invarianta produsului scalar, folosind direct relațiile (52,III) dintre componentele unui vector față de cele două sisteme.*

Vom avea

$$\left.\begin{aligned}X_1'&=\alpha_1X_1+\beta_1Y_1+\gamma_1Z_1;\\ Y_1'&=\alpha_2X_1+\beta_2Y_1+\gamma_2Z_1;\\ Z_1'&=\alpha_3X_1+\beta_3Y_1+\gamma_3Z_1.\end{aligned}\right|\quad\left.\begin{aligned}X_2'&=\alpha_1X_2+\beta_1Y_2+\gamma_1Z_2;\\ Y_2'&=\alpha_2X_2+\beta_2Y_2+\gamma_2Z_2;\\ Z_2'&=\alpha_3X_2+\beta_3Y_2+\gamma_3Z_2.\end{aligned}\right.$$

$$X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2'=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,X_1X_2+(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)\,Y_1Y_2+(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)\,Z_1Z_2+$$

$$+(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\,(X_1Y_2+Y_1X_2)+(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3)\,(Y_1Z_2+Z_1Y_2)+$$

$$+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\,(X_1Z_2+Z_1X_2).$$

Ținând acum seama de (51,III), aceasta se reduce la

$$X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2'=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Invarianța produsului vectorial decurge deasemenea din această proprietate.

Este bine să înțelegem corect sensul noțiunii fundamentale de invarianță. *Mărimile fizice și geometrice au diferite semnificații și proprietăți în fenomenele în care intervin.* Schimbarea sistemului de referință modifică în general componentele mărimilor vectoriale, deci *nu aceste componente sunt invariante.*

Prin *invarianță* înțelegem proprietatea că *noile componente definesc o mărime, care are aceeași semnificație în noul sistem, ca și în vechiul sistem, deci aceeași mărime măsurată în două moduri.*

Astfel, nu era deajuns să înlocuim în produsul scalar vechile componente în funcție de cele noi și să căpătăm o expresie egală cu cea veche, dar având o altă semnificație, pentru a afirma că produsul scalar este invariant. Numai faptul că noua expresie are aceeași semnificație ca cea veche justifică afirmația că produsul scalar este invariant. Vectorul de poziție al unui punct este un vector. Dacă schimbăm sistemul de referință mutând și originea axelor, el se transformă tot într'un vector, dar acesta nu mai este vector de poziție. Ca simplu vector, vectorul de poziție este invariant fiindcă nu-și schimbă natura, dar ca vector de poziție nu este invariant.

Scanned with OKEN Scanner

Produsul vectorial a doi vectori este reprezentat printr'un vector, deci într'o schimbare de sistem de referință rămâne tot vector, ca și într'o transformare ortogonală. Se pune însă problema: *noul vector este tot produsul vectorial al celor doi vectori transformați?* Numai în caz afirmativ, vom putea spune că produsul vectorial este invariant.

Să examinăm vectorul $\overline{V}'$ obținut prin schimbarea de sistem de referință, ținând seama de invarianța unghiului și a distanțelor. In adevăr, dacă $\overline{V}=\overline{V}_1\times\overline{V}_2$, atunci $\overline{V}$ va fi perpendicular pe $\overline{V}_1'$ și $\overline{V}_2'$, deoarece unghiurile rămân neschimbate. Aria paralelogramului $(\overline{V}_1', \overline{V}_2')$ va fi deasemeni invariantă, iar modulul lui $\overline{V}'$ va fi egal cu modulul lui $\overline{V}$, deci cu această arie.

Prin urmare vom obține un vector $\overline{V}'$ perpendicular pe planul $\overline{V}_1'$, $\overline{V}_2'$ și având modulul egal cu aria paralelogramului $\overline{V}_1'$, $\overline{V}_2'$.

Rămâne să verificăm orientarea lui $\overline{V}'$. Triedrul $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ era drept prin definiție, In schimb, triedrul $\overline{V}_1'$, $\overline{V}_2'$, $\overline{V}_3'$ nu-și păstrează orientarea, decât dacă transformarea ortogonală este de prima categorie.

Prin urmare: *produsul vectorial a doi vectori este invariant numai pentru transformările ortogonale de prima categorie, (rotații) sau numai pentru schimbările de sistem de referință, care lasă invariantă orientarea spațiului.*

Demonstrația analitică fiind instructivă, o vom da pe scurt, ca o aplicație a metodei analitice.

Vom scrie:

$$\overline{V}_1\times\overline{V}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1\bar{i}'+\alpha_2\bar{j}'+\alpha_3\bar{k}'\ldots\\ \alpha_1X_1'+\alpha_2Y_1'+\alpha_3Z_1'\ldots\\ \alpha_1X_2'+\alpha_2Y_2'+\alpha_3Z_2'\ldots\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}'\\ X_1' & Y_1' & Z_1'\\ X_2' & Y_2' & Z_2'\end{vmatrix} \qquad (67,III)$$

după cum rezultă, aplicând formal regulile de calcul al determinanților în care coloanele sunt sume de elemente.

Ținând seama că $D=\pm1$, vom putea scrie

$$\overline{V}_1\times\overline{V}_2=\pm\begin{vmatrix}\bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}'\\ X_1' & Y_1' & Z_1'\\ X_2' & Y_2' & Z_2'\end{vmatrix}=\pm\overline{V}_1'\times\overline{V}_2'. \qquad (68,III)$$

Calculul componentelor produsului vectorial în noul sistem ne conduce la expresii de forma:

$$\begin{vmatrix}Y_1' & Z_1'\\ Y_2' & Z_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_2X_1+\beta_2Y_1+\gamma_2Z_1 & \alpha_3X_1+\beta_3Y_1+\gamma_3Z_1\\ \alpha_2X_2+\beta_2Y_2+\gamma_2Z_2 & \alpha_3X_2+\beta_3Y_2+\gamma_3Z_2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}+\ldots \qquad (69,III)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate, însă, arăta că minorii elementelor determinantului ortogonal D sunt egali cu elementele corespunzătoare sau egali și de semn contrar, după cum $D=\pm 1$. Vom putea deci scrie

$$X'=\pm(\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z), \text{ etc.}$$

dacă notăm cu X, Y, Z și X', Y', Z' componentele produsului vectorial în cele două sisteme. Obținem astfel același rezultat ca mai sus cu ajutorul calculului analitic.

Aplicația 1. Minorii determinantului D sunt egali cu elementele corespunzătoare cu același semn sau cu semn schimbat, după cum $D=\pm 1$.

Din (49,III) și (54,III) avem

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i}\,\bar{i}' & \bar{j}\,\bar{i}' & \bar{k}\,\bar{i}'\\ \bar{i}\,\bar{j}' & \bar{j}\,\bar{j}' & \bar{k}\,\bar{j}'\\ \bar{i}\,\bar{k}' & \bar{j}\,\bar{k}' & \bar{k}\,\bar{k}'\end{vmatrix}.$$

Să calculăm, de exemplu, minorul lui γ_2

$$C_2=-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\bar{i}\,\bar{i}' & \bar{j}\,\bar{i}'\\ \bar{i}\,\bar{k}' & \bar{j}\,\bar{k}'\end{vmatrix}=-(\bar{i}\times\bar{j})(\bar{i}'\times\bar{k}')=\pm\bar{k}\,\bar{j}'=\pm\gamma_2,$$

după cum triedrul $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ are sau nu aceeași orientare cu $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Calculul este analog pentru ceilalți minori.

Se poate ajunge la rezultatul cerut și pe altă cale, pornind dela relațiile (51,III) scrise convenabil. Așa de exemplu, din

$$\begin{aligned}&\alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2+\alpha_3\alpha_3=1;\\ &\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0;\\ &\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0.\end{aligned}$$

se poate deduce că

$$\alpha_1=\frac{\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}}{D},\quad \alpha_2=\frac{\begin{vmatrix}\beta_3 & \beta_1\\ \gamma_3 & \gamma_1\end{vmatrix}}{D},\quad \alpha_3=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}}{D}.$$

Cum $D=\pm 1$, proprietatea este dovedită.

Aplicația 2. Formula (69,III) ne permite să dăm, fără o demonstrație specială, prin analogie, formulele de transformare ale bivectorilor, când schimbăm sistemul de referință cartezian ortogonal. Vom avea

$$\pm(Y_1'Z_2'-Z_1'Y_2')=(\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3)(X_1Y_2-Y_1X_2)+(\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)(Y_1Z_2-Z_1Y_2)+$$
$$+(\gamma_2\alpha_3-\alpha_2\gamma_3)(Z_1X_2-X_1Z_2)=\alpha_3(Y_1Z_2-Z_1Y_2)+\beta_3(Z_1X_2-X_1Z_2)+\gamma_3(X_1Y_2-Y_1X_2), \quad (70,III)$$

deci, formule analoage celor obținute pentru produsul vectorial.

*§ 90. Rotația și oglindirea

Transformările ortogonale au proprietăți importante, care decurg din invarianța unghiurilor și distanțelor.

Să considerăm formulele (53,III) prin care triedrul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ se transformă în $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$.

Vom nota cu $\bar{V}'$ un vector și cu $\bar{V}$ transformatul său, ceeace schimbă accentele în formulele (53,III). Vom avea deci:

$$\begin{aligned}&X'=\alpha_1 X+\alpha_2 Y+\alpha_3 Z;\\ &Y'=\beta_1 X+\beta_2 Y+\beta_3 Z;\end{aligned} \quad (71,III)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$Z' = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z.$$

Este ușor de verificat că formulele (71,III) transformă vectorul $\bar{i}$ (1, 0, 0) în $\bar{i}'$ ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$), etc.

Orice vector $\bar{V}$ se transformă într'un vector $\bar{V}'$ având același modul. Ne putem pune problema: *există un vector $\bar{V}$ care se transformă în el însuși, deci care rămâne invariant în această transformare?*

Vom pune de fapt problema ceva mai generală, de a căuta un vector care să-și păstreze neschimbată direcția și modulul.

Dacă există un astfel de vector, vom avea relația:

$$\bar{V}' = \rho \bar{V} = \rho(X\bar{i} + Y\bar{j} + Zk),$$

unde ρ este un parametru scalar, luând valorile ± 1.

Cu această condiție, sistemul (71,III) devine:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \rho) X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z = 0; \\ &\beta_1 X + (\beta_2 - \rho) Y + \beta_3 Z = 0; \\ &\gamma_1 X + \gamma_2 Y + (\gamma_3 - \rho) Z = 0. \end{aligned} \qquad (72,III)$$

Fiind liniar și omogen în necunoscutele X, Y, Z, pentru ca să admită soluții nenule, trebue ca determinantul său să fie nul, adică:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \rho & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 - \rho & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - \rho \end{vmatrix} = 0. \qquad (73,III)$$

Suntem astfel conduși la ecuația de gradul al treilea în ρ:

$$\rho^3 - [\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3]\rho^2 + [(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + (\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3) + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)]\rho - D = 0 \qquad (74,III)$$

Această ecuație joacă un rol foarte important în numeroase probleme de geometrie, mecanică, astronomie, electricitate, etc., constantele $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, putând fi oarecare. Ea poartă diverse nume ca: *ecuația seculară, ecuația în S*, etc.

In cazul problemei puse, distingem două cazuri, după cum $D = \pm 1$.

Cazul I. $D = 1$. Ecuația (74,III) devine

$$\rho^3 - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\rho^2 + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\rho - 1 = 0$$

sau (75,III)

$$(\rho - 1)[\rho^2 - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - 1)\rho + 1] = 0.$$

Deoarece transformările ortogonale lasă invariante lungimile, ecuația în ρ (75,III) nu poate admite decât rădăcinile reale ± 1.

Ea admite sigur rădăcină reală $\rho = 1$, deci există un vector invariant.

Pentru ca ecuația

$$\rho^2 - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - 1)\rho + 1 = 0 \qquad (76,III)$$

să admită rădăcina $\rho = 1$, trebue să avem

$$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 3.$$

Cum $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ sunt cosinusuri, deci pot lua valori între -1, și $+1$, va trebui să avem $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$.

Dacă $\alpha_1 = 1$, atunci $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, etc. Prin urmare, transformarea se reduce la

$$X' = X; \quad Y' = Y; \quad Z' = Z. \qquad (77,III)$$

Ecuația (76,III) mai admite încă o rădăcină $\rho = 1$, deci (75,III) are în acest caz o rădăcină triplă $\rho = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Transformarea admite un vector invariant sau, mai precis, trei vectori invarianți confundați și *se reduce la transformarea identică* (77,III) în care toți vectorii rămân invarianți.

Ecuația (76,III) poate însă admite rădăcina $\rho=-1$, dacă

$$\alpha_1+\beta_2+\gamma_3=-1 \qquad (77',III)$$

și această rădăcină este dublă. Să interpretăm geometric soluția $\rho=1$, cu

$$\alpha_1+\beta_2+\gamma_3\neq-1.$$

Faptul că transformarea ortogonală admite un vector invariant înseamnă că în această transformare punctele situate pe suportul acestui vector aplicat în origine rămân neschimbate, constituind o axă Δ fixă.

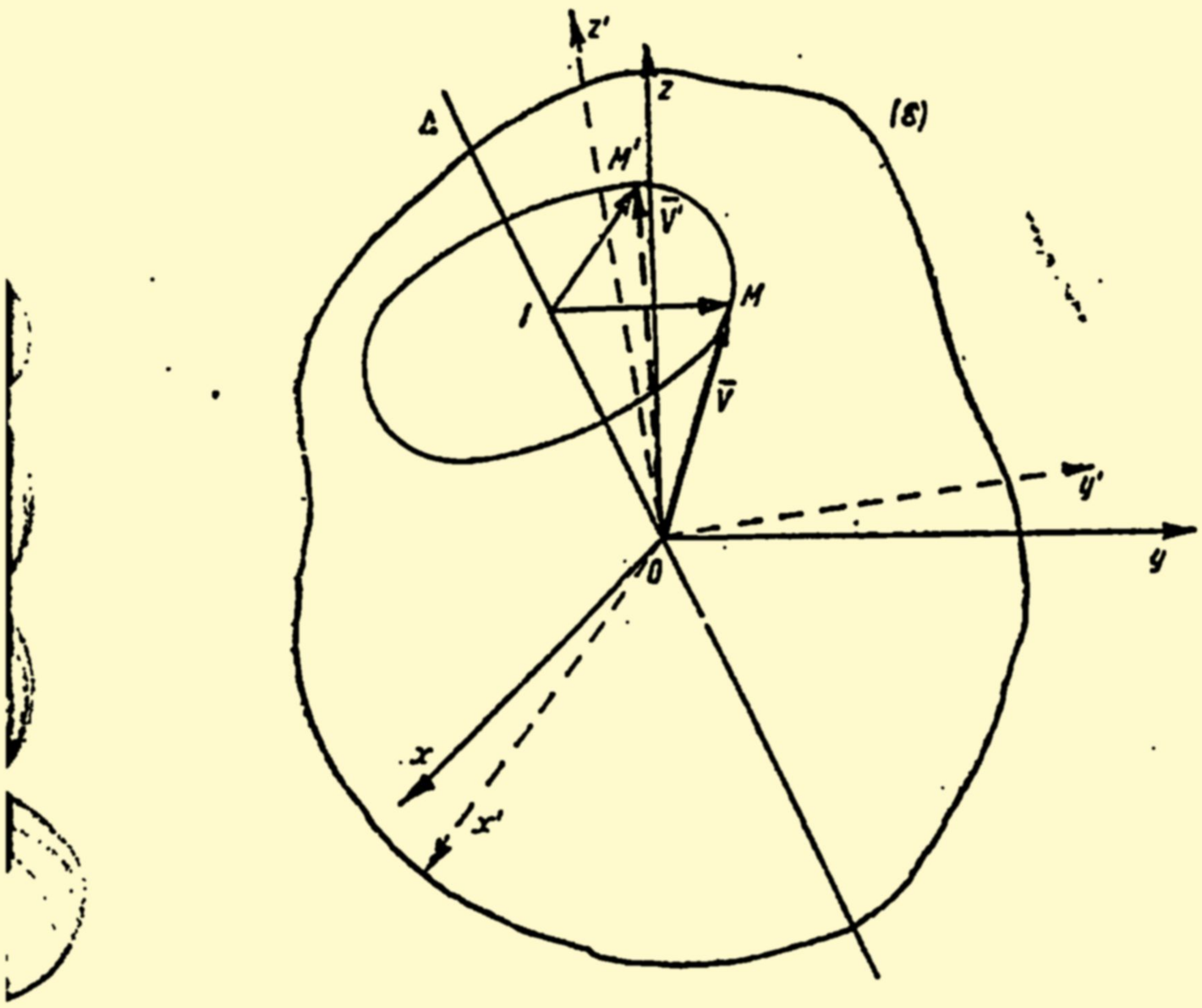


Fig. 88

Pe de altă parte, fiind dat un punct M din spațiu, dacă notăm cu I punctul de intersecție al planului dus prin M, perpendicular pe Δ cu această axă, vectorul $\overline{IM}$ perpendicular pe Δ devine prin transformare un vector $\overline{IM'}$ tot perpendicular pe Δ și de același modul cu $\overline{IM}$ (fig. 88).

Prin urmare, orice punct M din spațiu suferă o rotație în jurul axei Δ, atunci când se trece dela primul triedru la al doilea.

Transformările ortogonale de prima categorie $D=1$ sunt rotații ale spațiului în jurul unei axe.

Considerate ca schimbări de sisteme de referință, ele reprezintă deasemenea o rotație a triedrului inițial: $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ se deduce din $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ printr'o rotație. In general, putem spune că: *fiind date două triedre ortogonale $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ și $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ de aceeași orientare, ele pot fi suprapuse printr'o rotație în jurul unei axe Δ, care trece prin vârful comun O.*

Orice vector $\bar{V}'$ care, raportat la triedrul $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, are aceleași componente ca un vector $\bar{V}$ față de triedrul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, se poate obține din $\bar{V}$ prin aceeași rotație în jurul lui Δ.

Vom spune că *întregul spațiu se rotește în el însuși în jurul axei* Δ.

Dacă sistemul de referință se schimbă, un observator legat solidar de acest sistem, măsurând componentele lui $\bar{V}$ în permanență, va constata că după schimbare aceste componente sunt modificate și va trage concluzia că vectorul $\bar{V}$ s'a rotit în sens invers în jurul lui Δ. Prin urmare, va avea impresia că el a rămas neschimbat și întreg spațiul s'a rotit în jurul lui Δ în sens invers.

Acest fenomen pune în evidență relativitatea mișcării; cum însă, chiar cu această precauțiune, observatorul considerat a putut interpreta *inexact, din punctul de vedere al altui observator legat de triedrul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$*, schimbarea sistemului de referință, înțelegem adânca semnificație a condiției impuse: *mărimile, legile, relațiile fizice trebue să fie independente de sistemele de referință.*

Dacă $\qquad \alpha_1+\beta_2+\gamma_3=-1$

ecuația (75,III) admite pe lângă rădăcina simplă $\rho=+1$ și rădăcina dublă $\rho=-1$. La fel ca mai sus, vectorii purtați pe Δ sunt invarianți și, deci, se trece dela un triedru la celălalt

Scanned with OKEN Scanner

printr'o rotație în jurul lui Δ. *Însă, în cazul de față, este vorba de o rotație particulară.* În adevăr, sistemul (72,III) admite cel puțin o soluție nenulă $\rho=-1$. Există deci cel puțin un vector $\overline{A}$ care trece prin origine și care, după ce este rotit în jurul lui Δ, devine $-\overline{A}$. *Acest fapt atrage după sine că* $\overline{A}$ *este perpendicular pe* Δ *și că rotația este de 180°, adică o simetrie față de* Δ. În consecință, toți vectorii, care trec prin origine și sunt perpendiculari pe Δ, se transformă prin rotație în opușii lor. Deci, sistemul (72,III) admite pentru $\rho=-1$, cu condiția (77',III), o dublă infinitate de soluții. Din punct de vedere algebric acest fapt înseamnă că sistemul (72,III) se reduce, cu condiția (77',III), numai la una dintre cele trei ecuații, sau, altfel spus, toți minorii de ordinul al doilea extrași din matricea

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1+1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2+1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3+1 \end{matrix} \right\|$$

sunt nuli.

Dacă efectuăm calculele, ținând seama de (77',III), de relația $D=+1$ și de faptul că fiecare minor al determinantului

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

este egal cu elementul corespunzător, se găsesc relațiile

$$\alpha_2=\beta_1,\ \alpha_3=\gamma_1,\ \beta_3=\gamma_2, \tag{78,III}$$

adică D este un determinant simetric.

Cazul II. $D=-1$. Ecuația (74,III) devine

$$\rho^3-(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)\rho^2-(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)\rho+1=0 \tag{79,III}$$

sau

$$(\rho+1)[\rho^2-(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3+1)\rho+1]=0.$$

Ea nu poate admite ca rădăcini reale decât $\rho=\pm 1$, și cum admite sigur rădăcina $\rho=-1$, există un vector, care își păstrează direcția și modulul, dar își schimbă sensul.

Pentru ca ecuația

$$\rho^2-(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3+1)\rho+1=0$$

să mai admită rădăcina $\rho=-1$, trebue ca

$$\alpha_1+\beta_2+\gamma_3=-3,$$

deci

$$\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=-1.$$

Transformarea este în acest caz

$$X'=-X;\quad Y'=-Y;\quad Z'=-Z \tag{80,III}$$

și *reprezintă o simetrie a întregului spațiu în raport cu originea, care schimbă orientarea spațiului.*

Ecuația (79,III) admite atunci rădăcina triplă $\rho=-1$.

Această ecuație poate admite și rădăcina dublă $\rho=1$, dacă

$$\alpha_1+\beta_2+\gamma_3=+1.$$

Faptul că admite cel puțin o rădăcină $\rho=-1$ înseamnă că există o direcție Δ în spațiu, care rămâne neschimbată, dar ale cărei puncte se transformă în simetricele lor în raport cu 0,

Transformările ortogonale de categoria a doua sunt rotații în jurul acestei axe Δ, *urmate de o simetrie față de planul perpendicular pe* Δ, *dus prin O.*

Aceasta înseamnă o *oglindire* în acest plan și deci o schimbare a orientării.

Scanned with OKEN Scanner

Două triedre ortogonale $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ şi $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, de orientări diferite, pot fi suprapuse printr'o astfel de transformare, deci printr'o rotaţie şi o simetrie (adică o oglindire).

Dacă $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = +1$, raţionând ca mai sus, se vede imediat că există cel puţin un vector $\bar{A}$, care rămâne invariant după rotaţia în jurul lui Δ şi oglindirea faţă de planul perpendicular pe Δ, dus prin O. Rezultă de aci că $\bar{A}$ este perpendicular pe Δ şi că unghiul de rotaţie în jurul lui Δ este nul. Transformarea se reduce la o simplă oglindire şi deci este un caz particular al celei studiate mai sus. Şi în acest caz se găseşte că determinantul transformării este simetric faţă de diagonala principală.

§ 91. Metode vectoriale în Geometria analitică

Metoda carteziană în geometrie este bazată pe reprezentarea punctelor spaţiului prin coordonate. *Ea stabileşte între punctele spaţiului cu trei dimensiuni şi punctele aritmetice, date prin coordonate, o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă.*

Prin *punct aritmetic* înţelegem un sistem de trei numere reale (x, y, z) luate într'o ordine determinată. Dacă lăsăm aceste numere să ia toate valorile reale, obţinem mulţimea tuturor punctelor aritmetice, care formează *spaţiul aritmetic* cu trei dimensiuni.

Dacă în spaţiul cu trei dimensiuni alegem un triedru de referinţă $Oxyz$ şi considerăm vectorul de poziţie $\overline{OM}$ al unui punct M, componentele x, y, z ale acestui vector faţă de triedrul $Oxyz$, pe axele căruia alegem trei unităţi $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. dau naştere unui punct aritmetic (x, y, z). Punctul M fiind determinat prin vectorul său de poziţie $\overline{OM}$, dacă facem să-i corespundă punctul aritmetic (x, y, z), avem un *sistem de coordonate cartezian*, prin care spaţiului cu trei dimensiuni îi corespunde spaţiul aritmetic cu trei dimensiuni.

In loc să considerăm puncte geometrice M, putem să raţionăm pe punctele aritmetice (x, y, z) şi avem astfel un mijloc de a substitui raţionamentelor geometrice, raţionamente analitice. Relaţiile geometrice se traduc prin relaţii analitice şi invers, relaţiile analitice se interpretează geometric.

In aceasta constă metoda geometriei analitice, bazată pe corespondenţa dintre spaţiul geometric şi spaţiul aritmetic.

Această corespondenţă este *biunivocă*, adică oricărui punct M îi corespunde un punct (x, y, z) şi numai unul şi invers, oricărui punct aritmetic (x, y, z) îi corespunde un punct M şi numai unul.

Ea este şi *bicontinuă*, ceeace înseamnă că la două puncte geometrice M, M' vecine corespund două puncte aritmetice (x, y, z) (x', y', z') deasemenea vecine, adică astfel, încât coordonatele lor să difere oricât de puţin voim, dacă luăm pe M' suficient de apropiat de M şi reciproc.

Prin faptul că oricărui punct M îi asociem vectorul său de poziţie şi că acest vector ne dă coordonatele punctului faţă de un sistem de referinţă definit de trei vectori $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, avem mijlocul de a utiliza vectorii în geometria analitică, substituind fiecărui punct vectorul său de poziţie. Figurile definite prin puncte, drepte, plane, pot fi uşor definite vectorial, iar din aceste definiţii rezultă imediat definiţiile lor analitice.

Metodele vectoriale simplifică studiul geometriei analitice şi îl pun în adevărata sa lumină, adică îl fac independent de alegerea unui anumit triedru de referinţă.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul când problema considerată impune alegerea unui triedru indicat de datele ei, acesta face el însuşi parte din elementele geometrice ale acelei probleme. Calculul vectorial pune această proprietate în evidenţă şi rezultatele, deşi simplificate, conţin vizibil mărimile de care depind.

Consideraţiile făcute sunt ilustrate prin orice exemplu. Vom da câteva din cele mai simple, începând cu următorul:

Dreapta definită prin două puncte. Vom determina punctele în spaţiu prin vectorii lor de poziţie. Vom alege un punct de reper O şi vom pune $\overline{OA_1}=\bar{r}_1, \overline{OA_2}=\bar{r}_2$ (fig. 89).

Un punct oarecare M de pe dreaptă este caracterizat geometric prin faptul că este în linie dreaptă cu A_1 şi A_2.

Vectorial, cei doi vectori $\overline{A_1M}$ şi $\overline{A_1A_2}$ sunt coliniari. Această condiţie este necesară şi suficientă ca punctul M să fie pe dreapta A_1A_2.

Punctul M va fi definit deasemenea prin vectorul său de poziţie $\overline{OM}=\bar{r}$. Pentru a găsi relaţia caracteristică dreptei D, vom scrie că

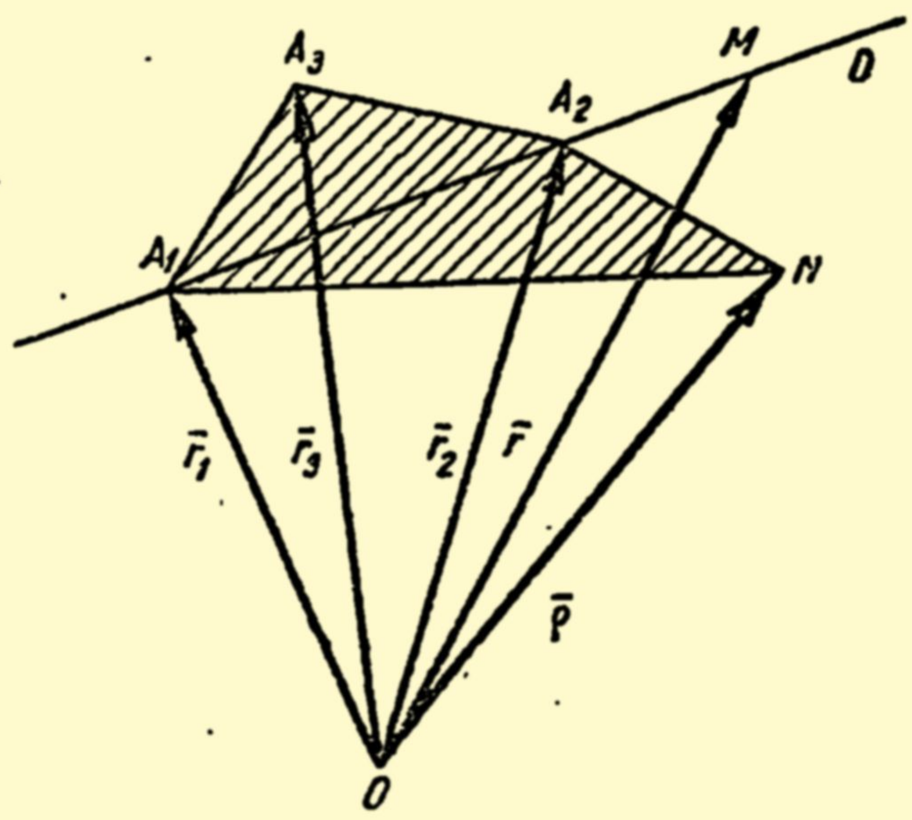


Fig. 89

$$\overline{A_1M}=\lambda\overline{A_1A_2},$$

unde λ este un parametru arbitrar, de unde

$$\bar{r}-\bar{r}_1=\lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1); \qquad (81,III)$$

$$\bar{r}=(1-\lambda)\bar{r}_1+\lambda\bar{r}_2.$$

Ecuaţia (81,III) este *ecuaţia vectorială a dreptei ce trece prin două puncte* A_1, A_2.

Dacă punem $1-\lambda=\alpha$; $\lambda=\beta$, deci $\alpha+\beta=1$, ea devine

$$\bar{r}=\alpha\bar{r}_1+\beta\bar{r}_2 \quad \text{cu} \quad \alpha+\beta=1. \qquad (82,III)$$

Putem oricând satisface condiţia $\alpha+\beta=1$, dacă luăm

$$\alpha=\frac{p}{p+q} \quad \text{şi} \quad \beta=\frac{q}{p+q}.$$

Ecuaţia (82,III) se mai poate deci scrie

$$\bar{r}=\frac{p\bar{r}_1+q\bar{r}_2}{p+q}. \qquad (83,III)$$

Se vede imediat că $-\frac{q}{p}$ este raportul în care M împarte segmentul $\overline{A_1A_2}$. Putem deasemenea asimila punctul M cu q, baricentrul a două mase p, aşezate respectiv în A_1 şi A_2.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a trece la expresiile analitice putem alege un sistem de referinţă oarecare $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, figurat printr'un triedru cu originea în O,

Fie

$$\overline{r}_1 = x_1\overline{u} + y_1\overline{v} + z_1\overline{w}\,; \quad \overline{r}_2 = x_2\overline{u} + y_2\overline{v} + z_2\overline{w}\,;$$

$$\overline{r} = x\overline{u} + y\overline{v} + z\overline{w}$$

cei trei vectori de poziţie. Din ecuaţia (81,III) deducem

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)\,; \quad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)\,:$$

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \tag{84,III}$$

adică reprezentarea parametrică a dreptei, care trece prin cele două puncte A_1, A_2. Aceste ecuaţii (84,III) se mai pot scrie sub forma echivalentă

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda. \tag{85,III}$$

Dacă însemnăm cu $\overline{n}$ vectorul $\overline{A_1A_2}$, deci $\overline{n} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$, punând

$$\overline{n} = a\overline{u} + b\overline{v} + c\overline{w},$$

ecuaţia vectorială (81,III) devine

$$\overline{r} = \overline{r}_1 + \lambda\overline{n} \tag{86,III}$$

şi reprezintă dreapta care trece printr'un punct A_1 şi are o direcţie dată de vectorul $\overline{n}$. Analitic, ea se va scrie

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = \lambda$$

sau, sub formă parametrică;

$$x = x_1 + \lambda a\,; \quad y = y_1 + \lambda b\,; \quad z = z_1 + \lambda c.$$

Formulele echivalente (82,III) şi (83,III) conduc la expresiile analitice cunoscute.

Acest exemplu arată posibilităţile metodei vectoriale şi calitatea sa de a condensa într'o singură expresie mai multe ecuaţii.

Fiecare vector sau scalar, care intervine într'o expresie vectorială, are o semnificaţie geometrică, astfel încât citirea unei formule pune în evidenţă structura geometrică a expresiilor utilizate.

In aceste calităţi se ascund, însă, şi defectele acestei metode vectoriale: multe dintre proprietăţile figurilor geometrice rezultă din caracterul algebric al relaţiilor prin care sunt definite, de exemplu din faptul că ecuaţiile sunt liniare. Ori, expresiile vectoriale sunt câteodată mai greu de citit din acest punct de vedere. Astfel, gradul unei curbe algebrice nu apare imediat din ecuaţia sa vectorială.

Deaceea, este util să îmbinăm metoda simbolică şi cea analitică şi să folosim concomitent instrumentele puse la îndemână de Algebră şi Analiză în cercetarea expresiilor ce provin din raportarea mărimilor vectoriale la un triedru de referinţă.

Scanned with OKEN Scanner

§ 92. Planul definit prin trei puncte

Să considerăm un al treilea punct A_3 pe fig. 89, presupunând A_1, A_2, A_3 necoliniare. Punctele A_1, A_2, A_3 definesc un plan. Un punct N din acest plan este caracterizat prin proprietatea că vectorii $\overline{A_1N}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ sunt coplanari. Vectorial, vom impune deci condiţia ca ei să fie liniar dependenţi, adică

$$\overline{A_1N} = \lambda\overline{A_1A_2} + \mu\overline{A_1A_3}.$$

Dacă $\bar{\rho}$ este vectorul de poziţie al punctului N, vom avea ecuaţia vectorială

$$\bar{\rho} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + \mu(\bar{r}_3 - \bar{r}_1). \qquad (87, III)$$

unde λ şi μ sunt doi parametri arbitrari.

Putem scrie deasemenea

$$\bar{\rho} = (1 - \lambda - \mu)\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3$$

sau, punând

$$1 - \lambda - \mu = \alpha; \quad \lambda = \beta; \quad \mu = \gamma, \quad \text{deci} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

vom obţine

$$\bar{\rho} = \alpha\bar{r}_1 + \beta\bar{r}_2 + \gamma\bar{r}_3, \quad \text{cu} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \qquad (88, III)$$

Din (88, III) deducem condiţia ca patru puncte să fie coplanare. In adevăr un al patrulea punct A_4, având ca vector de poziţie $\bar{\rho} = \bar{r}_4$ trebue să satisfacă ecuaţia (88, III), deci

$$\alpha\bar{r}_1 + \beta\bar{r}_2 + \gamma\bar{r}_3 - \bar{r}_4 = 0, \quad \text{cu} \quad \alpha + \beta + \gamma - 1 = 0.$$

Dacă punem

$$\alpha = -\frac{a}{d}; \quad \beta = -\frac{b}{d} \quad \gamma = -\frac{c}{d},$$

această condiţie capătă forma simetrică

$$a\bar{r}_1 + b\bar{r}_2 + c\bar{r}_3 + d\bar{r}_4 = 0, \quad \text{cu} \quad a + b + c + d = 0. \qquad (89, III)$$

Condiţia ca patru puncte A_1, A_2, A_3, A_4 să fie coplanare este ca vectorii lor de poziţie să satisfacă relaţiile (89, III).

Putem pune ecuaţia planului, care trece prin trei puncte necoliniare, sub o formă în care să nu mai intervină parametrii λ, μ. Este suficient să înmulţim scalar ambii membri ai ecuaţiei (87, III) cu $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)$, pentru a obţine ecuaţia

$$[\bar{\rho} - \bar{r}_1, \ \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \ \bar{r}_3 - \bar{r}_1] = 0. \qquad (90, III)$$

Această ecuaţie este echivalentă cu (89, III), fiindcă produsul mixt (90, III) este nul, dacă cei trei vectori sunt coplanari, adică dacă satisfac relaţia (89, III).

Dacă $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ şi $\bar{r}_3 - \bar{r}_1$ sunt liniar dependenţi, adică dacă $\bar{r}_3 - \bar{r}_1 = k(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$, produsul mixt (90, III) este nul, oricare ar fi $\bar{\rho} - \bar{r}$, deci pentru orice punct N; prin urmare planul este nedeterminat. Insă, în acest caz, punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare. Se vede deci că ecuaţia vectorială (90, III) pune în evidenţă condiţia geometrică impusă dela început ca A_1, A_2, A_3 să fie necoliniare.

Ecuaţia (90, III) presupune însă noţiunile de produs scalar şi produs vectorial, pe când (87, III) nu foloseşte decât noţiunile Algebrei vectoriale liniare.

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea planului prin trei puncte nu foloseşte noţiuni metrice. S'ar părea însă că prin ecuaţia (90, III) folosim astfel de noţiuni. In realitate, numai *expresiile* sunt metrice, deoarece produsul mixt, exprimând volumul unui paralelipiped, nu este metric în spaţiul cu trei dimensiuni, după cum am mai observat anterior.

Utilizarea de noţiuni metrice în geometria afină conduce uneori la expresii mai simple şi este indicată din acest punct de vedere. Dealtfel, geometria elementară euclidiană nu face distincţie între noţiunile metrice şi afine.

Traducerea analitică a ecuaţiilor (87, III) şi (90, III) este

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda (x_2 - x_1) + \mu (x_3 - x_1); \\ y - y_1 &= \lambda (y_2 - y_1) + \mu (y_3 - y_1); \\ z - z_1 &= \lambda (z_2 - z_1) + \mu (z_3 - z_1). \end{aligned} \qquad (91, \text{III})$$

şi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (91', \text{III})$$

Analitic, (91',III) se obţine din (91, III) eliminând parametrii λ şi μ. Ori, ecuaţiile (91, III) nu folosesc noţiuni metrice. Se vede, deci, că în această problemă, metoda analitică are avantajul de a nu introduce noţiuni auxiliare de geometrie metrică pentru eliminarea parametrilor. Metoda vectorială de eliminare este bazată pe semnificaţia geometrică a produsului mixt, al cărui caracter metric este numai aparent, datorită modului în care a fost introdus.

Din ecuaţia (90, III) deducem, aplicând proprietatea de distributivitate a produsului mixt:

$$\bar{\rho} \cdot [\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{r}_1] = (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3). \qquad (91'', \text{III})$$

Dacă $(\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3) = 0$, punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

In acest caz, avem deasemenea

$$\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{r}_1 = 0,$$

cum se poate verifica imediat; ecuaţia (91'',III) este satisfăcută de orice punct şi planul este nedeterminat.

§ 93. Forma normală a ecuaţiei planului

Un plan poate fi definit prin direcţia normalei sale şi printr'un punct prin care este obligat să treacă.

Dacă versorul normalei este $\bar{n}$ şi punctul fix M_0 are vectorul de poziţie $\bar{r}_0$, condiţia necesară şi suficientă ca un punct M să aparţină planului este ca $\overline{M_0M}$ să fie perpendicular pe $\bar{n}$, deci

$$(\bar{r} - \bar{r}_0)\, \bar{n} = 0. \qquad (92, \text{III})$$

In această problemă intervine noţiunea de unghi prin perpendicularitatea vectorilor, deci produsul scalar este esenţial în această problemă de geometrie metrică.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă voim să utilizăm un sistem de referinţă, este indicat să alegem axe ortogonale. Vom pune deci:

$$\bar{n}=\alpha\bar{i}+\beta\bar{j}+\gamma\bar{k};\quad \bar{r}_0=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}+z_0\bar{k};\quad \bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$$

şi vom deduce ecuaţia carteziană a planului din (92, III):

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0. \qquad (93, III)$$

Ecuaţia (93, III) în sine nu are caracter metric şi reprezintă un plan ce trece prin M_0 şi în geometria afină, dar în acest caz α, β, γ, nu mai sunt componentele normalei la plan, ci reprezintă direcţia planului, cum am arătat anterior (§ 35).

Deci, numai în geometria metrică putem interpreta ecuaţia (93, III) ca o condiţie de perpendicularitate între $\bar{n}$ (α, β, γ) şi $\bar{r}-\bar{r}_0$. In geometria afină ea are totuşi o semnificaţie precisă.

Dacă însemnăm cu d distanţa dela origine la planul a cărui normală este $\bar{n}$ şi dacă presupunem că vectorul de poziţie al unui punct oarecare M face cu $\bar{n}$ un unghi ascuţit, atunci vom avea (fig. 90),

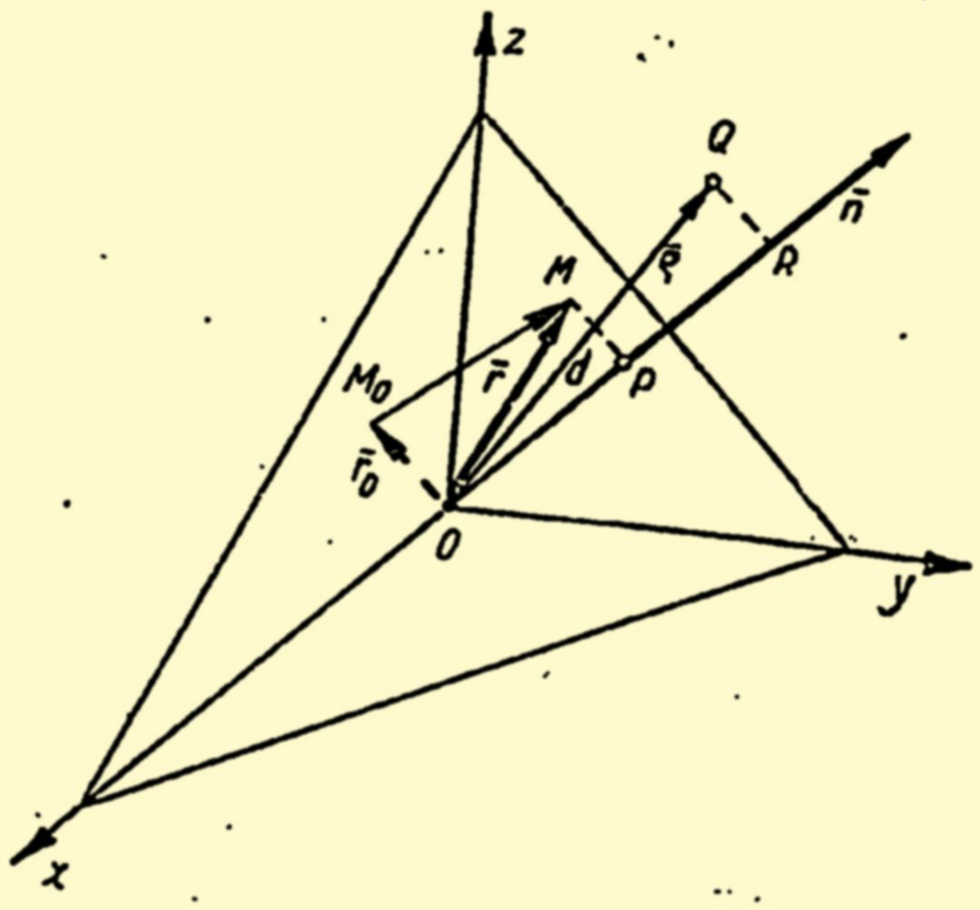


Fig. 90.

$$\bar{r}\bar{n}=d, \qquad (94, III$$

deoarece $\overline{OP}$ este proiecţia lui $\overline{OM}$ pe normala la plan, dusă prin O şi $\bar{r}\bar{n}>0$. Mai general, ecuaţia

$$\bar{r}\bar{n}=\lambda$$

reprezintă un plan perpendicular pe $\bar{n}$ şi a cărui distanţă la origine este $|\lambda|$

Dacă $\lambda>0$, vectorul perpendicular pe plan, dus prin O, are acelaşi sens ca $\bar{n}$. Ecuaţia (94, III) este *ecuaţia normală a planului*. Analitic ea se scrie

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=d.$$

Distanţa dela un punct Q exterior planului se va putea scrie

$$\delta=|\bar{\rho}\bar{n}-d|,$$

dacă notăm cu $\bar{\rho}$ vectorul de poziţie $\overline{OQ}$ al lui Q.

In adevăr, când Q este de partea opusă originii

$$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(\bar{\rho}\bar{n}-d)\,\bar{n}=\delta\bar{n},$$

iar în caz contrar

$$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(\bar{\rho}\bar{n}-d)\,\bar{n}=-\delta\bar{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia unui *fascicol de plane*, definit de două plane date

$$\bar{r}\bar{n}_1 = d_1, \quad \bar{r}\bar{n}_2 = d_2,$$

va fi de forma

$$\bar{r}(\bar{n}_1 + \lambda\bar{n}_2) = d_1 + \lambda d_2,$$

unde λ este un parametru variabil.

§ 94. Ecuaţia sferei. Ecuaţia cilindrului circular

Fie $\bar{r}_0$ vectorul de poziţie al centrului sferei, R raza sa şi $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct curent de pe sferă. Avem

$$|\bar{r} - \bar{r}_0| = R.$$

Ridicând la pătrat, obţinem ecuaţia vectorială a sferei

$$(\bar{r} - \bar{r}_0)^2 = R^2, \tag{95, III}$$

iar analitic

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \tag{95', III}$$

Dacă O este centrul sferei iar M_1 un punct de pe sferă al cărui vector de poziţie este $\bar{r}_1$, ecuaţia planului tangent în M_1 se va deduce din

$$\overline{OM}_1 \cdot \overline{M_1M} = 0$$

sau

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)(\bar{r} - \bar{r}_1) = 0 \tag{96, III}$$

cu condiţia $(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)^2 = R^2$, care exprimă faptul că M_1 se află pe sferă.

Să scriem acum ecuaţia (96, III) sub forma

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)[\bar{r} - \bar{r}_0 - (\bar{r}_1 - \bar{r}_0)] = 0.$$

Desvoltând, şi ţinând seamă de condiţia de mai sus, vom avea ecuaţia vectorială a planului tangent

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)(\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2, \tag{97, III}$$

sau analitic

$$(x_1-x_0)(x-x_0) + (y_1-y_0)(y-y_0) + (z_1-z_0)(z-z_0) = R^2 \tag{97', III}$$

Ecuaţia cilindrului circular. Să notăm cu $\bar{u}$ versorul axei de rotaţie, R raza secţiunii normale şi cu $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct curent de pe cilindru. Dacă originea este chiar pe axa cilindrului, vom avea

$$[\bar{r} \times \bar{u}]^2 = R^2, \tag{98, III}$$

relaţie care se transcrie analitic sub forma

$$(\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 = R^2 \tag{98', III}$$

unde α, β, γ sunt componentele lui $\bar{u}$, deci cosinusurile directoare ale axei de rotaţie. Dacă originea nu este pe axa de rotaţie, vom nota cu $\bar{r}_0$ vectorul de poziţie al unui punct fix de pe axă şi va fi suficient să înlocuim, în (98, III), $\bar{r}$ prin $\bar{r} - \bar{r}_0$. Obţinem ecuaţia

$$[(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{u}]^2 = R^2, \tag{99, III}$$

care se scrie analitic

$$[\gamma(y-y_0) - \beta(z-z_0)]^2 + [\alpha(z-z_0) - \gamma(x-x_0)]^2 + [\beta(x-x_0) - \alpha(y-y_0)]^2 = R^2 \tag{100, III}$$

Scanned with OKEN Scanner

NOTĂ. VECTORII ÎN PLAN ȘI FENOMENELE PERIODICE

Fenomenele periodice sinusoidale se întâlnesc în diverse ramuri ale științei: Mecanică, Acustică, Optică, Electromagnetism, Tehnica curenților alternativi, Radiotehnică, etc. Ceeace este comun la toate aceste fenomene, este faptul că variabila independentă (timpul), sau variabilele independente, intervin în ele sub forma:

$$a = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{101,III}$$

Aici a este o mărime periodică; A amplitudinea (constantă); ω — pulsația $\left(\omega = \frac{2\pi}{T},\ T \text{ fiind perioada}\right)$, iar φ — faza inițială sau defazajul inițial. [1])

Compunerea vibrațiilor armonice este bine cunoscută din cursurile de Optică fizică [2]) (sau electrotehnicienilor din cursul de Teoria curenților alternativi [3])). Pe noi compunerea a două vibrații armonice de aceeași frecvență ne va conduce la o nouă reprezentare a lor ca vectori în plan sau ca mărimi complexe.

Să considerăm două mărimi armonice a_1 și a_2:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1)\\ a_2 &= A_2\cos(\omega t + \varphi_2)\end{aligned}\right\} \tag{102,III}$$

Conținutul fizic al acestor mărimi (deplasări, curenți. câmpuri) ne spune că împreună cu a_1 și a_2 are sens și mărimea:

$$a = a_1 + a_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \tag{103,III}$$

Să încercăm să punem suma $a_1 + a_2$ sub forma (101,III). Un calcul elementar arată că:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1);\\ tg\varphi &= \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.\end{aligned}\right\} \tag{104,III}$$

Forma (104,III), obținută pentru amplitudinea vibrației rezultante și forma (101,III) a unei vibrații armonice, ne sugerează ideea că orice mărime periodică poate fi considerată ca proiecția pe axa Ox a unui vector din plan, de modul egal cu amplitudinea vibrației (luat la o scară convenabilă), care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul originii și la momentul inițial $t=0$ formează cu axa Ox un unghi φ (fig. 91*a*).

Adunarea mărimilor armonice (102,III) este ilustrată în fig. 91,*b* care se referă la momentul $t=0$, din care rezultă imediat relațiile (104,III). Pentru

---

[1]) Astfel, A poate fi amplitudinea unei oscilații mecanice, vectorul electric sau magnetic (respectiv o proiecție a lui) al unei unde luminoase, intensitatea curentului într'un circuit electric, etc.

[2]) V., de exemplu, *G. S. Landsberg*, „Optica", Ed. Tehnică, București 1951 sau *S. E. Frîș* și *A. V. Timoreva*, „Curs de fizică generală" vol. I, p. III, Ed. Tehnică, București 1952.

[3]) V. de exemplu *C. A. Crug*, Bazele Electrotehnicei vol. II, Ed. Tehnică București 1952.

Scanned with OKEN Scanner

reprezentarea grafică a unor mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvenţă, este mai comod a se considera vectorii fixaţi, sistemul de coordonate rotindu-se în sens contrar cu viteza unghiulară ω. Se obţin astfel diagrame vectoriale, mult folosite în electrotehnică (vom da mai jos un exemplu).

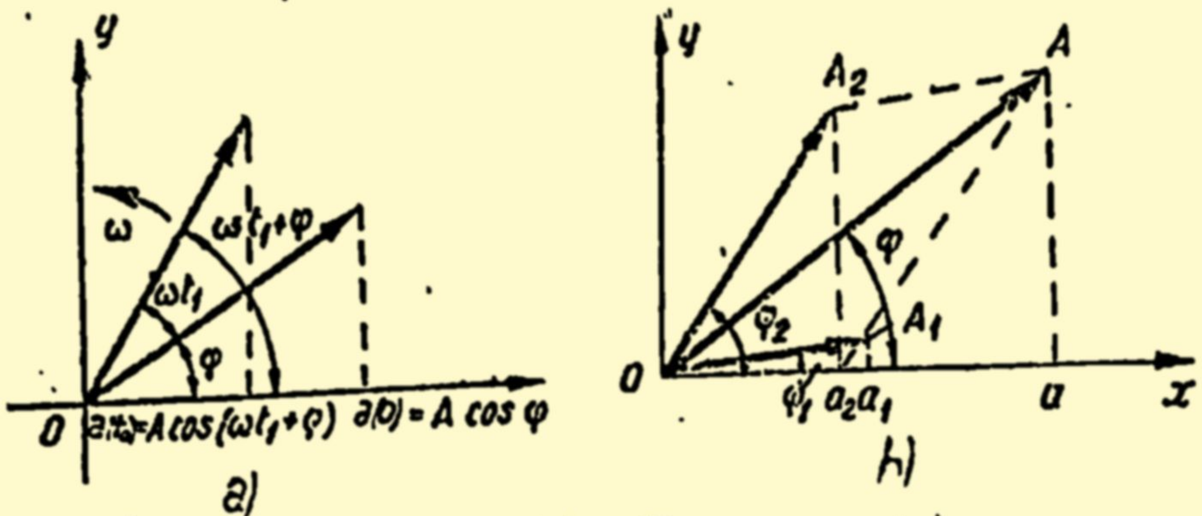


Fig. 91

In teoria oscilaţiilor şi în electrotehnică sunt deosebit de importante mărimile energetice, ca energia medie a unei mişcări, energia maximă acumulată în sistem, puterea (în electrotehnică) etc. Aceste mărimi sunt pătratice în diversele mărimi armonice. Astfel, puterea instantanee absorbită de un circuit electric, la bornele căruia există o tensiune $u=U\cos(\omega t+\varphi_1)$ şi prin care curge un curent $i=I\cos(\omega t+\varphi_2)$ este $p=ui=UI\cdot\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)$. In electrotehnică este deobicei interesantă voloarea medie luată pe o perioadă a acestei mărimi, numită *putere activă* P.

Să calculăm media pe o perioadă T a produsului a două mărimi armonice (102,III) : [1]

$$\left.\begin{aligned}\overline{a_1a_2}&=\frac{1}{T}\int_0^T a_1(t)a_2(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T A_1\cos(\omega t+\varphi_1)A_2\cos(\omega t+\varphi_2)dt=\\&=\frac{A_1A_2}{T}\int_0^T\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)dt=\frac{A_1A_2}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2).\end{aligned}\right\}\quad(105,\text{III})$$

Se vede deci că valoarea medie a produsului $\overline{a_1a_2}$ este egală cu jumătatea produsului scalar al vectorilor $\bar{A}_1$ şi $\bar{A}_2$, ce reprezintă cele două vibraţii.

O altă mărime importantă în electrotehnică este puterea reactivă, care dă o indicaţie asupra mărimii energiei fluctuante dintr'un circuit electric [2]). Dacă curentul absorbit de un circuit este $i=I\cos(\omega t+\varphi_1)$, iar tensiunea la bornele lui $u=U\cos(\omega t+\varphi_2)$, *puterea reactivă* se defineşte ca:

$$Q=\frac{UI}{2}\sin(\varphi_1-\varphi_2),\qquad(106,\text{III})$$

astfel încât $P^2+Q^2=\left(\frac{UI}{2}\right)^2$, mărime numită *putere aparentă*.

Expresia (106,III) ne aduce aminte de mărimea produsului vectorial al vectorilor $\bar{U}$ şi $\bar{I}$, care reprezintă tensiunea, respectiv curentul, însă, deoarece

---

[1]) Valoarea medie o vom nota cu o bară lungă deasupra literei. A nu se confunda cu notaţia pentru vectori !

[2]) Pentru detalii, a se vedea cursurile de Electrotehnică citate mai sus. A se vedea şi *I. S. Dubnov*, „Osnovî vectornogo iscisleniia (Bazele calculului vectorial), vol, I, GTTI, Moscova, 1950.

Scanned with OKEN Scanner

vectorii sunt în plan, iar produsul vectorial iese în afara planului, suntem nevoiţi să folosim produsul alternat al vectorilor $\bar{A}_1$ şi $\bar{A}_2$ din plan, introdus în § 83.

Vom nota cu $\bar{A}^*$ complimentul lui $\bar{A}$. Se vede uşor că

$$\left.\begin{aligned}(\bar{A}^*)^* &= -\bar{A},\\ |\bar{A}^*| &= |\bar{A}|,\\ (\lambda\bar{A}+\mu\bar{B})^* &= \lambda\bar{A}^*+\mu\bar{B}^*,\end{aligned}\right\} \qquad (107,\text{III})$$

unde λ şi μ sunt numere reale.

Se vede acum că mărimea (106,III) poate fi obţinută înmulţind scalar vectorul $\bar{U}^*$ cu vectorul $\bar{I}$, cu alte cuvinte, înmulţind alternat $\bar{U}$ cu $\bar{I}$.

Exemplu de diagramă vectorială. Circuit electric cu inductanţă şi rezistenţă. Să studiem circuitul electric format de rezistenţa R şi inductanţa L, legate în serie, şi la bornele cărora se aplică o tensiune $u=U\cos\omega t$ (fig. 92, *a*). Circuitul se află în regim permanent.

Alegem ca axă Ox direcţia vectorului $\bar{i}$ care reprezintă curentul. Vectorul $\bar{u}_R$, care reprezintă căderea de tensiune pe rezistenţă, va fi paralel cu i şi va avea (la scara tensiunilor, care este arbitrară) mărimea $u_R=Ri$ (fig. 92, *b*).

Căderea de tensiune pe inductanţă, dacă curentul are forma $i=I\cos(\omega t+\varphi)$ va fi:

$$u_L=-L\frac{di}{dt}=-\omega LI\sin(\omega t+\varphi)=-\omega LI\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Ea va putea, deci, fi reprezentată printr'un vector perpendicular pe i (unghiul de defazaj este de $\frac{\pi}{2}$) şi dirijat în direcţia semiaxei Oy negative. Tensiunea $\bar{u}$ este suma vectorială a tensiunilor $\bar{u}_R$ şi $\bar{u}_L$. Se vede că dacă $\bar{u}$ este fix şi R sau L variabil, locul geometric al extremităţii vectorului $\bar{u}_R$ este un semicerc [1]).

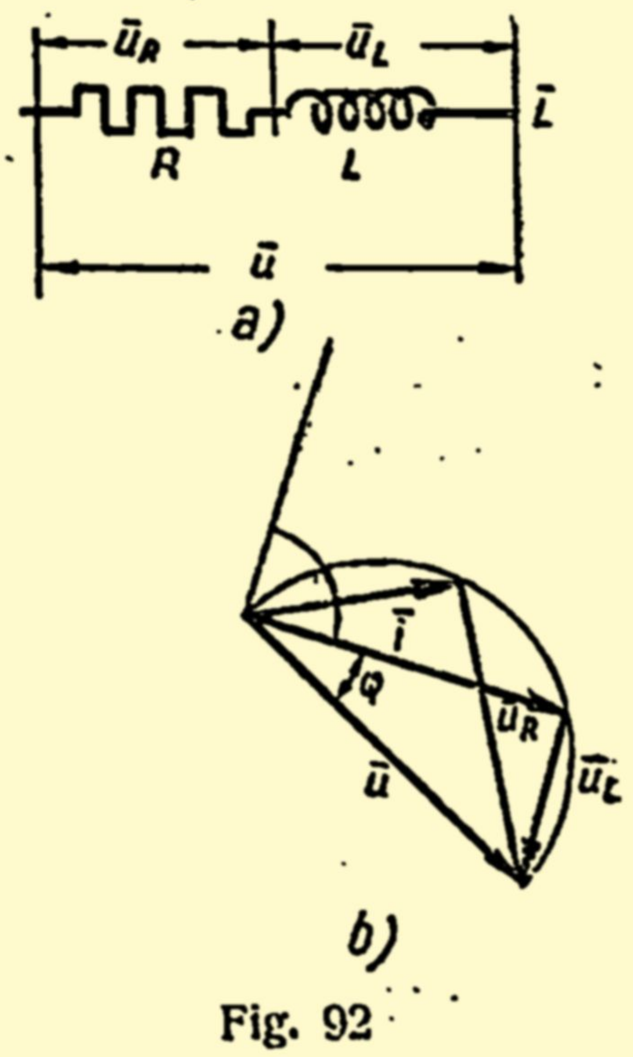


Fig. 92

Folosind reprezentarea numerelor complexe ca puncte ale unui plan se poate trece uşor dela reprezentarea vectorială a mărimilor periodice la o reprezentare mai des întrebuinţată — reprezentatarea complexă, după modul indicat în § 84.

Aici o mărime periodică este considerată ca partea reală a unei mărimi periodice complexe:

$$A\cos\omega t=Re(Ae^{i\omega t}),$$

iar rotaţiei unui vector de unghiul $+\varphi$ îi corespunde înmulţirea cu factorul $e^{i\varphi}$, etc.

La reprezentarea complexă trebue ţinut seama de faptul că mărimile pătratice (ca de exemplu energia, puterea) se obţin înmulţind o cantitate cu conjugata complexă a celei-

[1]) Aceste diagrame circulare sunt mult folosite în electrotehnică. A se vedea, de exemplu *Crug*, Op. cit, unde diagramele circulare sunt expuse prin metoda inversiunii în planul complex. Pentru o tratare vectorială a inversiunilor v. *Dubnov*, Op. cit., cap. II, § 33.

Scanned with OKEN Scanner

lalte. După formula (45,III) partea reală este egală cu produsul scalar, cea imaginară cu produsul alternat al vectorilor în plan, corespunzători.

EXERCIȚII

1. Un vector $\bar{a}$ de modul dat face un unghi de 60° cu axele Ox și Oy. Care este expresia sa?

Indicație. $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{2}$; $\cos\gamma=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\bar{a}=\frac{a}{2}[\bar{i}+\bar{j}+\sqrt{2}\bar{k}].$$

2. Se dau vectorii $\bar{a}$ (1,0,—2), $\bar{b}$ (0,—3,4), $\bar{c}$ (—5,6,0).
Să se determine scalarii m și n, astfel ca vectorul $\bar{d}=\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}$ să fie:
a) perpendicular pe planul yOz; b) egal înclinat pe axe.
Indicație. $\bar{d}=(1-5n)\bar{i}+(-3m+bn)\bar{j}+(-2+rm)\bar{k}$. Vom avea condițiile:
a) $-3m+6n=0$; $-2+4m=0$; b) $\bar{d}\bar{i}=\bar{d}\bar{j},=\bar{d}\bar{k}$, deci $1-5n=-3m+6n=-2+4m$

3. Să se arate că vectorii $\bar{a}$(1,—5,9), $\bar{b}$ (—15, 25, 30), $\bar{c}$ (8,—20, 6) se găsesc în același plan.

Indicație. Se arată că $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$ sau că $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\times\bar{a}$ sunt paraleli.

4. Care este condiția ca două drepte AB și $A'B'$ să fie concurente?

Indicație. Se va scrie $\overline{AA'}(\overline{AB}\times\overline{A'B'})=0$, cu condiția $\overline{AB}\times\overline{A'B'}\neq 0$.

5. Dintr'un punct N, mobil pe un cerc dat, se coboară perpendiculara NP pe un diametru fix. Pe NP se ia un punct M, astfel ca $\frac{|\overline{MN}|}{|\overline{NP}|}=k=\text{const}$. Se cere locul lui M.

Indicație. Fie R raza cercului și φ unghiul ei cu Ox. $\overline{ON}=R\cos\varphi\,\bar{i}+R\sin\varphi\,\bar{j}$; $\overline{OP}=R\cos\varphi\,\bar{i}$; $\overline{OM}=R\cos\varphi\bar{i}+\rho\bar{j}$. Insă $k=\frac{R\sin\varphi-\rho}{R\sin\varphi}$, deci $\overline{OM}=R[\bar{i}\cos\varphi+j(1+k)\sin\varphi]$.
M descrie o elipsă.

6. Să se afle expresia unghiului a două plane

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Indicație. Unghiul θ al celor două plane este unghiul normalelor.

$$\bar{N}_1=\bar{i}A_1+\bar{j}B_1+\bar{k}C_1;\quad \bar{N}_2=\bar{i}A_2+\bar{j}B_2+\bar{k}C_2.$$

7. Să se determine unghiul format de bisectoarea unghiului xOy cu bisectoarea unghiului xOz.

Indicație. $\cos\varphi=\frac{(\bar{i}+\bar{j})(\bar{i}+\bar{k})}{|\bar{i}+\bar{j}||\bar{i}+\bar{k}|}=\frac{1}{2}$, $\varphi=60°$.

8. Ce unghiuri face diagonala principală a unui cub cu diagonalele fețelor sale.

Indicație. $\cos\varphi=\frac{(\bar{i}+\bar{j})(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})}{|\bar{i}+\bar{j}||\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}|}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varphi=35°16'$.

9. Care sunt reciprocii vectorilor $\bar{a}$ (2,1,—1), $\bar{b}$ (—3,0,2), $\bar{c}$ (5,1,—2).
Să se verifice apoi că $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})(\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}')=1$.

Indicație. $\bar{a}'\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-1\right)$, $\bar{b}'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$, $\bar{c}'\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$.

10. Să se arate că reciprocii vectorilor $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{k}+\bar{i}$ sunt: $\bar{a}'=\frac{1}{2}(\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})$; $\bar{b}'=\frac{1}{2}(\bar{j}+\bar{k}-\bar{i})$; $\bar{c}'=\frac{1}{2}(\bar{k}+\bar{i}-\bar{j})$.

Scanned with OKEN Scanner

11. Să se verifice pe cale analitică formula dublului produs vectorial $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$.

12. Să se traducă analitic relația $(\bar{a}\times\bar{b})^2=\bar{a}^2\bar{b}^2-(\bar{a}\bar{b})^2$.

Indicație. Notând $\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$, $\bar{b}=b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$, se va obține identitatea lui Lagrange în variabilele a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3.

13. Care este condiția necesară și suficientă pentru ca un vector $\bar{V}=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}$ să fie paralel cu planul $Ax+By+Cz+D=0$.

Indicație. Se va scrie că $\bar{V}$ este perpendicular pe normala la acest plan.

14. Să se demonstreze că extremitatea razei vectoare $\bar{r}=\bar{a}\cos t+\bar{b}\sin t$; ($\bar{a}$ și $\bar{b}$ constanți, liniar independenți) descrie o elipsă.

Indicație. Luând componentele lui $\bar{r}$ pe direcțiile $\bar{a}$ și $\bar{b}$, avem $x=a_1\cos t+b_1\sin t$; $y=a_2\cos t+b_2\sin t$. Eliminarea lui t ne conduce la o ecuație de gradul II, care nu poate reprezenta decât o elipsă, deoarece x și y rămân finiți. În axe oblice, ecuația curbei este

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

iar $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt semi-diametri conjugați.

15. Să se afle punctul P, în care dreapta AB intersectează planul CDE. Caz particular: A (1, 2, 0), B (2, 3, 1), C (2, 0, 3), D (0; 4, 2), E (−1,2,−2).

Indicație. Scriind $\overline{AP}=\lambda\overline{AB}$, vom obține pe λ din relația $\overline{CP}\,(\overline{CD}\times\overline{CE})=[\overline{CA}+\lambda\overline{AB}]\,[\overline{CD}\times\overline{CE}]=0$. Se va găsi $\overline{OP}=\frac{1}{17}[-3\bar{i}+14\bar{j}-20\bar{k}]$.

16. Să se regăsească pe cale vectorială ecuația unei drepte dintr'un plan sub formă normală.

Indicație. Se va scrie că proiecția vectorului de poziție $\bar{r}$ al unui punct curent de pe dreapta pe perpendiculara dusă din origine la dreaptă este constantă.

17. Să se calculeze aria unui triunghi determinat de vectorii $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\bar{b}$ (b_1, b_2, b_3).

Indicație. Aria triunghiului este $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

18. Să se calculeze vectorial cosinusul diferenței a două unghiuri.

Indicație. Se consideră vectorii $\bar{a}=a[\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\sin\alpha]$; $\bar{b}=b[\bar{i}\cos\beta+\bar{j}\sin\beta]$, care fac cu Ox unghiurile α și β.

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

19. Să se stabilească expresia distanței dela un punct P la un plan dat prin trei puncte A, B, C.

Indicație. Se va scrie că distanța este dată de volumul paralelipipedului construit pe $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ ca laturi, împărțit la dublul ariei triunghiului ABC.

20. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri situate în plane diferite sau nu. Dacă planele duse respectiv prin A, B, C perpendicular pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ se taie după o dreaptă, atunci și planele duse prin A', B', C' perpendicular pe BC, CA, AB se taie și ele după o dreaptă.

Indicație. Notând cu $\bar{r}_A$, $\bar{r}_B$, etc. vectorii de poziție ai vârfurilor, condiția ca planele duse prin A, B, C etc. să se taie după o dreaptă este

$$\bar{r}_A(\bar{r}_{B'}-\bar{r}_{C'})+\bar{r}_B(\bar{r}_{C'}-\bar{r}_{A'})+\bar{r}_C(\bar{r}_{A'}-\bar{r}_{B'})=0.$$

21. Să se rezolve sistemul

$$\bar{a}\bar{x}=A;\quad \bar{b}\bar{y}=B;\quad \bar{c}\bar{z}=C;\qquad (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\neq 0).$$

Indicație. Se va căuta soluția sub forma $\bar{x}=\alpha\bar{a}'+\beta\bar{b}'+\gamma\bar{c}'$, unde $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$ sunt reciprocii vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Se va obține $\bar{x}=A\bar{a}'+B\bar{b}'+C\bar{c}'$. Trecând la componente față de $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, se va regăsi formula lui Cramer.

Scanned with OKEN Scanner

Altă soluție. Fie

$$\bar{x}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}+\nu\bar{c}$$

și deci

$$A=\lambda(\bar{a}\,\bar{a})+\mu(\bar{b}\,\bar{a})+\nu(\bar{c}\,\bar{a});$$
$$B=\lambda(\bar{a}\,\bar{b})+\mu(\bar{b}\,\bar{b})+\nu(\bar{b}\,\bar{c});$$
$$C=\lambda(\bar{a}\,\bar{c})+\mu(\bar{b}\,\bar{c})+\nu(\bar{c}\,\bar{c});$$

rezultă că

$$\begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ A & \bar{a}\bar{a} & \bar{b}\bar{a} & \bar{c}\bar{a} \\ B & \bar{a}\bar{b} & \bar{b}\bar{b} & \bar{c}\bar{b} \\ C & \bar{a}\bar{c} & \bar{b}\bar{c} & \bar{c}\bar{c} \end{vmatrix}=0$$

sau, utilizând determinantul lui Gram,

$$\bar{x}=-\frac{1}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^2}\begin{vmatrix} \bar{0} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ A & \bar{a}\bar{a} & \bar{b}\bar{a} & \bar{c}\bar{a} \\ B & \bar{a}\bar{b} & \bar{b}\bar{b} & \bar{c}\bar{b} \\ C & \bar{a}\bar{c} & \bar{b}\bar{c} & \bar{c}\bar{c} \end{vmatrix}.$$

22. Să se verifice identitatea $(\bar{a}+\bar{b})^*(\bar{a}-\bar{b})=-2\bar{a}^*\bar{b}$. Interpretare geometrică.

Indicație. Se va ține seama că $\bar{a}^*\bar{b}=\bar{a}\bar{b}^*$ și $\bar{a}^*\bar{a}=0$. Se deduce că dacă cu vectorii diagonali ai unui paralelogram se construește un alt paralelogram, suprafața lui va fi dublul suprafeței celui inițial, sensul de parcurs fiind invers.

23. Să se arate că din $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ rezultă $\bar{a}^*\bar{b}=\bar{b}^*\bar{c}=\bar{c}^*\bar{a}$. Interpretare geometrică.

24. In plan, două baze se numesc reciproce dacă sunt satisfăcute relațiile $\bar{u}\bar{u}'=\bar{v}\bar{v}'=1$; $\bar{u}\bar{v}'=\bar{v}\bar{u}'=0$. Să se arate că

1) $\bar{u}'=-\dfrac{\bar{v}^*}{\bar{u}^*\bar{v}}$; $\bar{v}'=\dfrac{\bar{u}^*}{\bar{u}^*\bar{v}}$;

2) $(\bar{u}^*\bar{v})(\bar{u}'^*\bar{v}')=1$;

3) pentru orice vector $\bar{a}$ din plan avem

$$\bar{a}=(\bar{a}\bar{u}')\bar{u}+(\bar{a}\bar{v}')\bar{v}.$$

Indicație. Din ultimele două relații de definiție reiese $\bar{u}'=\lambda\bar{v}^*$, $\bar{v}'=\mu\bar{u}^*$; introducând în primele două, $\lambda=\dfrac{1}{\bar{v}^*\bar{u}}=-\dfrac{1}{\bar{u}^*\bar{v}}$, etc.

25. In planul orientat sunt date două sisteme de axe carteziene ortogonale, prin vectorii de bază $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, cu $(\bar{i},\bar{i}')=\alpha$. Să se exprime $\bar{i}'$ și $\bar{j}'$ prin $\bar{i}$, $\bar{j}$ și reciproc. Să se scrie relațiile dintre componentele unui vector față de cele două sisteme de axe.

26. Să se verifice în plan invarianța produsului scalar față de transformări ortogonale ($D=\pm1$) și a produsului alternat în cazul $D=1$.

B. SISTEME DE REFERINȚĂ OBLICE. COVARIANȚA ȘI CONTRAVARIANȚA MĂRIMILOR

§ 95. Sisteme de unități vectoriale de dimensiuni diferite

Utilizarea sistemelor de referință carteziene ortogonale, în care cei trei versori fundamentali servesc ca mărimi unitate pentru măsura componentelor mărimilor vectoriale, presupune introducerea unui criteriu de comparație a distanțelor măsurate în orice direcție din spațiu.

Scanned with OKEN Scanner

Din punctul de vedere al semnificaţiei fizice, cele trei componente $X\bar{i}, Y\bar{j}, Z\bar{k}$ ale unei mărimi vectoriale $\bar{V}$ au aceleaşi dimensiuni, deci aceeaşi natură. Componentele scalare X, Y, Z pot fi comparate între ele, de exemplu, pentru un vector viteză, ele vor fi măsurate în metri pe secundă.

In aplicaţii se pune adeseori, însă, problema de a reprezenta geometric mărimi măsurabile cu unităţi care nu au aceleaşi dimensiuni.

Este suficient să reprezentăm legea gazelor perfecte exprimată prin relaţia

$$pv = RT, \qquad (108,III)$$

unde p este presiunea, v-volumul, T-temperatura şi R-constanta gazelor.

Dacă facem să corespundă punctului aritmetic (p, v, T) un punct din spaţiul cu trei dimensiuni, folosind un triedru de referinţă, pe axa Op unitatea va reprezenta unitatea de presiune, pe axa Ov vom reprezenta unitatea de volum, iar pe OT unitatea de temperatură.

Intre aceste unităţi nu există o măsură comună, astfel încât prin simplă convenţie le putem alege egale sau diferite.

Un punct $M(p, v, T)$ reprezintă starea unui gaz, iar alt punct vecin $M'(p', v', T')$ reprezintă o stare vecină.

Este însă inutil să luăm în consideraţie, de exemplu, distanţa între M şi M', deoarece o distanţă de două ori mai mare decât alta nu are nicio interpretare fizică. Alegerea unui triedru ortogonal este deasemenea lipsită de semnificaţie fizică în această reprezentare.

Ecuaţia (108, III) reprezintă o suprafaţă, pe care sunt curbe ce reprezintă variaţia stării gazului, când între două dintre cele trei variabile introducem o nouă relaţie, sau când una rămâne constantă: de exemplu, variaţia cu temperatura sub volum constant. Forma precisă a suprafeţei (108, III) şi a curbelor de pe ea nu are semnificaţie fizică; ci numai înfăţişarea lor generală.

Pentru a preciza sensul acestor observaţii, importante mai ales în aplicaţiile tehnice, vom considera iniţial un cub cu muchii egale cu unitatea şi aşezat chiar pe triedrul fundamental $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Dacă luăm apoi trei segmente diferite ca unităţi pe cele trei axe, cubul devine un paralelipiped drept, dar măsurând presiunea, vom găsi tot o atmosferă, iar pentru volum şi temperaturi vom găsi deasemenea, respectiv un metru cub şi un grad Celsius. Vârful opus originii, având coordonatele (1, 1, 1), va reprezenta aceeaşi stare a gazului în ambele cazuri. Putem chiar modifica unghiurile triedrului obţinând un paralelipiped oblic, fără a modifica starea reprezentată prin vârful considerat.

Explicaţia constă în aceea că *înfăţişarea generală a cubului se regăseşte în ambele paralelipipede şi nicio condiţie de ordin fizic nu ne impune să alegem unul dintre cele trei triedre înaintea celuilalt.*

Legea (108, III) *este reprezentată la fel în toate aceste sisteme de referinţă şi, în general, în orice sistem cartezian definit printr'un triedru oarecare.*

Dacă punctului $M(p, v, T)$ îi asociem vectorul său de poziţie, cele trei componente ale acestuia vor fi măsurate cu unităţi de dimensiuni diferite şi deci nu vor fi comparabile. Aceste constatări justifică utilizarea sistemelor de referinţă carteziene generale cu axe oblice şi unităţi diferite pe cele trei axe.

Scanned with OKEN Scanner

Perspectiva axonometrică, folosită în desenul tehnic şi arhitectural şi bazată pe proiecţia oblică pe un plan a unui triedru, ne dă o imagine a proprietăţilor, care rămân invariante, când unităţile pe axe şi direcţiile axelor se modifică: în imaginea axonometrică a unui corp recunoaştem toate elementele, care constitue forma, deşi perspectiva îl deformează.

Aplicaţiile fizice ne conduc, deci, la necesitatea de a folosi reprezentarea vectorilor şi a figurilor geometrice în raport cu un triedru oarecare.

La rândul său, Geometria arată că proprietăţile afine ale figurilor se exprimă la fel faţă de un triedru oarecare, ca şi faţă de un triedru ortogonal. Aşa, de exemplu, ecuaţiile dreptei, definită prin două puncte, sau ecuaţia planului prin trei puncte, sunt aceleaşi în ambele moduri de reprezentare.

Aplicaţie. *Sisteme de referinţă oblice impuse de configuraţii geometrice.*

In unele probleme de geometrie, mecanică, fizică, etc. sistemul de referinţă este indicat de elementele geometrice înseşi şi este constituit de un triedru oblic.

Vom da exemplul următor:

Să se determine ecuaţia vectorială a dreptei de intersecţie a două plane de direcţii date.

Vom alege un punct de reper O şi vom nota prin $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ vectorii normali la cele două plane (fig. 93), ale căror ecuaţii vor fi

$$\bar{A}\bar{r}=a; \qquad \bar{B}\bar{r}=b, \tag{109,III}$$

unde a, b sunt doi scalari. Forma normală a acestor ecuaţii este (94,III)

$$\frac{\bar{A}}{A}\bar{r}=\left|\frac{a}{A}\right|; \qquad \frac{\bar{B}}{B}\bar{r}=\left|\frac{b}{B}\right|,$$

dacă orientăm convenabil versorii $\frac{\bar{A}}{A}, \frac{\bar{B}}{B}$.

Un triedru de referinţă legat intrinsec de figură va fi definit de vectorii $\bar{A}$, $\bar{B}$ şi de produsul vectorial $\bar{A}\times\bar{B}$.

In adevăr, dreapta de intersecţie, fiind cuprinsă în ambele plane, este perpendiculară pe $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, deci are direcţia lui $\bar{A}\times\bar{B}$, iar vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ definesc cele două plane.

Mai observăm în plus că dacă $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ nu sunt coliniari, $\bar{A}$, $\bar{B}$ şi $\bar{A}\times\bar{B}$ constitue totdeauna un triedru nedegenerat, de orientare pozitivă.

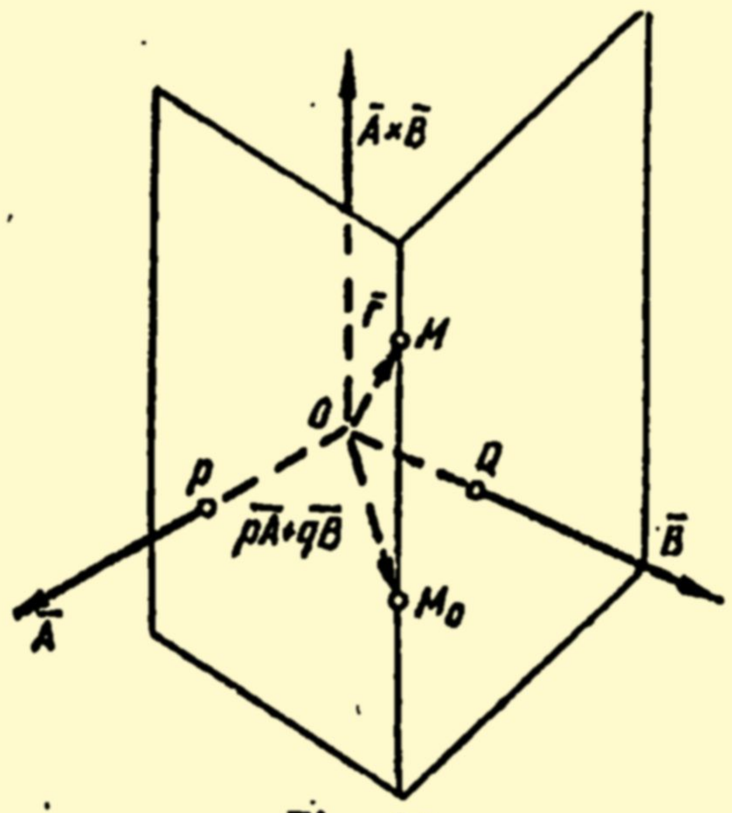


Fig. 93

Vom scrie dreapta de intersecţie ţinând seama că are o direcţie dată, raportând vectorul de poziţie al unui punct al său la acest triedru. Vom avea deci:

$$\bar{r}=p\bar{A}+q\bar{B}+\lambda(\bar{A}\times B), \tag{110,III}$$

unde p, q sunt cantităţi ce trebue determinate, iar λ un parametru. De fapt dreapta va avea ecuaţia $\bar{r}-\bar{r}_0=\lambda\ (\bar{A}\times\bar{B})$, unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0 în care dreapta căutată înţeapă planul format de $\bar{A}$, $\bar{B}$ duşi prin originea O, deoarece $\bar{r}_0=p\bar{A}+q\bar{B}$.

Toţi termenii din ecuaţia (110,III) au deci semnificaţii geometrice legate de figura formată de cele două plane, singurul element arbitrar fiind originea triedrului.

Determinarea lui p şi q se face ţinând seama de ecuaţiile (109,III) ale planelor, înmulţind scalar ecuaţia (110,III) succesiv cu $\bar{A}$ şi $\bar{B}$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea:

$$a = pA^2 + q\bar{A}\bar{B},$$

$$b = p\bar{A}\bar{B} + qB^2,$$

sistem în care determinantul este $A^2B^2 - (\bar{A}\bar{B})^2 = [\bar{A}\times\bar{B}]^2$. Deducem imediat

$$p = \frac{aB^2 - b\bar{A}\bar{B}}{[\bar{A}\times\bar{B}]^2}, \qquad q = \frac{bA^2 - a\bar{A}\bar{B}}{[\bar{A}\times\bar{B}]^2},$$

dacă $[\bar{A}\times\bar{B}]^2 \neq 0$, deci $\bar{A}$ și $\bar{B}$ necoliniari, adică planele neparalele.

Înlocuind în ecuația (110,III) aceste valori și grupând termenii în a și b, avem:

$$\bar{r} = \frac{a}{[\bar{A}\times\bar{B}]^2}[B^2\bar{A} - (\bar{A}\bar{B})\bar{B}] + \frac{b}{[\bar{A}\times\bar{B}]^2}[A^2\bar{B} - (\bar{A}\bar{B})\bar{A}] + \lambda[\bar{A}\times\bar{B}],$$

de unde

$$\bar{r} = \frac{a}{[\bar{A}\times\bar{B}]^2}[\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})] + \frac{b}{[\bar{A}\times\bar{B}]^2}[(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{A}] + \lambda[\bar{A}\times\bar{B}]. \qquad (111,III)$$

În cazul când $[\bar{A}\times\bar{B}]^2 = 0$, dacă $aB^2 - b\bar{A}\bar{B} \neq 0$ planele sunt paralele, iar dacă $aB^2 - b\bar{A}\bar{B} = 0$, ținând seama că $\bar{B} = k\bar{A}$, unde k este un factor de proporționalitate, vom avea $b = ka$ și planele vor fi confundate.

Prin alegerea acestui triedru, care este oblic în general, ecuația (111,III), a dreptei de intersecție nu conține decât elemente legate de figura dată.

Forma intrinsecă a acestui ecuații ne permite să alegem orice alt triedru de referință pentru a raporta figura și a găsi forma analitică a intersecției celor două plane.

Astfel, există al doilea triedru legat intrinsec de cele două plane, format de un vector paralel cu intersecția lor și de vectorii paraleli cu laturile unghiului plan al diedrului celor două plane, adică de doi vectori perpendiculari pe muchia acestui diedru și paraleli cu cele două plane.

Unul din acești vectori este proporțional cu $\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})$ deoarece acest vector este perpendicular pe $(\bar{A}\times\bar{B})$ și pe $\bar{B}$, deci perpendicular pe muchia diedrului și paralel cu planul $\bar{B}$. Celălalt este proporțional cu $(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{A}$.

Formula (111,III) definește deci un vector raportat la acest diedru. Dacă observăm că

$$[\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})]^2 = B^2[\bar{A}\times\bar{B}]^2, \text{ deci } |\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})| = B|\bar{A}\times\bar{B}|;$$

$$[(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{A}]^2 = A^2[\bar{A}\times\bar{B}]^2, \text{ deci } |(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{A}| = A|\bar{A}\times\bar{B}|,$$

vom putea pune în evidență versorii fundamentali $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, și formula (111,III) se va scrie

$$\bar{r} = \frac{aB}{|\bar{A}\times\bar{B}|}\frac{\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})}{B|\bar{A}\times\bar{B}|} + \frac{bA}{|\bar{A}\times\bar{B}|}\frac{(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{A}}{A|\bar{A}\times\bar{B}|} + \lambda(\bar{A}\times\bar{B}). \qquad (112,III)$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})}{B|\bar{A}\times\bar{B}|}; \quad \bar{v} = \frac{(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{A}}{A|\bar{A}\times\bar{B}|}; \quad \bar{w} = \frac{\bar{A}\times\bar{B}}{|\bar{A}\times\bar{B}|}.$$

Dacă în particular luăm $\bar{A}$ și $\bar{B}$ versori, ecuațiile (109,III) devin ecuațiile normale ale celor două plane, iar $|\bar{A}\times\bar{B}| = \sin\theta$, unde θ este unghiul planelor.

Formula (112,III) se scrie

$$\bar{r} = \frac{a}{\sin\theta}\bar{u} + \frac{b}{\sin\theta}\bar{v} + \lambda(\bar{A}\times\bar{B}),$$

unde $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt cei doi versori introduși în (112,III).

Scanned with OKEN Scanner

In acest caz $\left(\frac{a}{\sin\theta}, \frac{b}{\sin\theta}, 0\right)$ reprezintă tocmai coordonatele lui M_0 în acest sistem de referință. Când planele sunt perpendiculare, ele devin $(a, b, 0)$ și sunt egale în valoare absolută cu distanțele dela O la cele două plane.

Punând

$$\bar{r} = x\bar{u} + y\bar{v} + z\bar{w}$$

ecuațiile (109,III) se scriu

$$\bar{A}\cdot[x\bar{u}+y\bar{v}+\lambda(\bar{A}\times\bar{B})]=a, \qquad \bar{B}\cdot[x\bar{u}+y\bar{v}+\lambda(\bar{A}\times\bar{B})]=b$$

și se reduc imediat la formele

$$x=\frac{a}{\sin\theta}, \quad y=\frac{b}{\sin\theta}; \tag{113,III}$$

In adevăr, avem:

$$A\bar{u}=\bar{A}\,\frac{\bar{B}\times(\bar{A}\times\bar{B})}{B|\bar{A}\times\bar{B}|}=\frac{[\bar{A}\bar{B}(\bar{A}\times\bar{B})]}{|\bar{A}\times\bar{B}|}=\frac{(\bar{A}\times\bar{B})\cdot(\bar{A}\times\bar{B})}{|\bar{A}\times\bar{B}|}=|\bar{A}\times\bar{B}|=\sin\theta;$$

$$B=1, \quad \bar{A}\bar{v}=0, \qquad \bar{A}(\bar{A}\times\bar{B})=0, \text{ etc.}$$

In acest sistem de referință, ecuațiile analitice sunt extrem de simple și dreapta de intersecție are ecuațiile (113,III), iar punctul M_0 are în mod vizibil coordonatele găsite pe forma vectorială. Formula vectorială (111,III) este însă independentă de vreun triedru, alegerea celui considerat neavând nicio influență asupra ei, deoarece toți vectorii și scalarii, care intervin în ea, sunt legați de cele două plane.

Exemplul tratat pune în evidență diferența între metodele vectoriale și cele carteziene:

Alegerea unui triedru impus de natura problemei conduce în metodele carteziene la formule simple, dar inadaptabile deobicei cazului general, fără reluarea calculului.

Aceiași alegere în metodele vectoriale ne dă formule mai complicate uneori, dar adaptabile, prin calcul algebric și cazului general al unui triedru oarecare.

Din ambele metode este de reținut că în unele probleme triedrul intrinsec legat de configurația geometrică este oblic și nu ortogonal.

§ 96. Componentele scalare într'un sistem cartezian general

Măsura mărimilor vectoriale în raport cu trei unități vectoriale oarecare $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, care pot avea dimensiuni fizice diferite, ne conduce la descompunerea vectorilor reprezentativi în raport cu un triedru oarecare $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Punând

$$V = X\bar{u} + Y\bar{v} + Z\bar{w}, \quad \text{cu} \quad \bar{u}\bar{v}\bar{w} \neq 0, \tag{114, III}$$

componentele scalare X, Y, Z ale vectorului $\bar{V}$, reprezentând împreună măsura acestui vector prin cele trei unități $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, sunt date de expresiile (54, II).

$$X=\frac{\bar{v}\bar{w}\bar{V}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}; \quad Y=\frac{\bar{w}\bar{u}\bar{V}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}; \quad Z=\frac{\bar{u}\bar{v}\bar{V}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}, \tag{115, III}$$

reprezentând măsurile volumelor $\bar{v}\bar{w}\bar{V}$, $\bar{w}\bar{u}\bar{V}$, $\bar{u}\bar{v}\bar{V}$ *prin volumul unitate* $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ (fig. 94).

Această proprietate arată că măsura mărimilor vectoriale prin descompunerea vectorului reprezentativ este justificată fizic.

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, măsura unei mărimi scalare este un raport între mărimea dată şi etalonul ales din aceeaşi specie. Pe de altă parte, măsura mărimilor geometrice ne conduce la geometrizarea numerelor reale prin segmente aşezate pe o dreaptă, adică printr'o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între punctele unei drepte şi numerele reale. Măsura scalarilor este în acest caz un raport de segmente, deci de elemente constitutive ale spaţiului cu o dimensiune, în care au figurat scalarii.

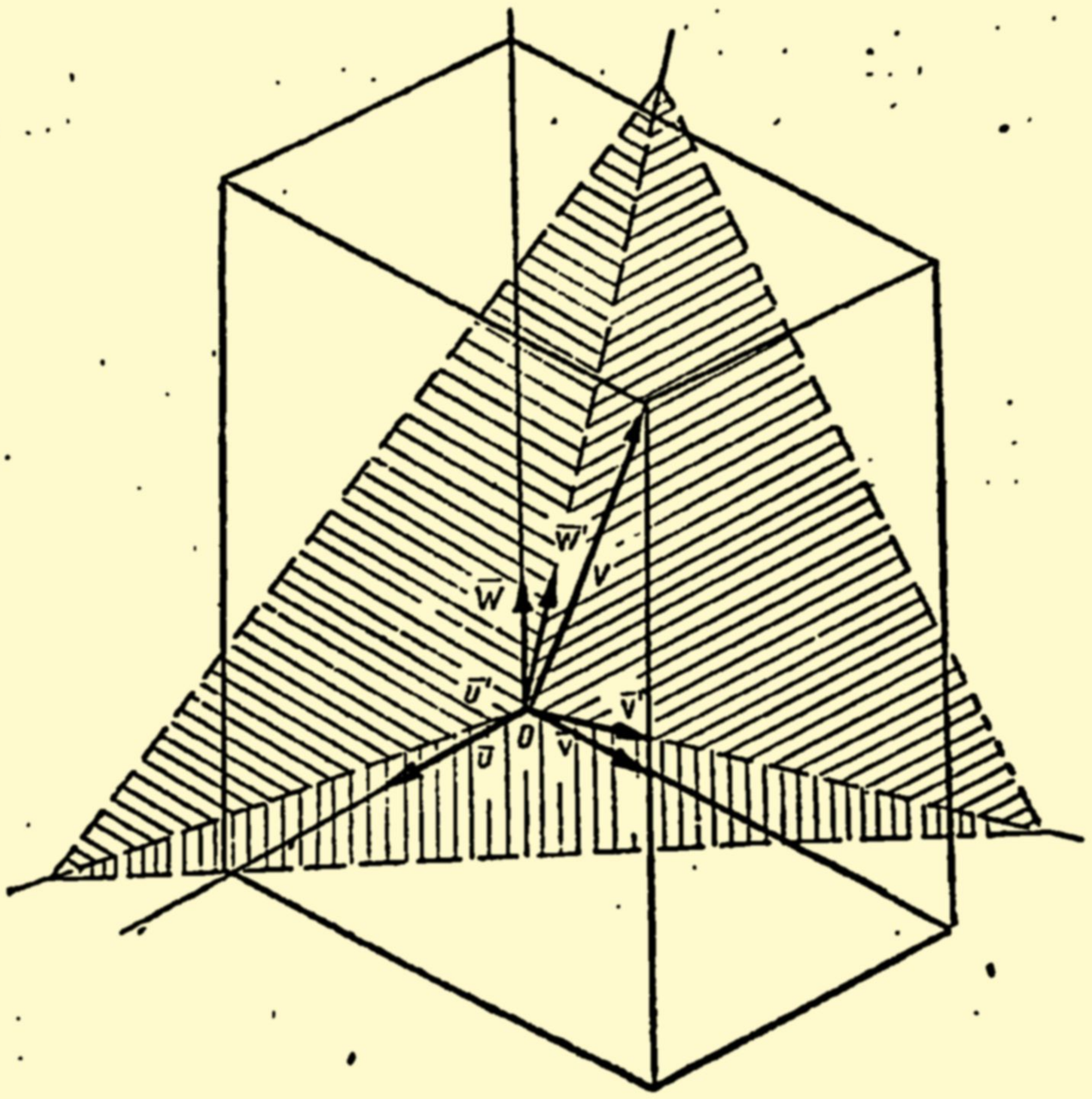


Fig. 94

In fenomenele ce pot fi socotite unidimensionale, ca de exemplu tensiunea sau tracţiunea într'o coardă întinsă, măsura acestei tracţiuni rezultă din raportul dintre măsurile vectorilor reprezentativi, respectiv al ei şi al unei tracţiuni etalon şi este deci un raport de segmente.

In fenomenele tridimensionale măsura mărimilor vectoriale prin vectorii lor reprezentativi, este dată de rapoarte de volume, deoarece aceste mărimi aparţin spaţiului cu trei dimensiuni.

Utilizarea unui triedru ortogonal ascunde această proprietate fundamentală a măsurii mărimilor vectoriale, din care rezultă invarianţa acestei măsuri, adică independenţa sa faţă pe alegerea unui triedru anumit.

In adevăr, componentele ortogonale $(\bar{i}\bar{V})$, $(\bar{j}\bar{V})$, $(\bar{k}\bar{V})$ nu apar legate de volume, cum am mai menţionat (§ 53) din cauza simplificării expresiilor lor.

Această observaţie justifică desvoltarea metodei analitice în Calculul vectorial cu ajutorul triedrului general, cel puţin pentru obţinerea rezultatelor teoretice şi pentru cazurile în care un astfel de triedru este impus de natura geometrică a problemei.

Prin introducerea vectorilor reciproci $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$, expresia (114, III) a vectorului, raportat la triedrul $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, devine

$$\bar{V}=(\bar{u}'\bar{V})\bar{u}+(\bar{v}'\bar{V})\bar{v}+(\bar{w}'\bar{V})\bar{w}, \qquad (116,III)$$

deci

$$X=(\bar{u}'\bar{V}), \quad Y=(\bar{v}'\bar{V}), \quad Z=(\bar{w}'\bar{V}). \qquad (117,III)$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. S'ar părea că pentru calculul componentelor scalare trebue să utilizăm atât triedrul iniţial, cât şi reciprocul său. In realitate, putem exprima pe $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$, raportaţi la $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ şi obţine expresiile componentelor, exclusiv în funcţie de $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. (fig. 94).

Calculul direct este mai anevoios. Putem însă proceda în modul următor. Să înmulţim scalar succesiv cu $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, ambii membri ai expresiei (114, III). Vom obţine

$$\begin{aligned}
\bar{u}\,\bar{V} &= X\,\bar{u}\,\bar{u} + Y\,\bar{u}\,\bar{v} + Z\,\bar{u}\,\bar{w};\\
\bar{v}\,\bar{V} &= X\,\bar{v}\,\bar{u} + Y\,\bar{v}\,\bar{v} + Z\,\bar{v}\,\bar{w};\\
\bar{w}\,\bar{V} &= X\,\bar{w}\,\bar{u} + Y\,\bar{w}\,\bar{v} + Z\,\bar{w}\,\bar{w}.
\end{aligned}$$

Aceste ecuaţii scalare se pot rezolva în raport cu X, Y, Z, deoarece determinantul sistemului este determinantul lui Gram (78, II) şi are valoarea $[\bar{u}\bar{v}\bar{w}]^2 \neq 0$. Putem deasemenea elimina X, Y, Z între aceste ecuaţii şi (114, III), obţinând determinantul simbolic

$$\begin{vmatrix}
\bar{V} & \bar{u} & \bar{v} & \bar{w}\\
\bar{u}\bar{V} & \bar{u}\bar{u} & \bar{u}\bar{v} & \bar{u}\bar{w}\\
\bar{v}\bar{V} & \bar{v}\bar{u} & \bar{v}\bar{v} & \bar{v}\bar{w}\\
\bar{w}\,\bar{V} & \bar{w}\bar{u} & \bar{w}\bar{v} & \bar{w}\bar{w}
\end{vmatrix} = \bar{0}.$$

Considerând prima coloană ca o sumă de elemente din care unul este nul, putem rezolva în raport cu $\bar{V}$ şi vom avea

$$\bar{V} = \frac{1}{(\bar{u}\bar{v}\bar{w})^2}\begin{vmatrix}
\bar{u} & \bar{v} & \bar{w} & 0\\
\bar{u}\bar{u} & \bar{u}\bar{v} & \bar{u}\bar{w} & \bar{u}\bar{V}\\
\bar{v}\bar{u} & \bar{v}\bar{v} & \bar{v}\bar{w} & \bar{v}\bar{V}\\
\bar{w}\bar{u} & \bar{w}\bar{v} & \bar{w}\bar{w} & \bar{w}\bar{V}
\end{vmatrix} \qquad (118, III)$$

Această expresie generalizează desvoltarea

$$\bar{V} = (\bar{i}\,\bar{V})\,\bar{i} + (\bar{j}\,\bar{V})\,\bar{j} + (\bar{k}\,\bar{V})\,\bar{k};$$

din cazul triedrului ortogonal, neconţinând decât vectorii fundamentali $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Facem în treacăt observaţia că formula (118, III) rezolvă şi sistemul de ecuaţii vectoriale

$$\bar{u}\,\bar{V} = \alpha; \quad \bar{v}\,\bar{V} = \beta; \quad \bar{w}\,\bar{V} = \gamma$$

unde α, β, γ sunt scalari cunoscuţi, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, vectori liniar independenţi iar $\bar{V}$ este vectorul necunoscut, adică *problema de a determina un vector prin produsele sale scalare cu vectorii fundamentali*. Nu vom spune „prin proiecţiile sale ortogonale pe cele trei axe oblice", deoarece nu presupunem că măsurăm distanţele pe aceste axe cu aceleaşi unităţi. In cazul când facem această ipoteză, putem pune problema şi sub acest aspect. Este evident că aceeaşi expresie (118, III) ne dă şi componentele lui $\bar{V}$ în raport cu triedrul reciproc $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$ dacă accentuăm pe $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

§ 97. Baze reciproce în spaţiul metric euclidian

Prezenţa vectorilor reciproci $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$ în expresia unui vector $\bar{V}$, raportat la triedrul fundamental $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, nu este datorită unui simplu artificiu de notaţie. Faptul că acelaşi vector $\bar{V}$, raportat la triedrul reciproc $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$, apare sub forma

$$\bar{V} = (\bar{u}\,\bar{V})\,\bar{u}' + (\bar{v}\,\bar{V})\,\bar{v}' + (\bar{w}\,\bar{V})\,\bar{w}' \qquad (119, III)$$

scoate în evidenţă existenţa a două aspecte conjugate ale noţiunii de vector, care nu apar decât când se utilizează sistemul de referinţă cartezian general.

Scanned with OKEN Scanner

Metodele vectoriale, prin însăşi natura lor, dacă sunt aplicate corect, adică mărimilor vectoriale şi scalare şi — prin extensiune — mărimilor bivectoriale şi trivectoriale, nu introduc în formule decât mărimi strict legate de problemele tratate.

Reciprocitatea între expresiile (116, III) şi (119, III) ale aceluiaşi vector ne conduce la necesitatea de a asocia cele două triedre în măsura vectorilor şi *de a privi totdeauna vectorul sub cele două aspecte, care rezultă din măsura sa faţă de cele două triedre reciproce.*

Este însă esenţial să observăm că definiţia triedrului reciproc presupune noţiunea de unghi drept, deci existenţa unei măsuri pentru unghiuri, adică introducerea noţiunii de distanţă.

Prin urmare, *deşi utilizăm axe oblice, ne găsim în Geometria metrică*, în care produsul scalar ne pune la dispoziţie expresia distanţei şi a unghiurilor.

Cu această observaţie, vom numi reciproce sistemele de referinţă definite de vectorii $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ liniar independenţi şi $\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}'$, care rezultă deasemenea că sunt liniar independenţi şi vom spune că $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ şi $(\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}')$ formează două *baze reciproce în spaţiul metric euclidian.*

Orice vector $\overline{V}$ va fi măsurat în ambele baze, deci fiecare mărime vectorială va fi măsurată în cele două sisteme reciproce de unităţi.

Intre aceste două sisteme reciproce există relaţii strânse: unul determină pe celălalt.

In aplicaţii, vectorii apar sub unul din cele două aspecte rezultând din acest dublu mod de măsură: sub aspectul care corespunde semnificaţiei lor geometrice sau fizice.

Vom adopta o notaţie mai perfecţionată, deoarece simetria formulelor conduce la mijloace de calcul rapide şi adesea permite nu numai interpretarea rezultatelor, dar şi obţinerea lor prin mijloace simple.

Vom spune că bazele

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \quad \text{şi} \quad \overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3$$

formate cu două serii de vectori, pe care le deosebim prin plasarea indicilor jos sau sus, sunt *reciproce*, dacă îndeplinesc următoarele nouă condiţii:

$$\begin{array}{lll} \overline{e}_1\overline{e}^1=1; & \overline{e}_1\overline{e}^2=0; & \overline{e}_1\overline{e}^3=0; \\ \overline{e}_2\overline{e}^1=0; & \overline{e}_2\overline{e}^2=1; & \overline{e}_2\overline{e}^3=0; \\ \overline{e}_3\overline{e}^1=0; & \overline{e}_3\overline{e}^2=0; & \overline{e}_3\overline{e}^3=1; \end{array} \quad (\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3\neq 0). \qquad (120, III).$$

Aceste condiţii sunt cele care caracterizează vectorii reciproci (59, II). Deducem deci: $\overline{e}^1\overline{e}^2\overline{e}^3\neq 0$ şi *obţinem două triedre reciproce.* Avem, prin urmare, următorul rezultat:

Două baze de vectori reciproce în spaţiul metric euclidian sunt formate de două triedre reciproce oarecare.

Să introducem un simbol δ_i^j, care ia valorile 0 sau 1, punând

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i\neq j, \\ 1 & \text{dacă } i=j \end{cases} \quad (i, j=1,2,3) \qquad (121, III),$$

şi numindu-l *simbolul lui Kronecker.*

Scanned with OKEN Scanner

Vom putea atunci scrie condiţiile (120,III) condensate într'una singură, astfel:

$$\bar{e}_i \bar{e}^j = \delta_i^j; \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{122,III}$$

Vom avea:

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}; \quad \bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3}; \quad \bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3};$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}^2 \times \bar{e}^3}{\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3}; \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}^3 \times \bar{e}^1}{\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3}; \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{e}^1 \times \bar{e}^2}{\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3}; \tag{123,III}$$

$$[\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3][\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3] = 1.$$

Este uşor de verificat relaţia:

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}^1 + \bar{e}_2 \times \bar{e}^2 + \bar{e}_3 \times \bar{e}^3 = 0. \tag{124,III}$$

Dacă o bază coincide cu reciproca sa, ea este formată din trei versori ortogonali.

Vom avea $\bar{e}^i = \bar{e}_i$ şi condiţiile (122,III) vor deveni

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij};$$

astfel, pentru $i = j$ vom avea $e_i^2 = 1$, iar pentru $i \neq j$ vom avea $\bar{e}_i \bar{e}_j = 0$. deci versorii vor fi doi câte doi ortogonali.

Fiind dat un vector $\overline{V}$, să notăm cu V^1; V^2, V^3 componentele sale faţă de baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ şi cu V_1, V_2, V_3 componentele sale faţă de baza $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, prin urmare *vom plasa indicii invers faţă de cei ai bazelor respective.* Vom scrie deci

$$\overline{V} = V^1 \bar{e}_1 + V^2 \bar{e}_2 + V^3 \bar{e}_3 = V_1 \bar{e}^1 + V_2 \bar{e}^2 + V_3 \bar{e}^3. \tag{125,III}$$

Inmulţind cu $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, apoi cu $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, deducem expresiile componentelor, pe care le putem scrie:

$$V^i = \bar{e}^i \overline{V}; \quad V_i = \bar{e}_i \overline{V}; \quad (i = 1, 2, 3). \tag{126,III}$$

Cele două feluri de componente se formează cu ajutorul bazei reciproce bazei respective şi poartă indicii bazei reciproce. Astfel V^1, se obţine prin produsul scalar $\bar{e}^1 \overline{V}$, în care factorul $\bar{e}^1$ face parte din baza $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, reciprocă bazei $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ faţă de care este calculat V^1.

Componentele V^1, V^2, V^3, purtând indicii sus, se vor numi *contravariante*, iar componentele V_1, V_2, V_3, cu indicii jos, se vor numi *covariante*.

Orice vector are componente contravariante şi covariante în cele două baze reciproce.

Cunoscând componentele într'una din baze, vectorul este determinat în ambele baze reciproce.

Acelaşi vector se va nota $\overline{V}(V^1, V^2, V^3)$ sau $\overline{V}(V_1, V_2, V_3)$ punând în evidenţă componentele contravariante sau covariante, după semnificaţia mărimii pe care o reprezintă. In sfârşit, vom nota:

$$E = [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3]; \quad E^{-1} = [\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3]; \tag{127,III}$$

ţinând seama de relaţia între produsele mixte respective.

Scanned with OKEN Scanner

§ 98. Expresii vectoriale raportate la baze reciproce

Operaţiile Algebrei liniare vectoriale, adunarea şi înmulţirea cu factori scalari, se exprimă la fel cu ajutorul celor două serii de componente. Astfel

$$\lambda\overline{U}+\mu\overline{V}=(\lambda U^1+\mu V^1)\,\overline{e}_1+(\lambda U^2+\mu V^2)\,\overline{e}_2+(\lambda U^3+\mu V^3)\,\overline{e}_3=$$
$$=(\lambda U_1+\mu V_1)\,\overline{e}^1+(\lambda U_2+\mu V_2)\,\overline{e}^2+(\lambda U_3+\mu V_3)\,\overline{e}^3.$$

Produsul scalar a doi vectori $\overline{U}$ şi $\overline{V}$ poate fi definit prin una din formulele următoare:

$$\overline{U}\,\overline{V}=\begin{cases}(U^1\overline{e}_1+U^2\overline{e}_2+U^3\overline{e}_3)\,(V^1\overline{e}_1+V^2\overline{e}_2+V^3\overline{e}_3);\\ (U^1\overline{e}_1+U^2\overline{e}_2+U^3\overline{e}_3)\,(V_1\overline{e}^1+V_2\overline{e}^2+V_3\overline{e}^3);\\ (U_1\overline{e}^1+U_2\overline{e}^2+U_3\overline{e}^3)\,(V^1\overline{e}_1+V^2\overline{e}_2+V^3\overline{e}_3);\\ (U_1\overline{e}^1+U_2\overline{e}^2+U_3\overline{e}^3)\,(V_1\overline{e}^1+V_2\overline{e}^2+V_3\overline{e}^3).\end{cases} \qquad (128,III)$$

Este uşor de văzut că *numai cele mijlocii ne permit să găsim o expresie analoagă cu cea scrisă într'un sistem cartezian ortogonal,* pe când cele extreme sunt mai complicate şi conţin produsele scalare ale bazelor.

Ţinând seama de relaţiile fundamentale (122,III) între cele două baze, vom avea:

$$\overline{U}\,\overline{V}=(U^1\overline{e}_1+U^2\overline{e}_2+U^3\overline{e}_3)(V_1\overline{e}^1+V_2\overline{e}^2+V_3\overline{e}^3)=$$
$$=U^1V_1\overline{e}_1\overline{e}^1+\cdots+U^1V_2\overline{e}_1\overline{e}^2+\cdots\quad=$$
$$=U^1V_1+U^2V_2+U^3V_3,$$

Schimbând baza pentru fiecare din cei doi vectori, produsul scalar devine

$$\overline{U}\,\overline{V}=(U_1\overline{e}^1+U_2\overline{e}^2+U_3\overline{e}^3)\,(V^1\overline{e}_1+V^2\overline{e}_2+V^3\overline{e}_3)=$$
$$=U_1V^1\overline{e}^1\overline{e}_1+\cdots+U_1V^2\overline{e}^1\overline{e}_2+\cdots\quad=$$
$$=U_1V^1+U_2V^2+U_3V^3.$$

Prin urmare, vom putea scrie:

$$\overline{U}\,\overline{V}=U^1V_1+U^2V_2+U^3V_3=U_1V^1+U_2V^2+U_3V^3, \qquad (129,III)$$

de unde obţinem rezultatul următor:

Produsul scalar a doi vectori raportaţi, unul la o bază şi celălalt la baza reciprocă, îşi păstrează expresia cunoscută din cazul bazelor ortogonale, însă vectorii vor avea, unul componente contravariante, iar celălalt componente covariante.

Putem cobori indicii superiori şi ridica pe cei inferiori, fără ca expresia obţinută să-şi schimbe valoarea.

Spunem că produsul scalar este *o expresie invariantă* şi vom numi operaţia de mutare a indicilor dela un nivel la altul — *jocul indicilor.*

Scanned with OKEN Scanner

Regulile acestui joc al indicilor, pe care le vom stabili odată cu relaţiile între componentele covariante şi contravariante, permit transformarea expresiilor vectoriale, date prin componente, în expresii echivalente, *fără a mai reveni la baze.*

Prin aceasta, *metoda analitică se desprinde de necesitatea de a raporta în mod explicit vectorii la bazele lor şi conduce la un nou mod de calcul cu mărimi vectoriale şi scalare,* în care mărimele bivectoriale şi trivectoriale intervin prin expresiile proprii şi se încadrează sub formă de cazuri speciale de mărimi numite *tensoriale.*

Nu vom trata complect acest *Calcul tensorial* în cadrul *Calculului vectorial,* deoarece el are structura sa autonomă şi cuprinde chiar metoda analitică a Calculului vectorial ca un caz particular. Vom arăta, însă, etapele trecerii dela Calculul vectorial la cel tensorial, deoarece această trecere se face în mod natural din momentul în care am adoptat definiţia analitică a vectorilor, punând în primul plan expresia lor cu ajutorul bazelor, adică măsura.

Produsul vectorial. Folosind componente contravariante, produsul vectorial sa va scrie

$$\begin{aligned}\bar{U}\times\bar{V}&=(U^1\bar{e}_1+U^2\bar{e}_2+U^3\bar{e}_3)\times(V^1\bar{e}_1+V^2\bar{e}_2+V^3\bar{e}_3)=\\&=(U^1V^2-V^1U^2)(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)+(U^2V^3-V^2U^3)(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)+\\&\quad+(U^3V^1-V^3U^1)(\bar{e}_3\times\bar{e}_1).\end{aligned}$$

Ţinând seama de formulele (123,III), vom putea scrie

$$\bar{e}_1\times\bar{e}_2=E\bar{e}^3;\quad \bar{e}_2\times\bar{e}_3=E\bar{e}^1;\quad \bar{e}_3\times\bar{e}_1=E\bar{e}^2,$$

de unde

$$\bar{U}\times\bar{V}=E\begin{vmatrix}\bar{e}^1 & \bar{e}^2 & \bar{e}^3\\ U^1 & U^2 & U^3\\ V^1 & V^2 & V^3\end{vmatrix}. \qquad (130,III)$$

Folosind componente covariante, se obţine în mod analog expresia

$$\bar{U}\times\bar{V}=E^{-1}\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ U_1 & U_2 & U_3\\ V_1 & V_2 & V_3\end{vmatrix}. \qquad (131,III)$$

Se vede că jocul indicilor permite trecerea dela expresia (130,III) la expresia (131,III) şi invers, produsul vectorial rămânând acelaşi.

Trebue să observăm că această constatare este valabilă chiar pentru expresia vectorului. Pe de altă parte, operaţiile Algebrei vectoriale sunt întrinseci, adică nu depind de modul particular în care am exprimat vectorii. Deaceea, orice expresie, obţinută prin aceste operaţii, va putea fi transformată în alta echivalentă prin jocul indicilor, cu modificări convenabile.

Vom spune că vectorul, ca şi mărimile vectoriale sau scalare, obţinute prin operaţiile Algebrei vectoriale, sunt *mărimi invariante având expresii*

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CE
REGION
317 A Ş I

covariante sau contravariante, după cum utilizăm unele sau altele din componentele lor. *Tuturor mărimilor invariante li se aplică jocul indicilor.* Componentele produsului vectorial se scriu:

$$P^1 = E^{-1}\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix};\quad P^2 = E^{-1}\begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix};\quad P^3 = E^{-1}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \qquad (132,III)$$

în cazul componentelor *contravariante* şi

$$P_1 = E\begin{vmatrix} U^2 & U^3 \\ V^2 & V^3 \end{vmatrix};\quad P_2 = E\begin{vmatrix} U^3 & U^1 \\ V^3 & V^1 \end{vmatrix};\quad P_3 = E\begin{vmatrix} U^1 & U^2 \\ V^1 & V^2 \end{vmatrix} \qquad (133,III)$$

în cazul componentelor *covariante*.

Trebue deci să observăm că obţinem *componente de o specie contrară componentelor vectorilor* $\overline{U}$ *şi* $\overline{V}$, în schimb factorii E şi E^{-1} sunt formaţi cu componentele de aceeaşi specie cu cele căutate pentru produsul vectorial $\overline{P} = \overline{U} \times \overline{V}$.

Formulele (132,III) şi (133,III) se pot scrie condensat

$$P^i = E^{-1}\begin{vmatrix} U_j & U_k \\ V_j & V_k \end{vmatrix};\quad P_i = E\begin{vmatrix} U^j & U^k \\ V^j & V^k \end{vmatrix}, \qquad (134,III)$$

cu convenţia ca indicii i, j, k să formeze o permutare circulară a numerelor 1, 2, 3.

Se vede, deci, că introducerea bazelor reciproce şi a notaţiei cu indicii superiori şi inferiori produce o diferenţiere în expresiile vectoriale scrise cu ajutorul componentelor.

In mod natural se introduce o simetrie în formule şi *fiecare indice joacă un rol în precizarea caracterului componentelor mărimilor obţinute.*

In acelaşi timp, expresiile apar din ce în ce mai condensate permiţând o sinteză a componentelor aceleiaşi mărimi şi deci, posibilitatea de a introduce aceste mărimi în calcule, prin simboluri care exprimă unitatea lor.

Metoda cartezianã utilizează şi ea componente, dar nu le poate strânge la un loc decât cu eforturi suplimentare. De exemplu, în ecuaţia unui plan $ax+by+cz=d$, coeficienţii au toţi semnificaţii geometrice, dar numai când spunem că a, b, c, parametrii directori, definesc un vector normal la plan, înţelegem modul în care ei definesc direcţia planului. Deci, *metoda cartezianã devine sugestivă prin trecerea sa spre Calculul vectorial, iar acesta se adânceşte prin trecerea sa spre Calculul tensorial.*

Produsul mixt. Fiind daţi trei vectori $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$, raportaţi la aceeaşi bază, produsul lor mixt se obţine din (130,III) sau (131,III), înmulţind scalar prima linie a determinantului simbolic cu $\overline{W}$ şi permutând convenabil liniile. Vom avea:

$$\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{W} = E^{-1}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = E\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}. \qquad (135,III)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinând seama de expresiile (126,III) ale componentelor contravariante sau covariante ale vectorilor, din formula (135,III) deducem

$$[\overline{U}\,\overline{V}|\overline{W}]\,[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3]=\begin{vmatrix}\overline{U}\bar{e}_1 & \overline{U}\bar{e}_2 & \overline{U}\bar{e}_3\\ \overline{V}\bar{e}_1 & \overline{V}\bar{e}_2 & \overline{V}\bar{e}_3\\ \overline{W}\bar{e}_1 & \overline{W}\bar{e}_2 & \overline{W}\bar{e}_3\end{vmatrix}$$

regăsind formula ce extinde determinantul lui Gram. O formulă analoagă se obţine cu baza reciprocă $\bar{e}^1\bar{e}^2\bar{e}^3$ ridicând indicii. Formulele găsite sunt generale, fiindcă bazele pot fi oarecare. Din expresiile (135,III) se verifică invarianţa produsului mixt prin jocul indicilor.

Este necesar să observăm că valoarea E nu se poate calcula cu formulele (135,III) decât folosind componentele covariante ale vectorilor bazei $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

Utilizând componentele contravariante, vom avea $\bar{e}_1(1, 0, 0)$, $\bar{e}_2(0, 1, 0)$, $\bar{e}_3(0, 0, 1)$ şi aplicând formulele (135,III), obţinem o identitate.

Produsele mixte $E=[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3]$ şi $E^{-1}=[\bar{e}^1\bar{e}^2\bar{e}^3]$ nu sunt invariante în jocul indicilor decât exprimate unul în funcţie de celălalt prin formulele (135,III), ceeace este explicabil având în vedere semnificaţia lor; fiecare exprimă un volum obţinut pe unul din cele două triedre reciproce.

Toate formulele obţinute se reduc la cele cunoscute în cazul unei baze *autoreciproce*, adică a unei baze formate cu trei versori ortogonali $\bar{e}_1=\bar{i}$, $\bar{e}_2=\bar{j}$, $\bar{e}_3=\bar{k}$.

Este uşor de văzut că $E=\pm 1$, după cum triedrul este drept sau stâng.

Formulele (126,III) arată că

$$V^i=V_i=(\bar{e}^i\overline{V})=(\bar{e}_i\overline{V}),$$

deci, *într'o bază autoreciprocă sau într'un sistem de referinţă cartezian ortogonal componentele contravariante şi covariante coincid.*

Sistemele ortogonale nu pot distinge caracterul covariant de cel contravariant şi vectorii apar sub un singur aspect.

Această observaţie este de o importanţă deosebită pentru studiul fenomenelor fizice şi arată necesitatea de a adopta sisteme de coordonate suficient de generale, pentru a nu pierde printr'o particularizare excesivă unele din caracteristicele mărimilor fizice.

Pentru a da un singur exemplu, este suficient să spunem că forţa se prezintă ca un vector covariant în coordonate generale în ecuaţiile dinamicei analitice, stabilite de Lagrange [1]).

---

[1]) Pentru un sistem material cu legături olonome, unde $q^1, q^2, \ldots, q^n$ sunt coordonatele generalizate ale sistemului, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — componentele rezultantei forţelor exterioare, T — energia cinetică şi t — timpul, ecuaţiile lui Lagrange sunt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^l}-Q_l=0,$$

unde $l=1, 2, \ldots, n$ şi se arată că $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sunt componente covariante.

Scanned with OKEN Scanner

In coordonate carteziene ortogonale, această distincție nu mai este posibilă și forța proporțională cu accelerația apare ca un vector polar.

§ 99. Modulul vectorilor și distanța în coordonate oblice. Metrica spațiului euclidian

Expresia produsului scalar (128,III) ne conduce și la aceea a modulului unui vector. In acest caz însă, utilizarea formulei (129,III) presupune introducerea componentelor de ambele specii ale aceluiași vector.

Dacă voim să găsim o expresie în care intervin numai componente contravariante, vom scrie produsul scalar sub forma:

$$\overline{U}\,\overline{V}=(U^1\overline{e}_1+U^2\overline{e}_2+U^3\overline{e}_3)(V^1\overline{e}_1+V^2\overline{e}_2+V^3\overline{e}_3)=U^1V^1\overline{e}_1\overline{e}_1+\dots+U^1V^2\overline{e}_1\overline{e}_2+\dots$$

Să notăm cu g_{ij} produsele scalare $\overline{e}_i\overline{e}_j$ ale vectorilor bazei, punând deci

$$g_{ij}=\overline{e}_i\overline{e}_j;\quad (i,j=1,2,3). \tag{136,III}$$

Vom avea

$$g_{ij}=g_{ji} \tag{137,III}$$

deci scalarii g_{ij} sunt *simetrici* în indicii i și j.

Expresia produsului scalar se va scrie desvoltat

$$\overline{U}\,\overline{V}=g_{11}U^1V^1+g_{12}U^1V^2+g_{13}U^1V^3+g_{21}U^2V^1+g_{22}U^2V^2+g_{23}U^2V^3+$$
$$+g_{31}U^3V^1+g_{32}U^3V^2+g_{33}U^3V^3 \tag{138,III}$$

sau, sub forma condensată,

$$\overline{U}\,\overline{V}=\sum_{i,j}g_{ij}U^iV^j;\ (i,j=1,2,3). \tag{139,III}$$

Simbolul sumă înseamnă o sumă dublă, în care i și j iau valorile 1,2,3.

Dacă, în particular, luăm $\overline{U}=\overline{V}$, formulele (138,III) și (139,III) ne dau expresia pătratului modulului vectorului $\overline{V}$, adică *norma* lui $\overline{V}$

$$V^2=\sum_{i,j}g_{ij}V^iV^j, \tag{140,III}$$

formulă, care desvoltată, conform cu (138,III), devine:

$$V^2=g_{11}(V^1)^2+g_{22}(V^2)^2+g_{33}(V^3)^2+2g_{12}V^1V^2+2g_{23}V^2V^3+2g_{31}V^3V^1. \tag{141,III}$$

Se vede deci că *pătratul modulului unui vector, raportat la un sistem de referință cartezian oblic, este un polinom omogen de gradul al doilea în* V^1,V^2,V^3, *având coeficienții* g_{ij}.

Un polinom omogen de gradul al doilea se numește *formă patratică*. Prin urmare: *norma unui vector este o formă patratică având ca variabile componentele scalare contravariante.*

Aplicație. Astfel de expresii nu sunt complect noi în Geometrie. Este suficient să ne amintim relațiile metrice într'un triunghi oarecare, unde avem (fig. 95)

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerând doi versori $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC, vom putea pune

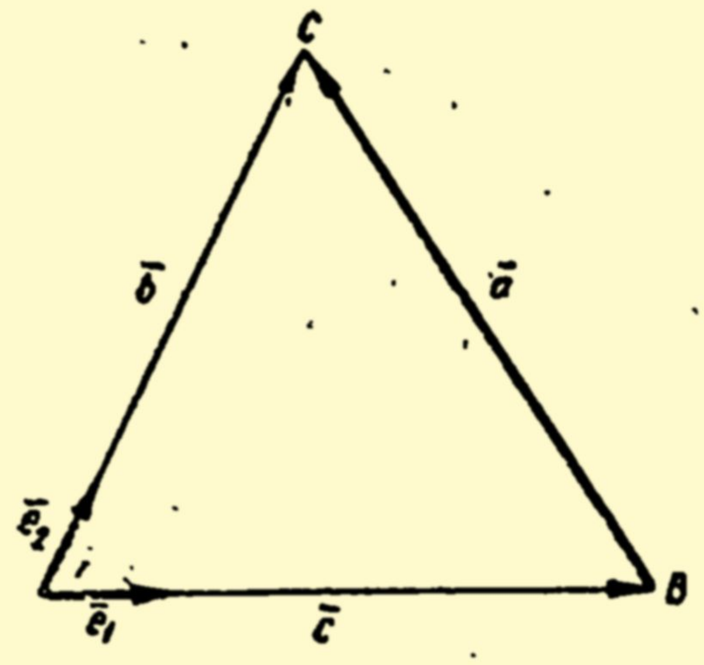


Fig. 95

$$\overline{AB} = \bar{c}; \quad \overline{BC} = \bar{a}; \quad \overline{CA} = \bar{b};$$

$$\bar{c} = c\bar{e}_1; \quad \bar{b} = b\bar{e}_2,$$

de unde

$$\bar{a} = \bar{b} - \bar{c} = b\bar{e}_2 - c\bar{e}_1,$$

deci, ridicând la pătrat

$$a^2 = c^2\bar{e}_1^2 + b^2\bar{e}_2^2 - 2bc\bar{e}_1\bar{e}_2 =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Punând

$$g_{11} = \bar{e}_1^2; \quad g_{12} = \bar{e}_1\bar{e}_2; \quad g_{22} = \bar{e}_2^2,$$

expresia lui a^2 devine

$$a^2 = g_{11}c^2 + g_{22}b^2 - 2g_{12}bc$$

şi reprezintă o formă patratică în componentele b, c ale vectorului $\bar{a}$. Ea diferă puţin de formula cunoscută, deoarece n'am ţinut seama explicit de faptul că $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$ sunt versori.

In cazul sistemelor carteziene ortogonale, expresia

$$V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

reprezintă o formă pătratică particulară, în care avem

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1; \quad g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$$

şi la care ajungem uşor, dacă presupunem baza $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ortogonală şi formată de trei versori, folosind formulele de definiţie (136,III). Formula (141,III) se scrie în acest caz:

$$V^2 = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2$$

şi este echivalentă cu $X^2 + Y^2 + Z^2$.

Dacă alegem ca vector $\bar{V}$ vectorul de poziţie al unui punct oarecare M, vom pune

$$\bar{r} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3,$$

notând cu x^1, x^2, x^3 coordonatele carteziene oblice ale lui M faţă de sistemul $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Facem deci observaţia că vectorul de poziţie are componentele contravariante egale cu coordonatele punctului sau, invers, *componentele contravariante ale unui vector pot fi asimilate cu coordonatele unui punct din spaţiu.*

Norma vectorului de poziţe, reprezentând pătratul distanţei dela un punct la origine, are expresia:

$$r^2 = g_{11}x^1x^1 + g_{22}x^2x^2 + g_{33}x^3x^3 + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{31}x^3x^1, \qquad (142,III)$$

In general, distanţa între două puncte M şi N se poate scrie

$$\overline{MN}^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j), \qquad (143,III)$$

$\rho = y^1\bar{e}_1 + y^2\bar{e}_2 + y^3\bar{e}_3$ fiind vectorul de poziţie al lui N.

Scanned with OKEN Scanner

Notaţia coordonatelor cu indici superiori are o mare importanţă în teoriile geometrice şi fizice, în care se disting caracterele covariant şi contravariant. Ea este însă nepractică în aplicaţiile cu date numerice, pentru care este preferabil să se întrebuinţeze notaţia x,y,z.

Forma pătratică (140,III) se numeşte *metrica spaţiului euclidian* în sistemul de referinţă oblic ales sau *forma fundamentală.*

Din cauza că această formă reprezintă pătratul unei cantităţi reale, ea este pozitivă şi nu-şi poate schimba semnul. Ea se anulează numai pentru $\bar{V}=\bar{0}$, deci pentru $V^1=V^2=V^3=0$.

Se spune despre o formă pătratică, al cărei semn este acelaşi pentru orice valori ale variabilelor, că este *definită.* Dacă acest semn este plus, forma este *pozitiv definită.*

Forma fundamentală sau metrica spaţiului euclidian este o formă pătratică pozitiv definită.

§ 100. Notaţia tensorială

Introducerea notaţiei cu indici superiori şi inferiori aduce o mare simplificare în formulele generale prin economia de simboluri literale şi prin ordinea pe care o pune în lumină în structura acestor formule.

In acelaşi timp, plasarea unui indice într'o poziţie este semnul unui anumit caracter, covariant sau contravariant, al mărimii respective.

Perfecţionarea calculului cu aceste notaţii conduce la metode de demonstraţie rapide şi pline de semnificaţii fizice. Deaceea, este necesar să examinăm elementele, care introduc simetrie în formule şi să sistematizăm jocul indicilor, prin care se face trecerea dela un aspect la aspectul reciproc al aceleiaşi mărimi.

Vom face observaţia că în toate formulele, în care intervin sume, avem indici de ambele specii ca în expresia (125,III) a vectorului, în expresia produselor scalare (128,III) etc.

Dacă însumarea se face în raport cu un indice, care ia valorile 1, 2, 3, acesta se găseşte în fiecare termen al sumei, odată jos şi odată sus, astfel încât scriind suma condensat, ea se prezintă sub formele

$$\bar{V}=\sum_i V^i\bar{e}_i=\sum_i V_i\bar{e}^i.$$

Prin urmare, prin însăşi prezenţa aceluiaşi indice, odată jos şi odată sus în acelaşi termen, însumarea este indicată. Ar mai rămâne totuşi ceva arbitrar, valorile luate de indice, dar este uşor de înţeles că date fiind semnificaţiile expresiilor vectoriale, aceşti indici vor lua în spaţiu valorile 1, 2, 3.

Ţinând seama de aceste observaţii, scrierea simbolului $\sum$ devine inutilă, astfel încât vom putea scrie

$$\bar{V}=\begin{cases} V^1\bar{e}_1+V^2\bar{e}_2+V^3\bar{e}_3=V^i\bar{e}_i; \\ V_1\bar{e}^1+V_2\bar{e}^2+V_3\bar{e}^3=V_i\bar{e}^i. \end{cases} \qquad (144,III)$$

Această convenţie de scriere a fost introdusă de Einstein în Calculul tensorial, instrument matematic de bază al *Teoriei relativităţii.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicele i, care parcurge şirul $1, 2, 3$, nu apare în rezultatul final, după cum se vede din expresiile unde $\overline{V}$ nu are niciun indice. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru produsul scalar (129,III), care se scrie

$$\overline{U}\,\overline{V}=U^iV_i=U_iV^i=U^1V_1+U^2V_2+U^3V_3=U_1V^1+U_2V^2+U_3V^3. \quad (145,III)$$

Un astfel de indice, care se însumează şi dispare, poartă numele de *indice mut*.

Orice indice mut poate fi înlocuit cu altă literă, fără ca formula să sufere vreo modificare. Astfel, produsul scalar (145,III) se poate scrie

$$\overline{U}\,\overline{V}=U^kV_k=U_lV^l.$$

Uneori este necesar să schimbăm numele unui indice mut, pentru a nu-l regăsi de două ori în acelaşi termen, ceeace ar însemna o obligaţie de însumare prin aceleaşi valori pentru amândoi.

Inafară de indicii muţi, mai apar şi *indici, care nu se însumează, ci precizează natura unei componente.*

Astfel de indici găsim în formulele (126,III). Un indice, care intervine în termenii unei formule şi nu se însumează, se numeşte *indice fix.*

Orice indice fix se găseşte la acelaşi nivel în ambii membri ai formulei şi stabileşte caracterul covariant sau contravariant al termenilor.

Astfel, în formulele (126,III) indicele fix i este, fie sus, fie jos, în ambii membri şi arată contravarianţa, respectiv covarianţa componentelor.

Este instructiv să explicităm formulele (134,III) ale produsului vectorial scriind

$$P^l=E^{-1}\begin{vmatrix} U_j & U_k \\ V_j & V_k \end{vmatrix}=[\overline{e}^1\overline{e}^2\overline{e}^3](U_jV_k-V_jU_k).$$

Acestea par să intre în contradicţie cu definiţiile date indicilor şi cu observaţiile făcute. In adevăr, în membrul întâi avem indicele i contravariant, iar în membrul al doilea indicii j, k ficşi, dar covarianţi, alături de indicii $1, 2, 3$ contravarianţi din $[\overline{e}^1\overline{e}^2\overline{e}^3]$. Dacă, însă, observăm că j şi k sunt valorile rămase din şirul $1, 2, 3$ după ce am extras pe i, ne dăm seama că ele se găsesc printre indicii $1, 2, 3$ ai produsului mixt $[\overline{e}^1\overline{e}^2\overline{e}^3]$, deci putem considera de fapt membrul al doilea ca o sumă redusă la un singur termen. Formulele (132,III) şi (133,III) arată aceasta mai clar, deoarece putem scrie

$$P^1=[\overline{e}^1\overline{e}^2\overline{e}^3](U_2V_3-V_2U_3) \quad \text{sau} \quad P_2=[\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3](U^3V^1-U^3V^1) \text{ etc.}$$

Deci, indicii $2, 3$ în primul caz şi $3, 1$ în al doilea se găsesc odată jos şi odată sus. Ei sunt *indici muţi*, dar suma nu are decât un singur termen, fiindcă nu există decât un singur mod în care putem lua doi indici consecutivi din şirul $1, 2, 3$, după ce am fixat unul dintre ei. Se observă, dealtfel, că indicele 1, care este contravariant, există doar odată în P^1 şi în $[\overline{e}^1\overline{e}^2\overline{e}^3]$ la acelaşi nivel.

Prin urmare, formulele produsului vectorial nu contrazic definiţiile adoptate, dar trebúe interpretate în lumina acestora.

O explicaţie mai profundă a acestei aparente contradicţii se poate da gândindu-ne că reducerea sumelor la un singur termen este datorită imposibilităţii de a alege mai mulţi termeni din şirul $1, 2, 3$, după ce am extras două.

Scanned with OKEN Scanner

cifre, deci faptului că ne găsim în spaţiul cu trei dimensiuni. Intr'un spaţiu cu mai multe dimensiuni, produsul vectorial nu ar mai da naştere la aceste dificultăţi.

In acelaşi timp, aceleaşi formule (134,III) ne arată că vectorul $\{P^l\}$ nu apare direct ca vector contravariant, ci provine dintr'o înmulţire de produse mixte cu o mărime având indici covarianţi, Această mărime, de componente $U_j V_k - V_j U_k$ este, după cum am mai arătat, bivectorul $(\overline{U}, \overline{V})$, pentru care $\overline{P}$ este vectorul reprezentativ.

In fond, mărimea fundamentală este bivectorul, din care produsul vectorial, ca vector reprezentativ, provine printr'o operaţie geometrică.

Construcţia prin care se obţine produsul vectorial din bivector, ridicând pe planul său orientat un vector perpendicular, de modul şi orientare determinate, se traduce analitic prin formulele (134,III)

Discuţia, căreia i-au dat naştere aceste formule, ne arată puterea discriminatorie a notaţiei tensoriale cu indici superiori şi inferiori, cu deosebirea dintre indicii muţi şi fixi şi cu jocul indicilor.

Noţiunea de produs vectorial nu a fost înţeleasă corect decât după utilizarea sa în coordonate oblice şi după introducerea noţiunii de spaţiu cu mai multe dimensiuni în aplicaţiile mecanice şi fizice.

Ea era afectată de două erori structurale, din care una îndreaptă pe cealaltă. In adevăr, în statica plană momentul este definit ca un număr, produsul dintre forţă şi distanţa dela un punct la suportul forţei. Noţiunea astfel introdusă este sugerată de forţele paralele şi, în particular, de cupluri. Ea foloseşte perfect atâta vreme cât uităm că fenomenele se petrec în spaţiu unde, dealtfel, se găseşfe şi planul considerat.

Pentru trecerea la fenomene spaţiale de echilibru, momentul static scalar devine inutilizabil, din care cauză este înlocuit cu produsul vectorial, considerat ca un vector, ale cărui componente ne redau momentele statice pe cele trei plane de proiecţie şi deci acordul noţiunii iniţiale cu cea extinsă este stabilit.

Alte fenomene însă, în care produsul vectorial se impune în mod natural, pun în evidenţă bivectorul, aşa cum am arătat (§ 44) şi ne conduc la concluzia că produsul vectorial este în realitate numai un reprezentant geometric al unei mărimi fizice. mai complexă decât mărimea vectorială.

Totuşi, deoarece acest reprezentant se substitue perfect în toate calculele noţiunii pe care o reprezintă, suntem în permanenţă dispuşi să uităm care este realitatea fizico-geometrică. Este nevoie de noi nepotriviri pentru a adânci sensul noţiunilor şi acestea se prezintă imediat, cum am văzut mai sus, dacă adoptăm sistemele de referinţă carteziene generale.

Calculul vectorial, cu toate calităţile sale de exprimare rapidă şi condensată a unor operaţii geometrice-fizice, poate fi un instrument neprecis, dacă este înţeles superficial.

El nu este complect autonom, şi mai ales, nu este delimitat prin operaţii, care se efectuează pe anumite mărimi şi conduc la mărimi de aceeaşi natură.

Produsul vectorial ne scoate dela început din cadrul mărimilor scalare şi vectoriale, astfel încât numai conştiinţa permanentă că operând cu vectori introducem în raţionamente şi mărimi bivectoriale, sau trivectoriale, ne permite o înţelegere corectă, mai bine zis mai corectă, a fenomenelor.

Scanned with OKEN Scanner

Notaţia tensorială în Calculul vectorial este un mijloc de control al operaţiilor şi un detector al caracterului fizic al diverselor mărimi, care apar în calcule,

Utilizarea sistemelor de referinţă generale într'o expunere destinată aplicaţiilor fizice şi tehnice nu este o subtilitate matematică. Ea rezultă din necesitatea de a face pe ingineri şi fizicieni să înţeleagă dela început forţa considerabilă pe care o are operaţia de măsură în cercetarea fenomenelor fizice şi apoi în folosirea lor în viaţa practică.

Pentru ca o măsură să exprime un adevăr ştiinţific, ea trebue, însă, să fie independentă de factori prea particulari şi prea locali. Compararea măsurilor conduce la expresiile lor, valabile în condiţii de generalitate, absolut necesare ştiinţei şi tehnicei.

Ori, pentru comparare este indispensabil să se adopte cadrul general pentru a nu pierde tocmai caracteristicile comune tuturor măsurătorilor prin trecerea unui detaliu pe un plan principal.

Sistemele carteziene generale ne arată adevărata semnificaţie a multor noţiuni, privite anterior dintr'un punct de vedere prea strâmt.

Un nou exemplu instructiv este acela al produsului mixt. In coordonate carteziene ortogonale, el se prezintă ca un determinant şi în consecinţă îşi schimbă semnul odată cu permutarea a două linii, arătând că nu poate fi un adevărat scalar, ci un pseudo-scalar.

In coordonate carteziene oblice, cu noţiunea tensorială, vom serie conform cu (135,III)

$$\overline{U\,V\,W}=[\bar{e}^1\,\bar{e}^2\,\bar{e}^3]\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=[\bar{e}_1\,\bar{e}_2\,\bar{e}_3]\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

şi vom observa că indicii 1, 2, 3, sunt toţi muţi, suma triplă reducându-se la un singur termen.

Se vede că, dacă am utilizat un spaţiu cu patru dimensiuni, am obţinut mai multe componente corespunzând alegerii a trei din numerele 1, 2, 3, 4. Deci, este vorba de o mărime cu mai multe componente, care numai în spaţiul cu trei dimensiuni se reduc la una singură şi, în consecinţă nu poate fi vorba de o mărime scalară.

Produsul mixt este un pseudo-scalar în spaţiul cu trei dimensiuni, tot aşa cum momentul static este un pseudo-scalar în plan. Folosirea notaţiei tensoriale ne serveşte în cazul său pentru a descoperi faptul că este o mărime, care apare sub un aspect restrâns în spaţiul cu trei dimensiuni, fără a recurge la introducerea spaţiului cu patru dimensiuni.

§ 101. Geometria analitică şi notaţia tensorială: vectorul covariant

In cursurile de Geometrie analitică se evită adesea folosirea sistemelor de coordonate carteziene oblice în problemele metrice, deoarece expresiile sunt complicate şi greu de stabilit.

Metodele vectoriale permit obţinerea rapidă a acestor expresii, iar utilizarea notaţiei tensoriale conduce la formule simple, uşor de reţinut şi aplicat.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. *Distanţa între două puncte,* dată de formula (142,III), se poate scrie condensat

$$d = \sqrt{g_{ij}\,(y^i - x^i)\,(y^j - x^j)}, \qquad (146,III)$$

suprimând semnul Σ.

Unghiul a două direcţii exprimate prin doi vectori $\bar{u}, \bar{v}$ este dat de formula

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\bar{v}}{uv} = \frac{g_{ij}\,v^i v^j}{\sqrt{g_{ij}\,u^i u^j}\,\sqrt{g_{ij}\,v^i v^j}}, \qquad (147,III)$$

folosind formula (139,III).

Vedem deci că măsura distanţelor şi unghiurilor în coordonate oblice este posibilă prin cunoaşterea cooficienţilor g_{ij}, adică prin cunoaşterea formei fundamentale. Deaceea, această formă (140,III) a fost numită *metrica spaţiului*.

In cazul coordonatelor carteziene ortogonale, metrica se reduce la o sumă de trei pătrate: $X^2+Y^2+Z^2$.

Se pune atunci problema următoare: *Dacă se dă o formă patratică* $g_{ij}\,u^i u^j$, *putem considera această formă ca metrica spaţiului într'un sistem de coordonate carteziene?*

In caz, afirmativ triedrul fundamental respectiv $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ va fi determinat prin ecuaţiile vectoriale

$$\bar{e}_i\,\bar{e}_j = g_{ij}$$

în număr de şase, în care membrii ai doilea sunt cunoscuţi,

Dacă alegem un alt triedru, de data aceasta ortogonal, norma vectorului va fi dată de suma de pătrate $X^2+Y^2+Z^2$.

Prin urmare, folosind o schimbare convenabilă de sistem de referinţă, putem face ca metrica $g_{ij}\,u^i u^j$ să devină o sumă de patrate.

Nu vom rezolva problema pusă aici, dar vom observa că *studiul formelor pătratice şi al schimbărilor de sisteme de referinţă sunt legate între ele şi legate de problemele cele mai esenţiale ale măsurii în spaţiu, deci de însăşi structura geometrică a spaţiului metric euclidian.*

Exemplul 2. Ecuaţia unui plan, a cărui direcţie este cunoscută prin normala sa $\bar{n}$, este $\bar{n}\,\bar{r} = d$ sub forma normală.

Dacă notăm

$$\bar{n} = n^1\,\bar{e}_1 + n^2\,\bar{e}_2 + n^3\,\bar{e}_3 = n_1\,\bar{e}^1 + n_2\,\bar{e}^2 + n_3\,\bar{e}^3,$$

$$\bar{r} = x^1\,\bar{e}_1 + x^2\,\bar{e}_2 + x^3\,\bar{e}_3,$$

vom obţine ecuaţia

$$\bar{n}\,\bar{r} = \sum_i n^i\,\bar{e}_i \sum_j x^j\,\bar{e}_j = \sum_{ij} n^i x^j\,\bar{e}_i\,\bar{e}_j = \sum_{ij} g_{ij}\,n^i x^j = d,$$

dacă folosim componentele contravariante, sau ecuaţia

$$\bar{n}\,\bar{r} = \sum_i n_i\,\bar{e}^i \sum_j x^j\,\bar{e}_j = \sum_{ij} n_i\,x^j\,\bar{e}^i\,\bar{e}_j = d,$$

dacă folosim componentele covariante pentru $\bar{n}$ şi contravariante pentru $\bar{r}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ținând seama de formulele (122,III), ultima ecuație se scrie

$$\sum_{ij} n_i x^j \bar{e}^i \bar{e}_j = \sum_{ij} n_i x^j \delta^i_j = \sum_i n_i x^i = d, \qquad (148,III)$$

deoarece numai când $j=i$ simbolul lui Kronecker este diferit de zero.

Se vede deci că ecuația (148,III), care este analoagă cu cea obținută în coordonate carteziene ortogonale

$$n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 = d,$$

corespunde alegerii componentelor covariante pentru vectorul normal la plan.

Prin urmare, *în ecuația carteziană a planului, normala intervine prin componentele sale covariante,* deci este raportată la triedrul reciproc.

Această proprietate nu poate fi discernată în coordonate carteziene ortogonale, unde cele două triedre se confundă.

Putem da o interpretare simplă componentelor covariante ale normalei, punând ecuația planului sub forma.

$$n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 = 1, \qquad (149,III)$$

ceeace este totdeauna posibil dacă $d \neq 0$, deci dacă planul nu trece prin 0.

Intersectând planul cu axele Ox^1, Ox^2, Ox^3, segmentele $\overline{OP}_1, \overline{OP}_2, \overline{OP}_3$ obținute pe aceste axe vor fi

$$\overline{OP}_1 = \xi^1 = \frac{1}{n_1}; \quad \overline{OP}_2 = \xi^2 = \frac{1}{n_2}; \quad \overline{OP}_3 = \xi^3 = \frac{1}{n_3}; \qquad (150,III)$$

cum se vede luând pentru Ox^1 ecuațiile $x^2=0, x^3=0$, etc.

Prin urmare

$$n_1 = \frac{1}{\xi^1}; \quad n_2 = \frac{1}{\xi^2}; \quad n_3 = \frac{1}{\xi^3}. \qquad (151,III)$$

Pentru planul de ecuație (149,III) *componentele covariante ale normalei sunt inversele segmentelor interceptate pe cele trei axe.*

Cum n_1, n_2, n_3 pot fi trei numere oarecare în sistemul de referință ales, deducem următoarea proprietate:

Orice vector $\bar{n}$, definit prin componentele sale covariante n_1, n_2, n_3, reprezintă un plan de ecuație

$$n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 = 1,$$

raportat la triedrul $Ox^1x^2x^3$ determinat de baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

Acest plan trece prin punctele P_1, P_2, P_3 așezate pe axele triedrului fundamental și având abscisele ξ^1, ξ^2, ξ^3, pe aceste axe, date prin formula (150, III).

El este perpendicular pe vectorul $\bar{n}$, ale cărui componente n_1, n_2, n_3 sunt figurate în baza reciprocă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$.

Direcții de plane. Vectorul $\bar{n}$ (n_1, n_2, n_3) reprezintă în același timp familia tuturor planelor paralele cu planul (149, III), deci poate fi considerat, ca mărimea geometrică asociată tuturor acestor plane.

Să considerăm mulțimea tuturor planelor din spațiu și să o împărțim în clase, punând în aceeași clasă toate planele paralele cu un plan dat $P_1P_2P_3$, care nu trece prin origine.

Scanned with OKEN Scanner

Mulţimea tuturor planelor din spaţiu este un obiect geometric al spaţiului afin, deci şi al spaţiului metric. Vectorul $\overline{n}$, sub aspectul său covariant, determinând o clasă a acestui obiect geometric, va fi mărimea geometrică asociată fiecărei clase.

Mulţimea tuturor planelor paralele cu un plan dat defineşte un obiect geometric, numit *direcţie de plane.*

Vectorul $\overline{n}$, sub aspectul său covariant, este mărimea geometrică asociată unei direcţii de plane şi determină această direcţie.

Pentru a asocia vectorul $\overline{n}$ unei direcţii de plane este suficient să figurăm acest vector faţă de baza reciprocă $\overline{e}^1$, $\overline{e}^2$, $\overline{e}^3$ prin componentele sale şi apoi să ducem un plan perpendicular pe $\overline{n}$, sau să figurăm planul $P_1P_2P_3$, determinat prin punctele de abscise ξ^1, ξ^2, ξ^3.

Invers, fiind dată o direcţie de plane, un plan oarecare din această clasă va determina pe axe trei puncte P_1, P_2, P_3, de abscise ξ^1, ξ^2, ξ^3 nu toate infinite. Vectorul $\overline{n}$ de componente covariante

$$n_1 = \frac{1}{\xi^1}, \quad n_2 = \frac{1}{\xi^2}, \quad n_3 = \frac{1}{\xi^3}$$

va fi mărimea asociată acestei direcţii de plane. Trebue, însă, să observăm că vectorul, astfel definit, nu este complect determinat, deoarece planul $P_1P_2P_3$ nu este unic, iar abscisele ξ^1, ξ^2, ξ^3 pot fi proporţionale cu un factor oarecare.

Se vede deci că *unei direcţii de plane îi corespund, nu un singur vector $\overline{n}$, ci toţi vectorii $\lambda\overline{n}$.*

Dacă segmentele ξ^1, ξ^2, ξ^3 ar fi unic determinate, asociaţia ar fi biunivocă.

Totuşi, din observaţiile făcute rezultă că aceluiaşi vector $\overline{n}$ îi corespund două interpretări geometrice, după cum este considerat sub aspect contravariant sau covariant.

Vectorul covariant. In cele ce urmează vom folosi termenul de *vector contravariant* pentru vectorul considerat prin componentele sale contravariante şi termenul de *vector covariant* pentru un vector considerat prin componentele sale covariante.

Asocierea vectorului covariant $\overline{n}$ planului $P_1P_2P_3$ este dependentă de originea triedrului de referinţă, iar asocierea aceluiaşi vector unei direcţii de plane nu este biunivocă.

Se vede, deci, că suntem conduşi să dăm vectorilor covarianţi o interpretare geometrică puţin diferită, folosind o pereche de plane, după cum am reprezentat geometric vectorii contravarianţi prin segmente orientate, adică prin perechi de puncte.

Dacă planului (149, III) îi asociem un plan paralel cu el şi trecând prin origine, putem spune că această pereche de plane taie pe axele triedrului fundamental segmentele ξ^1, ξ^2, ξ^3, deci defineşte prin inversele acestor segmente *vectorul normal de componente covariante* (n_1, n_2, n_3) sau vectorul covariant $\overline{n}$.

Invers, vectorul covariant $\overline{n}$ (n_1, n_2, n_3) defineşte această pereche de plane paralele bine determinate.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm însă că printr'o translaţie oarecare această figură rămâne neschimbată şi devine independentă de origina triedrului fundamental.

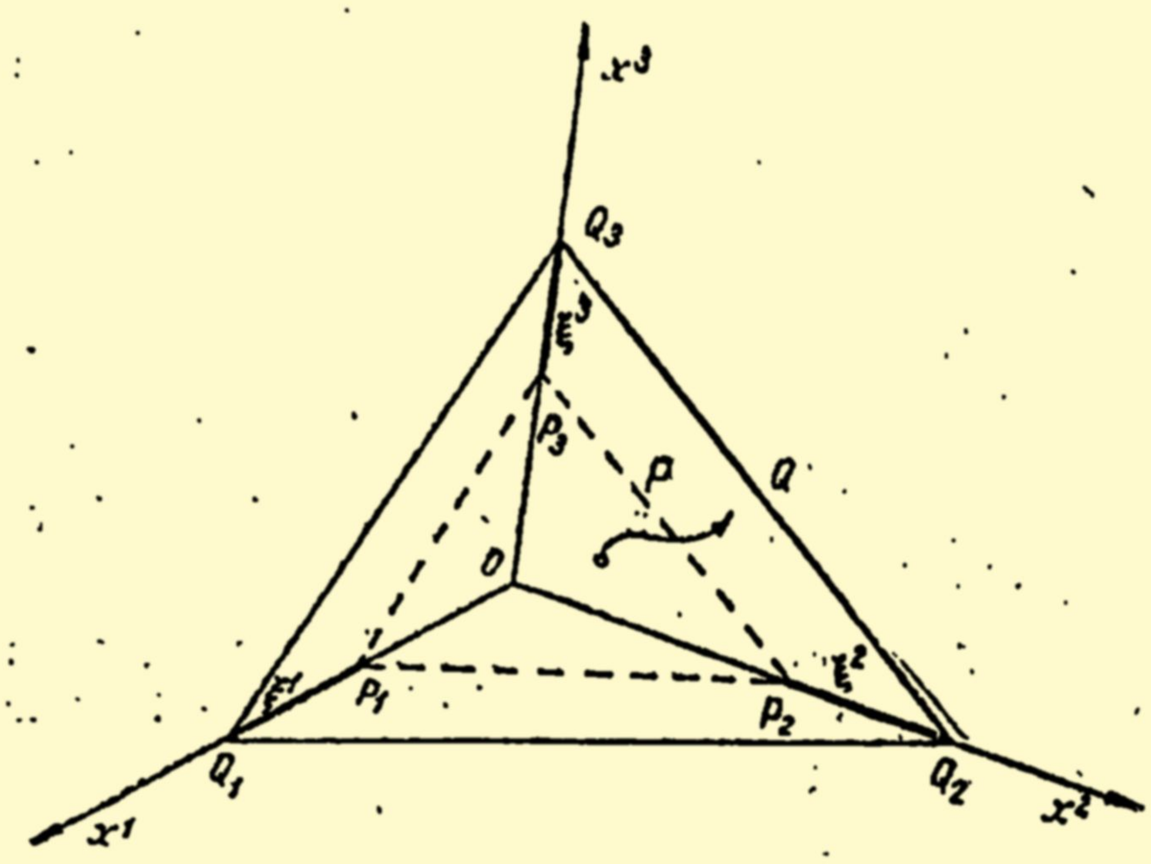


Fig. 96

Putem deci reface observaţiile de mai sus, pornind dela o pereche de plane paralele în care distingem un plan origine P şi un plan extremitate Q (fig. 96). Aceste plane taie axele în punctele P_1, P_2, P_3 şi Q_1, Q_2, Q_3, interceptând trei segmente respectiv:

$$\overline{P_1Q_1}=\xi^1;\quad \overline{P_2Q_2}=\xi^2;$$
$$\overline{P_3Q_3}=\xi^3.$$

Inversele acestor segmente sunt componentele covariante ale unui vector $\bar{n}$ normal la această pereche de plane.

Prin urmare: *Orice vector covariant se reprezintă geometric printr'o pereche orientată de plane paralele* (P, Q).

Clasa tuturor perechilor de plane paralele, dedusă dintr'una dată printr'o translaţie oarecare, defineşte vectorul covariant.

Astfel, regăsim pe o cale inversă, adică pornind dela o mărime geometrică, definită prin componentele sale covariante, obiectul geometric format de mulţimea tuturor perechilor orientate de plane paralele.

Acestui obiect geometric i-am asociat în spaţiul afin mărimea geometrică numită vector covariant, stabilindu-i regulile de adunare şi de amplificare printr'un număr (§ 35).

Prin urmare: *vectorul covariant afin şi vectorul covariant metric reprezintă una şi aceeaşi mărime,*

Singura deosebire dintre ei este că *în geometria metrică vectorul covariant* $\bar{n}$ (n_1, n_2, n_3) *este unul din cele două aspecte ale unei aceleiaşi mărimi—vectorul* şi deci poate fi figurat geometric şi ca un vector contravariant, în speţă ca un vector normal perechii de plane.

In spaţiul afin vectorii covarianţi sunt consideraţi ca mărimi deosebite de vectorii contravarianţi, deoarece sinteza caracterelor contravariant şi covariant nu poate fi făcută independent de bazele $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ şi $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, ca în geometria metrică.

Dualitatea. Reprezentarea geometrică ne arată legătura între cele două aspecte ale mărimilor vectoriale, descoperite prin introducerea sistemelor de referinţă carteziene generale şi precizate prin notaţia tensorială.

Intre punctele şi planele spaţiului cu trei dimensiuni există o relaţie numită *dualitate.* Oricărui punct putem face să-i corespundă un plan, şi invers. Oricărei proprietăţi ale unei figuri formate din puncte îi corespunde o proprietate a unei figuri determinate, formată din plane.

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul, aşa cum a fost introdus iniţial, este o mărime definită printr'o pereche orientată de puncte, deci printr'o figură formată din puncte: cea mai simplă posibilă, excluzând punctul însuşi.

Prin proprietatea de dualitate, acestei figuri trebue să-i corespundă figura formată de o pereche orientată de plane paralele.

Mărimea definită de această figură dual㠄 perechii orientate de puncte este vectorul covariant[1]),

Notaţia tensorială nu este deci un simplu artificiu matematic, comod, prin care formulele se condensează în scriere. Ea conduce la un instrument de cercetare, care permite separarea unor noţiuni fundamentale, ce apar suprapuse, când sunt studiate cu ajutorul unor instrumente prea particulare, cum sunt coordonatele carteziene ortogonale, pentru proprietăţile lor.

Vectorul covariant, iar în spaţiul metric euclidian, mai exact, *aspectul covariant al vectorului*, constitue o dovadă de largile posibilităţi de adâncire a semnificaţiei noţiunilor, când sunt cercetate sistematic într'un cadru general, cum este acela al sistemelor de referinţă oblice.

§ 102. Schimbarea sistemului de referinţă cartezian

Toate noţiunile introduse mai sus au un caracter geometric, fiind independente de alegerea unui anumit sistem de referinţă. Măsura vectorilor, sub ambele aspecte covariant şi contravariant, este o operaţie prin care definim vectorii independent de sistemul întrebuinţat, prin componentele lor. Fiind dată o mărime vectorială, suntem siguri că aceste componente o determină în mod invariant, adică aşa încât, adoptând alt sistem de referinţă, noile componente să ne conducă la aceeaşi mărime ca şi primele.

In aplicaţii, însă, mărimile de orice natură se prezintă prin componentele lor, deoarece provin din operaţii de măsură sau calcule. In acest caz, după cum s'a arătat anterior (§ 78), trebue să descoperim natura mărimii tocmai prin aceste componente. Am văzut, însă, că faptul că o mărime are o componentă unică nu este suficient ca această mărime să fie scalară (exemple: produsul mixt, momentul static etc.), deasemenea nici faptul că o mărime are trei componente nu ne permite să afirmăm că este un vector (exemplu: bivectorul).

Deaceea, este necesar să verificăm modul de schimbare a mărimilor când trecem dela un sistem de referinţă la altul, pentru a putea găsi condiţiile necesare şi suficiente ca o mărime să aibă o anumită natură.

Am făcut această verificare în cazul sistemelor de referinţă ortogonale, deci s'ar părea că voim să repetăm o operaţie din care am tras concluzii. In realitate, aşa cum se va vedea, prin această operaţie vom obţine rezultate mai precise, deoarece introducerea sistemelor generale ne-a condus la o adâncire şi o separare a noţiunilor.

Pornind dela o bază $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, care constitue un triedru propriu, deci pentru care $[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3] \neq 0$, să trecem la o nouă bază $\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$ constituind deasemenea un triedru propriu, deci cu $[\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3] \neq 0$.

---

[1]) Se vede deci că prin dualitate putem asocia şi în spaţiul afin un vector covariant oricărui vector contravariant, dar dualitatea poate fi stabilită într'o infinitate de moduri.

Scanned with OKEN Scanner

Știm că în spațiu orice vector poate fi raportat la baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.
Prin urmare, *noua bază se va exprima liniar în funcție de cea veche prin formule de forma:*

$$\begin{aligned}\bar{e}'_1 &= a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + a_1^3\bar{e}_3;\\ \bar{e}'_2 &= a_2^1\bar{e}_1 + a_2^2\bar{e}_2 + a_2^3\bar{e}_3;\\ \bar{e}'_3 &= a_3^1\bar{e}_1 + a_3^2\bar{e}_2 + a_3^3\bar{e}_3,\end{aligned} \qquad (152, III)$$

unde a_1^1, a_1^2, a_1^3 sunt componentele lui $\bar{e}'_1$ față de triedrul fundamental $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și în general a_i^1, a_i^2, a_i^3 sunt componentele lui $\bar{e}'_i$ $(i=1, 2, 3)$.

Notația aleasă are un indice inferior i, care corespunde indicelui vectorului $\bar{e}'_i$ și un indice superior 1, 2, 3, care ne dă pe rând cele trei componente. Vom considera deci aceste componente *contravariante,* indicele inferior fiind destinat să distingă cei trei vectori $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$ între ei.

Condiția ca acești vectori să fie liniar independenți, deci $[\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3] \neq 0$, se poate scrie imediat

$$[\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3] = [a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + a_1^3\bar{e}_3,\ a_2^1\bar{e}_1 + a_2^2\bar{e}_2 + a_2^3\bar{e}_3,\ a_3^1\bar{e}_1 + a_3^2\bar{e}_2 + a_3^3\bar{e}_3] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} [\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3] \neq 0, \qquad (153, III)$$

de unde

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (154, III)$$

Prin urmare, determinantul coeficienților trebue să fie diferit de zero. Calculul devine inutil, dacă ne raportăm la expresia (135, III) a produsului mixt a trei vectori oarecare. El a fost făcut pentru a da un exemplu de calcul cu indici superiori și inferiori și pentru a regăsi expresia produsului mixt.

Cu condiția $A \neq 0$, dacă aplicăm unui vector oarecare $\bar{V}$ schimbarea bazei, vom avea

$$\bar{V} = V^1\bar{e}_1 + V^2\bar{e}_2 + V^3\bar{e}_3 = V'^1\bar{e}'_1 + V'^2\bar{e}'_2 + V'^3\bar{e}'_3, \qquad (155, III)$$

dacă notăm cu V'^1, V'^2, V'^3 noile componente contravariante față de baza $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$. Substituind în (155,III) expresiile (152,III), vom obține o nouă egalitate

$$\begin{aligned}V = V^1\bar{e}_1 + V^2\bar{e}_2 + V^3\bar{e}_3 &= V'^1(a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + a_1^3\bar{e}_3) + V'^2(a_2^1\bar{e}_1 + a_2^2\bar{e}_2 + a_2^3\bar{e}_3) +\\ + V'^3(a_3^1\bar{e}_1 + a_3^2\bar{e}_2 + a_3^3\bar{e}_3) &= (V'^1a_1^1 + V'^2a_2^1 + V'^3a_3^1)\bar{e}_1 + (V'^1a_1^2 + V'^2a_2^2 + V'^3a_3^2)\bar{e}_2 +\\ &+ (V'^1a_1^3 + V'^2a_2^3 + V'^3a_3^3)\bar{e}_3.\end{aligned}$$

Egalând cele două expresii ale lui $\bar{V}$, raportat la aceeași bază $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, deducem *formulele*

$$\begin{aligned}V^1 &= a_1^1V'^1 + a_2^1V'^2 + a_3^1V'^3;\\ V^2 &= a_1^2V'^1 + a_2^2V'^2 + a_3^2V'^3;\\ V^3 &= a_1^3V'^1 + a_2^3V'^2 + a_3^3V'^3,\end{aligned} \qquad (156, III)$$

Scanned with OKEN Scanner

de transformare a componentelor contravariante ale lui $\overline{V}$. Se observă că tabela coeficienţilor este formată cu elementele determinantului A.

Aceste formule exprimă vechile componente în funcţie de cele noi. Dacă voim să calculăm noile componente în funcţie de cele vechi, este necesar să rezolvăm sistemul (156,III) în raport cu V'^1, V'^2, V'^3, ceeace este posibil, deoarece $A \neq 0$.

Se ştie că soluţiile unui sistem liniar şi neomogen, cum este (156,III) se exprimă prin câtul a doi determinanţi: la numitor intervine A, iar la numărător un determinant, format din A prin înlocuirea succesivă a coloanelor prin elementele din membrii ai doilea.

Astfel:

$$V'^1 = \begin{vmatrix} V^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ V^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ V^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{A} =$$

$$= \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} V^1 + \frac{(-1)}{A}\begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} V^2 + \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} V^3.$$

Constatăm în această formulă apariţia minorilor [1]) elementelor coloanei întâi a lui A, cu semnele respective. Aceşti minori sunt împărţiţi prin A şi apoi înmulţiţi pe rând cu V^1, V^2, V^3.

Vom numi *minor normalizat* sau *redus* al unui element a_j^i al determinantului $A \neq 0$, minorul corespunzător acestui element în desvoltarea determinantului, împărţit prin valoarea determinantului şi-l vom nota A_i^j (*inversare de indici*).

Cu această notaţie, putem scrie expresia lui $V_i'^1$, precum şi analoagele sub forma:

$$\begin{aligned} V'^1 &= A_1^1 V^1 + A_2^1 V^2 + A_3^1 V^3; \\ V'^2 &= A_1^2 V^1 + A_2^2 V^2 + A_3^2 V^3; \\ V'^3 &= A_1^3 V^1 + A_2^3 V^2 + A_3^3 V^3. \end{aligned} \qquad (157,III)$$

Prin urmare, noile componente ale vectorului se exprimă cu elementele tabelei

$$\begin{matrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{matrix}$$

formată cu minorii normalizaţi ai lui A.

Între elementele a_j^i şi minorii lor normalizaţi există relaţiile stabilite prin proprietăţile determinanţilor. Se ştie că sumele formate de produsele elementelor unei linii (sau coloane) cu minorii respectivi au chiar valoarea determinantului, iar aceleaşi sume, dar în care elementele unei linii (sau coloane) sunt înmulţite cu minorii altei linii sau coloane, sunt nule.

---

[1]) Se atrage încă odată atenţia că minorul elementului a_i^j al determinantului A se obţine suprimând linia i şi coloana j, cărora le aparţine elementul considerat şi multiplicând determinantul obţinut cu $(-1)^{i+j}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, determinantul format cu minorii elementelor lui A are valoarea A^2. In acest caz determinantul

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = A^2 \cdot \frac{1}{A^3} = \frac{1}{A} = A^{-1}, \qquad (158,III)$$

deoarece elementele sale sunt minorii lui A, dar împărţiţi fiecare prin A.

Vom avea

$$a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_1^2 + a_3^1 A_1^3 = A \frac{1}{A} = 1, \qquad (159,III)$$

deoarece am înmulţit elementele coloanei întâia a lui A cu minorii acestor elemente, împărţiţi toţi prin A.

Deasemenea, vom putea scrie:

$$a_1^1 A_2^1 + a_2^1 A_2^2 + a_3^1 A_2^3 = 0, \qquad (160,III)$$

deoarece elementele coloanei întâia sunt înmulţite cu minorii elementelor coloanei a doua, împărţiţi cu A.

Formulele (159,III) şi (160,III) se pot generaliza uşor observând că ele conţin un indice mut şi doi indici ficşi, din care unul este inferior şi altul superior. In formula (159,III) indicii ficşi sunt aceiaşi, corespunzând coloanei întâia. Vom putea deci scrie, în general,

$$a_1^i A_i^1 + a_2^i A_i^2 + a_3^i A_i^3 = 1; \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (161.III)$$

pentru cele trei coloane. Se observă că indicele fix arată coloana, atât în $a_{1,}^i$ cât şi în A_i^1, deoarece în minorii normalizaţi, prin însăşi notaţia făcută, indicii sunt inversaţi.

Formula (160,III), generalizată, ne conduce la expresiile:

$$a_1^i A_j^1 + a_2^i A_j^2 + a_3^i A_j^3 = 0; \qquad (i \neq j)\ (i, j = 1,\ 2,\ 3). \qquad (162,III)$$

Vom avea $i \neq j$ pentrucă luăm elementele unei coloane şi minorii normalizaţi ai alteia.

Comparând (161,III) cu (162,III) ne dăm seama că le putem concentra într'o singură formulă, folosind *simbolul lui Kronecker*, astfel:

$$a_1^i A_j^1 + a_2^i A_j^2 + a_3^i A_j^3 = \delta_j^i. \qquad (163,III)$$

Când $i = j$, avem formula (161,III), iar când $i \neq j$, avem formula (162,III).

Dacă în loc de a desvolta determinantul A după elementele unei coloane, foloseam elementele unei linii, am fi obţinut o formulă analoagă, uşor de stabilit, fără niciun calcul, pe baza notaţiei tensoriale.

In adevăr, în formula (163,III) indicele de coloană este cel superior pentru elementele a_1^i, a_2^i, a_3^i (ceeace este de reţinut), pe când indicele de linie este cel inferior.

Acest indice este mut, el circulă efectuând desvoltarea cunoscută a determinantului.

In ceeace priveşte minorii normalizaţi, ei oferă o situaţie inversă prin însăşi notaţia făcută şi nu este nevoie de un efort special de atenţie pentru ei.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă voim să exprimăm desvoltarea după linii, vom face ca indicele fix al elementelor lui A să fie inferior, pe când cel mut să fie superior și vom scrie imediat:

$$a_i^1 A_1^j + a_i^2 A_2^j + a_i^3 A_3^j = \delta_i^j. \qquad (164,III)$$

In sfârșit, formulele (163,III) și (164,III) se pot pune sub forma concentrată, în care suprimăm simbolul sumă și vom avea:

$$a_r^i A_j^r = \delta_j^i; \quad a_i^r A_r^j = \delta_i^j; \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (165,III)$$

Aceste două formule *rezumă toate proprietățile determinanților, legate de desvoltarea lor după minori.*

Ele sunt cheia unui număr mare de consecințe și stau la baza tuturor raționamentelor în care se folosesc sistemele liniare de ecuații.

Ele ne permit trecerea dela o bază veche la una nouă, și invers, exprimând componentele noi și vechi, unele în funcție de celelalte în ambele sensuri.

§ 103. Definiția analitică a vectorilor contravarianți și covarianți

Prin trecerea dela o bază la alta, mărimile fizice își schimbă componentele, dar ele rămân invariante, deoarece nu depind de alegerea bazei.

Această proprietate fundamentală, pe care se bazează posibilitatea de măsurători comparabile între ele și deci, determinarea legilor fizice, servește la identificarea mărimilor prin componentele lor.

In adevăr, *dacă o mărime de o natură necunoscută se prezintă într'un anumit sistem de referință printr'un număr de componente și dacă această mărime este fizică sau geometrică, prin trecerea la o nouă bază, componentele noi trebue să se exprime exclusiv în funcție de cele vechi și de parametrii care fixează noua bază în raport cu cea veche.*

Această proprietate este necesară pentru a asigura independența mărimii considerate față de sistemul de referință.

Dacă aplicăm condiția impusă vectorilor, *suntem nevoiți să facem distincție între componentele contravariante și covariante, din moment ce baza este generală,*

Formulele (152,III) ne dau modul de transformare a bazei, iar (156,III) și (157,III) modul de transformare a componentelor contravariante.

Observăm că transformarea componentelor noi în vechi prin (156,III) se face prin formule analoage cu cele pentru transformarea bazei, pe când transformarea componentelor vechi în noi se face prin formule care conțin minorii normalizați ai elementelor a_j^i. In orice caz, se vede că transformările sunt definite de două tabele

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{matrix} \right\| \quad \text{și} \quad \left\| \begin{matrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{matrix} \right\| \qquad (166,III)$$

formate cu coeficienții a_j^i și minorii lor normalizați din determinantul A, corespunzând trecerii dela baza veche la cea nouă, respectiv dela componentele vechi la cele noi.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste tabele poartă numele de *matrice*. Vom spune că în (166,III) avem două matrice pătrate cu trei linii şi trei coloane.

Transformările, atât ale bazei, cât şi ale componentelor, sunt liniare, deoarece se exprimă prin funcţii liniare de variabilele ce le conţin.

In ceeace priveşte elementele matricelor (166,III), putem spune că ele sunt oarecare, cu condiţia ca $A \neq 0$.

Această condiţie ne permite rezolvarea sistemului (156,III) în raport cu noile componente, pe care de fapt le urmărim. Ea pune în evidenţă o proprietate fundamentală a schimbărilor de baze: *putem trece dela o bază la alta într'un sens sau în celălalt, adică fiecare transformare admite şi o inversă*.

Am observat această proprietate în cazul transformărilor ortogonale (§ 86) şi constatăm că este generală pentru toate schimbările de sistem de referinţă carteziau.

Vom spune că *schimbarea sistemelor de referinţă carteziene se face prin transformări liniare omogene nesingulare, atât ale bazei, cât şi ale componentelor.*

Transformările sunt *omogene* fiindcă formulele conţin numai variabilele vechi şi noi la acelaşi grad (care este gradul întâi, deoarece transformările sunt liniare).

Ele sunt *nesingulare*, fiindcă se pot inversa. Condiţia este ca $A \neq 0$, în care caz transformările sunt *biunivoce*.

Dacă examinăm matricele (166,III), constatăm că elemcntele celei de a doua sunt minorii normalizaţi sau reduşi ai elementelor corespunzătoare din prima; de exemplu, A_2^3 este minorul redus al lui a_3^2 şi este aşezat în locul acestuia, adică în linia a doua şi coloana a treia.

Deasemenea, putem spune că şi elementele primei matrice sunt minorii normalizaţi ai celei de a doua. In adevăr, formulele (165,III) sunt simetrice în raport cu literele mici şi mari, astfel încât putem presupune că pornim dela elementele A_j^i şi căutăm minorii lor reduşi, obţinând astfel a_i^j.

Prin urmare, relaţia între matricele (166,III) este reciprocă; fiecare poate fi considerată ca formată cu minorii normalizaţi ai elementelor celeilalte, aşezaţi în locurile acestor elemente. Deaceea, vom numi *reciproce* aceste matrice.

Două transformări liniare şi omogene, definite prin două matrice reciproce, se numesc *transformări contragrediente.*

Astfel, transformările bazei vechi în cea nouă prin formulele (152,III) este contragredientă transformării componentelor vechi în cele noi prin formulele găsite (157,III).

Scriind aceste transformări condensat sub forma:

$$\bar{e}'_i = a_i^j \bar{e}_j ; \quad V'^i = A_j^i V^j \qquad (167,III)$$

putem observa relaţia de reciprocitate a elemcntelor, deoarece în termenul general apar a_i^j şi A_j^i care sunt reciproci unul altuia, însumaţi după indicele j, care se găseşte sus în a_i^j şi jos în A_j^i. Scrierea condensată ne permite un calcul rapid cu transformările sistemelor de referinţă.

Astfel, *putem uşor găsi formulele de transformare ale bazei reciproce*

$$\bar{e}^1, \ \bar{e}^2, \ \bar{e}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținând seama de expresiile (126,III) ale componentelor contravariante, vom avea

$$V^{\prime i}=(\overline{V}\overline{e}^{\prime i}) \quad \text{și} \quad V^{\prime\prime i}=(V\overline{e}^{\prime i})$$

notând cu $\overline{e}^1$, $\overline{e}^2$, $\overline{e}^3$, respectiv $\overline{e}^{\prime 1}$, $e^{\prime 2}$, $\overline{e}^{\prime 3}$ bazele reciproce, veche și nouă. Din relațiile (126,III) deducem deci

$$(\overline{V}\overline{e}^{\prime i})=A^i_j(\overline{V}\overline{e}^j) \quad \text{sau} \quad (\overline{e}^{\prime i}-A^i_j\overline{e}^j)\,\overline{V}=0$$

pentru orice vector $\overline{V}$, de unde

$$\overline{e}^{\prime i}=A^i_j\overline{e}^j. \qquad (167'\text{III})$$

Baza $\overline{e}^i$, reciprocă bazei $\overline{e}_i$, se transformă prin aceleași formule ca și componentele contravariante $\overline{V}^i$, matricea respectivă fiind reciproca matricei a^j_i.

Pentru a determina transformarea componentelor covariante V_i vom înmulți scalar cu $\overline{V}$ în primele ecuații (167',III) și vom avea cu notația condensată:

$$(\overline{V}\overline{e}'_i)=a^j_i(\overline{V}\overline{e}_j) \quad \text{cu} \quad (\overline{V}\overline{e}_j)=V_j, \quad (\overline{V}\overline{e}'_i)=V'_i,$$

de unde

$$V'_i=a^j_iV_j. \qquad (168,\text{III})$$

Comparând (168,III) cu (167,III) constatăm că avem aceeași transformare pentru baza $\overline{e}_i$ ca și pentru componentele covariante V_i.

Două transformări definite prin aceeași matrice se vor numi *cogrediente*. Din cele ce precedă rezultă că:

Transformările componentelor contravariante V^i ale unui vector $\overline{V}$ sunt cogrediente cu cele ale bazei $\overline{e}^i$ (reciproca lui $\overline{e}_i$) și contragrediente cu cele ale lui $\overline{e}_i$.

Transformările componentelor covariante V_i ale aceluiași vector $\overline{V}$ sunt congrediente cu cele ale bazei $\overline{e}_i$ și contragrediente cu cele ale bazei $\overline{e}^i$.

In rezumat, vom avea:

$$\begin{aligned} &\overline{e}'_i=a^j_i\overline{e}_j; \quad V'_i=a^j_iV_j; \quad V^{\prime i}=A^i_jV^j; \\ &\overline{e}^{\prime i}=A^i_j\overline{e}^j; \quad V^{\prime i}=A^i_jV^j; \quad V'_i=a^j_iV_j. \end{aligned} \qquad (169,\text{III})$$

Se vede că poziția indicelui arată cum se transformă componentele în raport cu transformările bazelor la care sunt raportați vectorii.

Componentele contravariante se transformă contragredient cu baza inițială, iar componentele covariante contragredient cu baza reciprocă.

Natura contravariantă și covariantă apare deci tocmai prin transformările sistemelor de referință. Deaceea vom putea caracteriza un vector prin aceste transformări punând în evidență componentele sale contravariante și covariante.

Vom defini vectorul ca o mărime determinată în raport cu un sistem de referință cartezian prin trei componente.

Vom numi *contravariant* vectorul ale cărui componente V^1, V^2, V^3 se transformă *contragredient* cu baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, deci prin formulele (167,III).

Scanned with OKEN Scanner

Vom numi *covariant* vectorul ale cărui componente V_1, V_2, V_3 se transformă *cogredient* cu baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, deci prin formulele (168,III). *Vectorul în sine este invariant, dar în geometria metrică se prezintă sub unul din cele două aspecte, contravariant sau covariant, după semnificaţia fizică sau geometrică pe care o are într'un fenomen fizic sau într'o proprietate geometrică.*

Legile de transformare ale componentelor contravariante sau covariante ale vectorilor, cuprinse în formulele (169,III) ne permit să dăm următoarea definiţie, bazată pe criteriul general al măsurii (§ 74);

O mărime reprezentată prin componentele sale V^1, V^2, V^3 sau V_1, V_2, V_3 într'un sistem de referinţă cartezian dat este vectorială, dacă într'un alt sistem cartezian oarecare, noile sale componente V'^1, V'^2, V'^3 sau V'_1, V'_2, V'_3 *sunt date de una din formulele*

$$V'^i = A^i_j V^j ; \quad V'_i = a^j_i V_j .$$

In primul caz, mărimea va fi *contravariantă,* iar în al doilea *covariantă,* caracterul contravariant sau covariant fiind imprimat de modul de transformare a componentelor.

Criteriul măsurii ne conduce, deci, la recunoaşterea caracterului vectorial al mărimilor fizice şi geometrice. Este important de observat când o mărime dată apare sub forma de vector contravariant sau covariant.

Am văzut, însă, că în geometria metrică un vector dat prezintă ambele aspecte prin componentele sale. *Va trebui deci, pentru a putea sintetiza o mărime, care apare prin componentele sale de exemplu, covariante, să putem identifica şi componentele sale contravariante.*

Pentru aceasta, este nevoie de o relaţie între componentele covariante şi contravariante ale aceluiaşi vector, de o legătură între baza contravariantă $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ şi cea covariantă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$.

Această legătură este posibilă în geometria metrică, deoarece orice vector covariant poate fi reprezentat independent de baza aleasă, printr'un vector contravariant (normal la biplanul reprezentativ al vectorului covariant).

Vom vedea că putem trece dela componentele contravariante la cele covariante şi invers.

§ 104. Transformările bazelor şi componentelor contravariante şi covariante

Putem trece dela baze şi componente vechi la baze şi componente noi, şi invers.

Din punctul de vedere al calculului, această trecere nu este altceva decât rezolvarea unor sisteme liniare prin metodele algebrice, dar notaţiile tensoriale şi scrierea condensată ne permit scrierea imediată a formulelor care, cu notaţiile obişnuite, sunt greoaie.

Vom da ca exemplu comparativ trecerea dela baza $\bar{e}_i$ la baza $\bar{e}'_i$ şi invers. Formulele (152,III) definesc noua bază în funcţie de cea veche. Dacă voim să exprimăm vechea bază în funcţie de cea nouă, vom considera ca

Scanned with OKEN Scanner

necunoscute pe $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ și vom rezolva sistemul (152,III) în care a^i_j. sunt coeficienții[1]).

Folosind metodele algebrei, dacă înmulțim cele trei ecuații cu minorii normalizați A^1_1, A^2_1, A^3_1 ai elementelor a^1_1, a^1_2, a^1_3 și adunăm, vom avea:

$$A^1_1\bar{e}'_1 + A^2_1\bar{e}'_2 + A^3_1\bar{e}'_3 = (a^1_1A^1_1 + a^1_2A^2_1 + a^1_3A^3_1)\bar{e}_1 + (a^2_1A^1_1 + a^2_2A^2_1 + a^2_3A^3_1)\bar{e}_2 + \\ + (a^3_1A^1_1 + a^3_2A^2_1 + a^3_3A^3_1)\bar{e}_3.$$

Constatăm că primul coeficient din membrul al doilea reprezintă desvoltarea determinantului A, împărțit cu el însuși, fiindcă minorii au fost normalizați, iar ceilalți doi coeficienți sunt nuli, fiindcă reprezintă desvoltarea după coloanele a doua și a treia, dar cu minorii primei coloane.

Vom putea deci scrie:

$$\bar{e}_1 = A^1_1\bar{e}'_1 + A^2_1\bar{e}'_2 + A^3_1\bar{e}_3 = A^j_1\bar{e}'_j.$$

În mod analog vom obține

$$\bar{e}_2 = A^1_2\bar{e}'_1 + A^2_2\bar{e}'_2 + A^3_2\bar{e}'_3 = A^j_2\bar{e}'_j,$$
$$\bar{e}_3 = A^1_3\bar{e}'_1 + A^2_3\bar{e}'_2 + A^3_3\bar{e}'_3 = A^j_3\bar{e}'_j.$$

Regulile de formare a soluțiilor sunt evidente, dacă ținem seama de indici. De exemplu, $\bar{e}_1$ este o combinație liniară a vectorilor bazei noi $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$ cu coeficienții reciproci A^1_1, A^2_1, A^3_1, în care indicele inferior 1 este fix și același ca și la $\bar{e}_1$, iar indicele superior este mut și corespunde indicelui inferior al lui $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$.

---

[1]) Se pune problema: *Este posibil să asimilăm trei vectori $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ cu trei variabile algebrice și un sistem liniar de ecuații vectoriale cu un sistem liniar algebric?*

Răspunsul este afirmativ, deoarece rezolvarea unui sistem liniar se face prin înlocuirea ecuațiilor sale succesiv prin alte ecuații mai simple, formând un sistem echivalent cu acel inițial, care sunt combinații liniare ale ecuațiilor sistemului și din care sunt eliminate, rând pe rând, necunoscutele. Astfel, din sistemul

$$E \equiv x + y - a = 0; \quad F = x - y - b = 0$$

deducem sistemul echivalent

$$E + F \equiv 2x - a - b = 0; \quad E - F = 2y - a + b = 0,$$

din care au fost eliminați y, respectiv x.

Acest sistem este apoi înlocuit cu sistemul echivalent obținut, aplicând proprietățile egalității și, în sfârșit, prin

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2},$$

ca urmare deasemenea a proprietăților egalității.

Se vede deci că operațiile efectuate în vederea rezolvării sunt valabile și pentru vectori, deoarece sunt operațiile algebrei liniare vectoriale, adunarea și amplificarea prin numere, deci combinația liniară, complectate cu operații bazate pe proprietățile egalității.

In concluzie: *Orice sistem liniar vectorial poate fi rezolvat prin metodele algebrei liniare obișnuite, care sunt bazate exclusiv pe operații valabile și în algebra liniară vectorială.*

Scanned with OKEN Scanner

Putem deci scrie o singură formulă

$$\bar{e}_i = A_i^j \bar{e}'_j; \quad (i=1,2,3); \ (j=1,2,3).$$

Acelaşi procedeu ne conduce şi la exprimarea bazei reciproce vechi în funcţie de cea nouă, dar utilizarea notaţiilor tensoriale ne scuteşte de a reface raţionamentul.

Să rezolvăm acelaşi sistem (152,III) cu aceste notaţii. Vom începe prin a-l scrie condensat sub forma

$$\bar{e}'_i = a_i^j \bar{e}_j.$$

Scopul urmărit este să exprimăm pe $\bar{e}_j$ în funcţie de $\bar{e}'_i$. Vom ţine seama de relaţiile (165,III) între elementele şi minorii normalizaţi ai determinantului A. Vom înmulţi în ambii membri cu A_k^i şi vom aduna, aşa cum am procedat mai sus. Vom scrie provizoriu:

$$A_k^i \bar{e}'_i = A_k^i a_i^j \bar{e}_j \quad \text{şi deci} \quad \sum_{i=1}^{3} A_k^i \bar{e}'_i = \sum_{i=1}^{3} A_k^i a_i^j \bar{e}_j.$$

Observăm însă că simbolul $\sum$ eate inutil, deoarece indicele de sumare i este mut, găsindu-se odată sus şi odată jos în acelaşi termen. Acesta ne permite să scriem condensat trei relaţii

$$A_k^i \bar{e}'_i = A_k^i a_i^j \bar{e}_j; \quad (i,j=1,2,3), \ (k=1,2,3),$$

indicii i, j fiind muţi, iar k fix.

Ori, din relaţiile (165,III) avem

$$A_k^i a_i^j = \delta_k^j \quad \text{şi deci} \quad A_k^i a_i^j \bar{e}_j = \delta_k^j \bar{e}_j.$$

Lăsând pe j să varieze în ultima expresie, vom obţine termeni nuli, înafară de cazul când $j=k$, deci

$$\delta_k^j \bar{e}_j = \delta_k^1 \bar{e}_1 + \delta_k^2 \bar{e}_2 + \delta_k^3 \bar{e}_3 = \bar{e}_k,$$

oricare ar fi k între numerele 1, 2, 3.

Cu aceste explicaţii, rezolvarea sistemului se efectuează după cum urmează:

$$\bar{e}'_i = a_i^j \bar{e}_j \rightarrow A_k^i \bar{e}'_i = A_k^i a_i^j \bar{e}_j = \delta_k^j \bar{e}_j = \bar{e}_k,$$

de unde soluţia

$$\bar{e}_k = A_k^i \bar{e}'_i. \qquad (170,III)$$

Baza nouă se transformă în cea veche cu coeficienţii minorilor A_j^i. Să observăm, însă, că nu putem spune că transformarea este contragredientă celei iniţiale. Comparându-le, avem:

$$\bar{e}'_i = a_i^j \bar{e}_j; \quad \bar{e}_i = A_i^j \bar{e}'_j. \qquad (171,III)$$

Matricele respective sunt

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{matrix} \right\| \qquad (172,III) \qquad \left\| \begin{matrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{matrix} \right\| \qquad (172',III)$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparaţia cu matricele (166,III) arată că ultimele două au aceleaşi elemente, dar liniile uneia sunt coloanele celeilalte.

Matricea obţinută prin schimbarea liniilor unei alte matrice în coloane se numeşte *transpusa* acesteia. Matricele

$$\left\| \begin{matrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{matrix} \right\| \quad \text{şi} \quad \left\| \begin{matrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{matrix} \right\|$$

sunt una transpusa celeilalte şi fiecare este reciproca matricei formată cu elementele corespunzătoare a_j^i. Matricea (172',III) se numeşte *inversa* matricei (172,III), deoarece ea reprezintă transformarea inversă, care readuce baza nouă $\bar{e}'_i$ la cea veche $\bar{e}_i$. *Matricea inversă este deci transpusa matricei reciproce.*

Noţiunea de matrice apare în mod natural în toate schimbările de sisteme de referinţă. Studiul acestor transformări arată că între vectori şi matrice există o strânsă legătură. In acelaşi timp, utilizarea matricelor ca simboluri reprezentative ale transformărilor de sisteme de referinţă conduce la observaţia unor anumite reguli de calcul cu aceste simboluri, cu ajutorul cărora putem efectua sistematic şi rapid aceste transformări. Aceste reguli pun bazele *Calculului matricial*, care se poate generaliza şi desvolta, independent de *Calculul vectorial*, cu aplicaţii extrem de importante şi de numeroase în Fizică şi Tehnică.

Fără a cerceta acest calcul în mod sistematic, putem să-l folosim şi în transformările sistemelor de referinţă, deoarece se impune dela sine.

Să determinăm şi trecerea inversă dela baza nouă $\bar{e}'^1, \bar{e}'^2, \bar{e}'^3$ la cea veche $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, folosind raţionamentele şi metodele precedente. Plecând dela formulele (167,III)

$$\bar{e}'^l = A_j^l \bar{e}^j, \tag{173,III}$$

vom rezolva acest sistem de trei ecuaţii, având ca necunoscute pe $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ prin metoda simbolică. Vom înmulţi în ambii membri cu a_l^k şi vom însuma. Alegerea elementului a_l^k este uşor de înţeles, deoarece operaţia înseamnă rezolvarea sistemului prin eliminarea a două necunoscute şi păstrarea celei de a treia.

Vom avea

$$a_l^k \bar{e}'^l = a_l^k A_j^l \bar{e}^j = \delta_l^k \bar{e}^j = \bar{e}^k,$$

de unde

$$\bar{e}^k = a_l^k \bar{e}'^l.$$

Pentru a reţine procedeul, observăm că elementul cu care înmulţim trebue să fie ales din matricea inversă celei din membrul al doilea. In adevăr, pentru A_j^l am ales elementul a_l^k. Indicelui i superior i-a corespuns un indice i inferior, deci elementului A_j^l i-am făcut să-i corespundă un element a_l^k din transpusa reciprocei matricei sale, adică din inversa matricei A_j^i.

Ca regulă, avem: *pentru a rezolva un sistem* (173,III) *înmulţim ambii membri ai ecuaţiei condensate cu un element având doi indici, din care unul*

Scanned with OKEN Scanner

este indicele fix liber i, iar celălalt un alt indice (diferit de indicii muţi), însumăm şi ţinem seama de relaţiile fundamentale (165,III) *ale determinanţilor.*

In cazul examinat, avem

$$\bar{e}'^i = A^i_j \bar{e}^j ; \quad \bar{e}^j = a^j_i \bar{e}'^i \qquad (174,III)$$

Baza nouă se transformă în cea veche cu matricea inversă matricei A^i_j. Pentru a stabili transformările componentelor vectorilor, este suficient să ţinem seamă de modurile lor de transformare în raport cu bazele. Vom avea deci

$$V'^i = A^i_j V^j ; \quad V^i = a^i_j V'^j \qquad (175,III)$$

pentru componentele contravariante, ca şi pentru bazele $\bar{e}^i, \bar{e}'^i$ *şi*

$$V'_i = a^j_i V_j ; \quad V_i = A^j_i V'_j \qquad (176,III)$$

pentru componentele covariante, ca şi pentru bazele $\bar{e}_i, \bar{e}'_i$

Bazele noi $\bar{e}'_i$ şi $\bar{e}'^i$ sunt reciproce ca şi cele vechi. Ele satisfac condiţiile (122,III). In adevăr, vom avea:

$$\bar{e}'_i \bar{e}'^j = a^k_i \bar{e}_k A^j_l \bar{e}^l = a^k_i A^j_l \bar{e}_k \bar{e}^l = a^k_i A^j_l \delta^l_k = a^k_i \left(A^j_l \delta^l_k\right) = a^k_l A^j_k = \delta^j_i .$$

Acest calcul este un exemplu de aplicaţie a metodelor tensoriale în Calculul vectorial şi, în acelaşi timp, de trecere dela Calculul vectorial la cel tensorial prin elemente care se introduc odată cu sistematizarea notaţiilor.

Acelaşi calcul, desvoltat şi cu notaţiile vechi, fără indici, ar fi fost foarte anevoios, necesitând multă atenţie.

Exemplu. Să se găsească formulele de transformare, când se trece dela o bază de vectori $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, la alta $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$, definită faţă de prima prin expresiile:

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \\ \bar{e}'_2 &= 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \\ \bar{e}'_3 &= -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 . \end{aligned}$$

Matricea transformării va fi

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Transformarea este nesingulară, deoarece determinantul matricei are valoarea —6. Vom forma minorii elementelor şi apoi minorii normalizaţi. Matricea reciprocă va fi:

$$-\frac{1}{6} \begin{Vmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} .$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea inversă, transpusă reciprocei va fi deci:

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$

Transformările se vor scrie imediat, astfel:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\bar{e}'_1 \quad -\frac{1}{2}\bar{e}'_3;$$

$$\bar{e}_2 = \frac{2}{3}\bar{e}'_1 \quad -\frac{1}{3}\bar{e}'_2;$$

$$\bar{e}_3 = -\frac{5}{6}\bar{e}'_1 + \frac{2}{3}\bar{e}'_2 + \frac{1}{2}\bar{e}'_3$$

pentru baza nouă în cea veche, folosind matricea inversă.

Baza veche reciprocă se transformă contragredient cu cea veche, deci cu matricea reciprocă.

$$\bar{e}'^1 = \frac{1}{2}\bar{e}^1 + \frac{2}{3}\bar{e}^2 - \frac{5}{6}\bar{e}^3;$$

$$\bar{e}'^2 = -\frac{1}{3}\bar{e}^2 + \frac{2}{3}\bar{e}^3;$$

$$\bar{e}'^3 = -\frac{1}{2}\bar{e}^1 + \frac{1}{2}\bar{e}^3.$$

Baza reciprocă veche se transformă în cea nouă prin inversa reciprocei, adică prin transpusa matricei date

$$\bar{e}^1 = \bar{e}'^1 + 2\bar{e}'^2 - \bar{e}'^3;$$

$$\bar{e}^2 = 2\bar{e}'^1 + \bar{e}'^2 + 2\bar{e}'^3;$$

$$\bar{e}^3 = \bar{e}'^1 + 2\bar{e}'^2 + \bar{e}'^3.$$

Transformările componentelor vor fi analoage cu cele ale bazelor:

$$V'^1 = \frac{1}{2}V^1 + \frac{2}{3}V^2 - \frac{5}{6}V^3; \quad V^1 = V'^1 + 2V'^2 - V'^3;$$

$$V'^2 = -\frac{1}{3}V^2 + \frac{2}{3}V^3; \quad V^2 = 2V'^1 + V'^2 + 2V'^3;$$

$$V'^3 = -\frac{1}{2}V^1 + \frac{1}{2}V^3. \quad V^3 = V'^1 + V'^2 + V'^3.$$

$$V'_1 = V_1 + 2V_2 + V_3; \quad V_1 = \frac{1}{2}V'_1 - \frac{1}{2}V'_3;$$

$$V'_2 = 2V_1 + V_2 + 2V_3; \quad V_2 = \frac{2}{3}V'_1 - \frac{1}{3}V'_2;$$

$$V'_3 = -V_1 + 2V_2 + V_3. \quad V_3 = -\frac{5}{6}V'_1 + \frac{2}{3}V'_2 + \frac{1}{2}V'_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

In aplicațiile numerice notațiile tensoriale cu indici nu sunt practice, deoarece, indicii numerici se pot confunda cu exponenții și încarcă literele cu prea mulți indici.

Valoarea acestor notații este teoretică și pentru desvoltarea teoriei sunt extrem de utile.

In aplicații este bine să se folosească vechile notații, ținându-se bine înțeles seama de locul fiecărei litere în matricea corespunzătoare. Ca indicație, vom schița transformarea precedentă făcută cu notațiile vechi.

Vom considera bazele $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ și $\bar{u}^*\bar{v}^*\bar{w}^*$, iar componentele vectorului le vom nota, X, Y, Z; X^*, Y^*, Z^*.

Vom scrie

$$\bar{V} = X\bar{u} + Y\bar{v} + Z\bar{w} = X^*\bar{u}^* + Y^*\bar{v}^* + Z^*\bar{w}^*.$$

Matricele vor fi aceleași și vom avea

$$\bar{u}' = \bar{u} + 2\bar{v} + \bar{w}; \qquad \bar{u}'^* = \frac{1}{2}\bar{u}^* + \frac{2}{3}\bar{v}^* - \frac{5}{6}w^*;$$

$$\bar{v}' = 2\bar{u} + \bar{v} + 2\bar{w}; \qquad \bar{v}'^* = -\frac{1}{3}\bar{v}^* + \frac{2}{3}\bar{w}^*;$$

$$\bar{w}' = -\bar{u} + 2\bar{v} + \bar{w}. \qquad \bar{w}'^* = -\frac{1}{2}\bar{u}^* + \frac{1}{2}\bar{w}^*,$$

iar pentru componentele contravariante și covariante

$$X' = \frac{1}{2}X + \frac{2}{3}Y - \frac{5}{6}Z: \qquad X'^* = X^* + 2Y^* + Z^*;$$

$$Y' = -\frac{1}{3}Y + \frac{2}{3}Z; \qquad Y'^* = 2X^* + Y^* + 2Z^*;$$

$$Z' = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Z. \qquad Z'^* = -X^* + 2Y^* + Z^*.$$

Este de observat că deși notațiile cu indici au fost simplificate, totuși poziția indicilor nu este neglijată și, mai ales, locul elementelor în matrice este esențial în exemplul considerat.

§ 105. Transformarea componentelor covariante în contravariante și invers

Intre cele două baze reciproce $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ sunt relații care ne permit trecerea dela una la cealaltă, deoarece fiecare este determinată de cealaltă prin relațiile de reciprocitate. Totuși, pentru a exprima efectiv aceste relații este nevoie de noi notații, deoarece, de exemplu

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 e_2 e_3}$$

este o expresie în care intervine în afară de vectorii bazei, și produsul vectorial $\bar{e}_2 \times \bar{e}_3$ ale cărui componente față de e_1, e_2, e_3 nu se pot obține decât ținând seama de relațiile mutuale între vectorii bazei.

In sistemele ortogonale aceste relații apar imediat, deoarece un produs vectorial $\bar{j} \times \bar{k}$ este egal cu $\bar{i}$. In cazul sistemelor oarecare, unghiurile făcute de axe între ele nu sunt drepte și se vor exprima prin produsele scalare ale vectorilor fundamentali.

Scanned with OKEN Scanner

Deaceea, în exprimarea unei baze în funcţie de baza reciprocă ne aşteptăm să întâlnim notaţia (136,III)

$$g_{ij}=\bar{e}_i\bar{e}_j$$

şi în consecinţă forma metrică fundamentală (140,III)

$$V^2=g_{ij}\,V^iV^j.$$

In general, expresia unui vector în baza $\bar{e}^i$ este

$$\bar{V}=V_1\bar{e}^1+V_2\bar{e}^2+V_3\bar{e}^3=V_i\bar{e}^i \text{ cu } V_i=(\bar{V}\bar{e}_i),$$

deci

$$\bar{V}=(\bar{V}\bar{e}_j)\,\bar{e}^j.$$

Luând în particular $\bar{V}=\bar{e}_i$, obţinem

$$\bar{e}_i=(\bar{e}_i\bar{e}_j)\,\bar{e}^j=g_{ij}\bar{e}^j. \qquad (177,III)$$

Pentru a obţine baza $\bar{e}^i$ în funcţie de reciproca sa $\bar{e}_i$ va trebui să rezolvăm sistemul (177,III), care se scrie desvoltat:

$$\begin{aligned}\bar{e}_1&=g_{11}\bar{e}^1+g_{12}\bar{e}^2+g_{13}\bar{e}^3;\\ \bar{e}_2&=g_{21}\bar{e}^1+g_{22}\bar{e}^2+g_{23}\bar{e}^3;\\ \bar{e}_3&=g_{31}\bar{e}^1+g_{32}\bar{e}^2+g_{33}\bar{e}^3;\end{aligned} \qquad (178,III)$$

în raport cu $\bar{e}^1,\bar{e}^2,\bar{e}^3$.

Determinantul sistemului este

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix} \qquad (179,III)$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, trebue ca $g\neq 0$. Această condiţie este îndeplinită, deoarece

$$g=\begin{vmatrix} \bar{e}_1\bar{e}_1 & \bar{e}_1\bar{e}_2 & \bar{e}_1\bar{e}_3\\ \bar{e}_2\bar{e}_1 & \bar{e}_2\bar{e}_2 & \bar{e}_2\bar{e}_3\\ \bar{e}_3\bar{e}_1 & \bar{e}_3\bar{e}_2 & \bar{e}_3\bar{e}_3\end{vmatrix}=[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3]^2=E^2\neq 0, \qquad (179',III)$$

triedrul $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ fiind propriu.

Din (179',III) deducem

$$\sqrt{g}=\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3=E$$

radicalul având semnul plus ca şi produsul mixt.

Vom nota cu g^{ji} minorul normalizat al elementului g_{ij} din determinantul g. Deoarece $g_{ij}=g_{ji}$, vom avea şi

$$g^{ij}=g^{ji}$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricele

$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\| \quad \text{și} \quad \left\| \begin{matrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{matrix} \right\| \qquad (180,III)$$

sunt și reciproce și inverse în același timp, fiindcă elementele lor sunt simetrice față de diagonala principală.

O matrice cu elemente simetrice $g_{ij}=g_{ji}$ sau $g^{ij}=g^{ji}$ se numește *simetrică*

Este clar că *transpusa unei matrice simetrice este chiar acea matrice* fiindcă schimbarea liniilor în coloane nu modifică matricea.

Reciproca unei matrice simetrice este și ea simetrică și deci identică cu transpusa sa.

In acest caz, *inversa unei matrice simetrice, care este transpusa reciprocei sale, coincide cu această reciprocă.*

Este bine să reținem faptul că *noțiunea de matrice reciprocă presupune că determinantul matricei inițiale este diferit de zero*, deci transformarea corespunzătoare este nesingulară.

O matrice, al cărui determinant este diferit de zero, se numește *nesingulară.*

Toate matricele considerate până în prezent de noi sunt nesingulare. In particular, matricele (180, III) corespunzătoare formei fundamentale sunt *nesingulare.*

Forma fundamentală, având matricea nesingulară, se numește *formă patratică nesingulară.*

Cu aceste considerațiuni rezolvarea sistemului (178, III) se face imediat înmulțind în ambii membri cu g^{11}, g^{21}, g^{31} și adunând. Vom avea, desvoltat

$$g^{11}\bar{e}_1+g^{21}\bar{e}_2+g^{31}\bar{e}_3=(g^{11}g_{11}+g^{21}g_{21}+g^{31}g_{31})\bar{e}^1+(g^{11}g_{12}+g^{21}g_{22}+g^{31}g_{32})\bar{e}_2-$$

$$+(g^{11}g_{13}+g^{21}g_{23}+g^{31}g_{33})\bar{e}_3=\bar{e}^1,$$

dacă ținem seama de relațiile fundamentale în desvoltarea determinanților.

Utilizând notația condensată, vom observa în primul rând că între elementele g_{ij} și g^{ij} avem relații de forma (165, III), care se aplică oricărui determinant, și anume:

$$g_{ir}g^{rj}=\delta^j_i; \qquad g^{ir}g_{rj}=\delta^i_j$$

care exprimă faptul că desvoltarea după o coloană cu minorii normalizați ai aceleiași coloane sau ai alteia dă ca rezultat 1 sau 0.

Dacă, deci, în sistemul condensat (177, III) înmulțim cu g^{ki} în ambii membri și sumăm după indicele i devenit mut, avem

$$g^{ki}\bar{e}_i=g^{ki}g_{ij}\bar{e}^j=\delta^k_j\bar{e}^j=\bar{e}^k.$$

Putem schimba numele indicilor și scrie

$$\bar{e}^i=g^{ij}\bar{e}_j; \quad \bar{e}_i=g_{ij}\bar{e}^j \qquad (181, III)$$

obținând astfel trecerea dela baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ la baza reciprocă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$.

Scanned with OKEN Scanner

Să calculăm produsul scalar $(\bar{e}^i\bar{e}^j)$ analog cu $(\bar{e}_i\bar{e}_j)$

$$\bar{e}^i\bar{e}^j = g^{ik}\bar{e}_k g^{jl}\bar{e}_l = g^{ik}g^{jl}\bar{e}_k\bar{e}_l = g^{ik}g^{jl}g_{kl} = g^{ik}(g^{jl}g_{kl}) = g^{ik}\delta^j_k = g^{ij}.$$

Prin urmare, *baza* $\bar{e}^i$ *este legată de coeficienţii* g^{ij}, *tot aşa cum baza* $\bar{e}_i$ *este legată de coeficienţii formei fundamentale* g_{ij}. Reţinem deci formulele

$$g^{ij} = \bar{e}^i\bar{e}^j. \qquad (182, III)$$

Formulele (181,III), de trecere dela o bază la reciproca sa, ne permit să stabilim şi trecerea dela componentele contravariante la cele covariante, şi invers. Vom avea

$$V_i = (\overline{V}\bar{e}_i) = (\overline{V}g_{ij}\bar{e}^j) = g_{ij}(\overline{V}\bar{e}^j) = g_{ij}V^j;$$

$$V^i = (\overline{V}\bar{e}^i) = (\overline{V}g^{ij}\bar{e}_j) = g^{ij}(\overline{V}\bar{e}_j) = g^{ij}V_j.$$

Reţinem formulele:

$$V_i = g_{ij}V^j; \quad V^i = g^{ij}V_j, \qquad (183, III)$$

din care rezultă că *pentru un acelaşi vector* $\overline{V}$, *componentele contravariante şi covariante se deduc unele din celelalte cu ajutorul coeficienţilor formei fundamentale şi al reciprocilor lor.*

Jocul indicilor capătă o semnificaţie foarte importantă în aplicaţii.

Din formulele (183, III) se vede că putem ridica un indice inferior j, covariant prin înmulţirea componentei respective cu coeficientul g^{ij} şi prin însumare. Deasemenea, putem coborî un indice contravariant prin înmulţire cu g_{ij} şi însumare. Prin urmare: *Caracterul covariant sau contravariant al componentelor unui vector poate fi modificat prin intervenţia formei fundamentale, folosind jocul indicilor.*

Prin aceasta subliniem afirmaţia făcută anterior şi repetată că *în geometria metrică vectorul este o mărime invariantă, care se prezintă sub două aspecte duale: prin componentele sale covariante şi contravariante.*

Caracterele esenţiale ale mărimii vectoriale reprezentate prin vector se regăsesc, oricare ar fi componentele.

De exemplu, norma unui vector se poate calcula cu ambele sisteme de componente.

Vom avea

$$V^2 = g_{ij}V^iV^j = g_{ij}g^{ik}V_kg^{jl}V_l = (g_{ij}g^{ik})g^{jl}V_kV_l = \delta^k_j g^{jl}V_kV_l = g^{kl}V_kV_l,$$

astfel încât putem scrie:

$$V^2 = g_{ij}V^iV^j = g^{ij}V_iV_j. \qquad (184, III)$$

Norma unui vector se exprimă la fel cu ajutorul ambelor sisteme de componente, folosind jocul de ridicare şi coborîre al indicilor. Odată cu aceasta constatăm că, pe lângă forma metrică fundamentală, apare o a doua formă $g^{ij}V_iV_j$ egală cu prima, dar având ca variabile componentele covariante ale unui vector.

Scanned with OKEN Scanner

Această formă este deasemenea nesingulară, deoarece

$$\begin{vmatrix} g^{11}g^{12}g^{13} \\ g^{21}g^{22}g^{23} \\ g^{31}g^{32}g^{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{e}^1\bar{e}^1 & \bar{e}^1\bar{e}^2 & \bar{e}^1\bar{e}^3 \\ \bar{e}^2\bar{e}^1 & \bar{e}^2\bar{e}^2 & \bar{e}^2\bar{e}^3 \\ \bar{e}^3\bar{e}^1 & \bar{e}^3\bar{e}^2 & \bar{e}^3\bar{e}^3 \end{vmatrix} = [\bar{e}^1\bar{e}^2\bar{e}^3]^2 = E^{-2}. \qquad (185, III)$$

Produsul scalar a doi vectori se poate exprima și prin componentele covariante. In adevăr, vom putea scrie

$$\bar{U} = U^i\bar{e}_i = U_i\bar{e}^i; \quad \bar{V} = V^i\bar{e}_i = V_i\bar{e}^i,$$

de unde

$$\begin{aligned} \bar{U}\bar{V} &= U^i\bar{e}_iV^j\bar{e}_j = U^iV^j\bar{e}_i\bar{e}_j = U^iV^jg_{ij} = g_{ij}U^iV^j; \\ \bar{U}\bar{V} &= U_i\bar{e}^iV_j\bar{e}^j = U_iV_j\bar{e}^i\bar{e}^j = U_iV_jg^{ij} = g^{ij}U_iV_j; \\ \bar{U}\bar{V} &= U_i\bar{e}^iV^j\bar{e}_j = U_iV^j\bar{e}^i\bar{e}_j = U_iV^i\delta^i_j = U_iV^i = U^iV_i. \end{aligned} \qquad (186, III)$$

Luând $\bar{U} = \bar{V}$, regăsim cele două expresii echivalente ale normei unui vector iar ultima relație ne va da

$$(V)^2 = V_iV^i = V_1V^1 + V_2V^2 + V_3V^3. \qquad (187, III)$$

Se vede că această ultimă expresie a normei seamănă cu cea din cazul sistemelor carteziene ortogonale

$$V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = XX + YY + ZZ,$$

ceeace se explică prin faptul că în acest caz componentele covariante și contravariante se confundă.

EXERCIȚII

1. Să se determine vectorul de poziție al punctului de intersecție dintre planel $\overline{ar} = A$, $\overline{br} = B$, $\overline{cr} = C$, $(\overline{abc} \neq 0$.

Indicație. Se vor căuta componentele lui r după triedrul reciprocilor vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, adică o soluție de forma $r = \alpha\bar{a}' + \beta\bar{b}' + \gamma\bar{c}'$.

2. Să se determine punctul de intersecție al dreptei $(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{u} = 0$ cu planul $(\bar{r} - \bar{r}_1)\,\bar{n} = 0$.

Indicație. Din ecuatia dreptei deducem $\bar{r} - \bar{r}_0 = \lambda\bar{u}$, deci $\bar{r}$ va avea o componentă după $\bar{r}_0$ cunoscută; rămâne de determinat λ, componenta după $\bar{a}$. Pentru aceasta se introduce $\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{u}$ în ecuația planului.

3. Să se rezolve ecuația $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{A}$, unde $\bar{a}$ și $\bar{A}$ sunt vectori ortogonali dati.

Indicație. Se ia ca triedru de referință $(\bar{a}, \bar{A}, \bar{a} \times \bar{A})$; se va căuta deci o soluție de forma $\bar{x} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{A} + \gamma\,(\bar{a} \times \bar{A})$. Rezultă $\beta = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, iar α rămâne arbitrar.

4. Să se rezolve sistemul

$$\bar{a} \times \bar{x} = \bar{A}; \quad \bar{b}\bar{x} = B.$$

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Soluția obținută în exercițiul precedent va trebui să satisfacă și a doua ecuație, determinând astfel pe α.

5. Din ecuația (112,III) să se deducă paralelismul dreptelor de intersecție a două plane paralele cu un al treilea.

6. Să se arate că expresiile (115,III) și (118,III), care dau componentele unui vector $\bar{V}$ după un triedru oarecare $A\,\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ sunt echivalente.

Indicație. Se vor amplifica fracțiile din (115,III) cu $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

7. Fie $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, trei vectori necoplanari având aceeași origine O, și $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ reciprocii lor.

Să se arate că planul determinat de vârfurile vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ este perpendicular pe diagonala paralelipipedului construit pe vectorii reciproci.

Indicație. Se va arăta că $\bar{a}'+\bar{b}'+\bar{c}'$ este perpendicular pe doi vectori din plan, de exemplu pe $\bar{a}-\bar{c}$ și $\bar{a}-\bar{b}$.

8. Să se demonstreze relația (124,III) din text,

$$\bar{e}_1\times\bar{e}^1+\bar{e}_2\times\bar{e}^2+\bar{e}_3\times\bar{e}^3=0$$

și să se deducă de aici relațiile

$$\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}^1=\bar{e}^3\bar{e}_2\bar{e}_3\,;\qquad \bar{e}_2\bar{e}_3\bar{e}^2=\bar{e}^1\bar{e}_3\bar{e}_1\,;\qquad \bar{e}_3\bar{e}_1\bar{e}^3=\bar{e}^2\bar{e}_1\bar{e}_2\,;$$

$$\bar{e}^1\bar{e}^2\bar{e}_1=\bar{e}_3\bar{e}^2\bar{e}^3\,;\qquad \bar{e}^2\bar{e}^3\bar{e}_2=\bar{e}_1\bar{e}^3\bar{e}^1\,;\qquad \bar{e}^3\bar{e}^1\bar{e}_3=\bar{e}_2\bar{e}^1\bar{e}^2.$$

9. Două baze reciproce $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ și $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ sunt astfel ca $\bar{e}^i=k\bar{e}_i$. Să se arate că cele două baze sunt formate din vectori ortogonali și egali în modul.

Indicație. Se va scrie $\bar{e}^i\bar{e}_j=\delta^i_j$, de unde $k\bar{e}_i\bar{e}_j=\delta^i_j$.

10. Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca doi vectori $\bar{u}$ și $\bar{v}$ să fie paraleli este

$$(\bar{e}_1\times\bar{u})(\bar{e}^1\bar{v})+(\bar{e}_2\times\bar{u})(\bar{e}^2\bar{v})+(\bar{e}_3\times\bar{u})(\bar{e}^3\bar{v})=0.$$

Indicație. Se scrie $\bar{v}=(\bar{e}^1\bar{v})\,\bar{e}_1+(\bar{e}^2\bar{v})\,\bar{e}_2+(\bar{e}^3\bar{v})\,\bar{e}_3$.

11. Să se arate că dacă relațiile $\bar{e}'_i=a^j_i\,\bar{e}_j$ definesc o transformare a bazei $\bar{e}_j$ în altă bază $\bar{e}'_j$, ele vor transforma orice triedru nedegenerat $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ tot într'un triedru nedegenerat.

Indicație. Se va ține seama de relațiile (152,III) și (153,III).

12. Se dau trei mărimi V_1, V_2, V_3, care, printr'o schimbare a bazei, devin V'_1, V'_2, V'_3. Să se arate că dacă pentru orice vector $\bar{U}$, dat prin componentele sale contravariante U^1, U^2, U^3, avem

$$V_1U^1+V_2U^2+V_3U^3=\text{ invariant}$$

față de schimbarea bazei, atunci V_1, V_2, V_3 sunt componentele covariante ale unui vector $\bar{V}$.

Indicație. Se va scrie $U^i=a^i_j\,U'^j$ și se va introduce în relația $V_iU^i=V'_j\,U'^j$. Vom avea $V_ia^i_j\,U'^j=V'_j\,U'^j$. Cum vectorul $\bar{U}$ este oarecare, va trebui ca în cei doi membri, coeficienții termenilor în U'^j, să fie egali. Deci $V'_j=a^i_j\,V_i$, transformare ce caracterizează un vector covariant.

13. Să se scrie formulele, care dau distanța dintre două puncte și unghiul a două direcții, în cazul când cele trei axe oblice sunt reprezentate prin vectori de bază $\bar{e}_i$ egali și

Scanned with OKEN Scanner

făcând între ei unghiurile $(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 30°$, $(\bar{e}_3, \bar{e}_1) = 45°$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 60°$.

Indicație. Se vor folosi formulele (146,III) și (147,III), în care

$$g_{11} = \bar{e}_1^2 = a^2; \quad g_{22} = \bar{e}_2^2 = a^2; \quad g_{33} = \bar{e}_3^2 = a^2; \quad g_{23} = \bar{e}_2\bar{e}_3 = g_{32} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$g_{31} = \bar{e}_3\bar{e}_1 = \bar{g}_{13} = a^2\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad g_{12} = \bar{e}_1\bar{e}_2 = g_{21} = \frac{1}{2}a^2.$$

14. Să se exprime volumul unui tetraedru determinat de vectorii $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$, dați prin componentele lor contravariante față de baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, pentru care se cunosc coeficienții g_{ij}.

Indicație. Se va ține seama de (135,III) și (179,III)

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{g}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

15. Se dă un plan P prin ecuația $3x - 2y + z = 6$ față de un sistem de axe oblice. Să se determine componentele covariante ale normalei la plan.

Indicație. Vom avea $n_1 = \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{2}$; $n_2 = \frac{1}{\xi_2} = -\frac{1}{3}$; $n_3 = \frac{1}{\xi_3} = \frac{1}{6}$.

16. Să se determine vectorul definit de planele paralele

$$3x - 2y + z = 6,$$
$$6x - 4y + 2z = 18.$$

Indicație. Segmentele interceptate pe axe sunt $1, -\frac{3}{2}, 3$, deci $n_1' = 1$, $n_2' = -\frac{3}{2}$ $n_3' = \frac{1}{3}$. Ca verificare, cei doi vectori $\bar{n}'$ și $\bar{n}$ din exercițiul precedent au componentele proporționale, deci sunt paraleli.

17. Să se arate prin calcul că suma a doi vectori covarianți este tot un vector covariant, produsul dintre un scalar și un vector covariant este tot un vector covariant, deducând de aici că o combinație liniară și omogenă cu coeficienți scalari a mai multor vectori covarianți (în număr finit) este deasemenea un vector covariant.

Indicație. Se vor folosi formulele de transformare ale vectorilor covarianți.

18. Să se arate că o combinație liniară și omogenă de n vectori contravarianți cu coeficienți scalari este un vector contravariant.

Indicație. Se va proceda ca în problema precedentă.

19. Să se demonstreze că dacă se adună componentele unui vector contravariant cu componentele unui vector covariant, cele trei numere nu pot fi componentele unui vector.

Indicație. Se va presupune contrariul. U^i și V_j fiind dați, suma $U^i + V_i = W_i$ ar fi un vector covariant. Ar rezulta că $U^l = W_l - V_l$ ar fi componentele covariante ale unui vector, deci contrar ipotezei că U^l sunt componente contravariante.

20. Se consideră transformarea dată prin

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad \bar{e}_2' = \bar{e}_3 + \bar{e}_1, \quad \bar{e}_3' = e_1 + \bar{e}_2.$$

Să se scrie matricea transformării, matricea reciprocă și matricea inversă a acestei trans-

Scanned with OKEN Scanner

formări. Să se deducă apoi cum se transformă reciprocii $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, precum și relațiile dintre componentele unui vector covariant (sau contravariant) față de noua și vechea bază.

21. Se consideră transformarea

$$\bar{e}'^1=2\bar{e}^1+\bar{e}^2+\bar{e}^3;\quad \bar{e}'^2=\bar{e}^1+2\bar{e}^2+\bar{e}^3;\quad \bar{e}'^3=\bar{e}^1+\bar{e}^2+2\bar{e}^3.$$

Să se deducă transformarea inversă și formulele de transformare a reciprocilor. Deasemenea relațiile dintre vechile și noile componente ale unui vector oarecare covariant (sau contravariant).

22. Trei axe oblice sunt date prin trei vectori unitari $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ formând unghiurile $(\bar{b}, c) = 60°$, $(\bar{c}, \bar{a}) = 30°$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 120°$. Să se scrie relațiile dintre componentele covariante și contravariante ale unui aceluiași vector oarecare $\overline{V}$.

Indicație. $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$; $g_{23}=\cos 60°=\frac{1}{2}$; $g_{31}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $g_{12}=-\frac{1}{2}$.

Se va scrie apoi $V_i=g_{ij}V^j$; $V^i=g^{ij}V_j$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

MARIMI TENSORIALE ŞI COMPUSE ÎN SPAŢIUL AFIN

*A. MĂSURA MĂRIMILOR ÎN SPAŢIUL AFIN[1])

*§ 106. Baze reciproce în spaţiul afin

Introducerea sistemelor de referinţă carteziene oblice în spaţiul metric euclidian a pus în evidenţă cele două aspecte duale ale vectorilor în acest spaţiu.

Folosirea celor două baze reciproce $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ şi $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, la care am raportat unul şi acelaşi vector $\bar{V}$, a condus la cele două feluri de componente V^1, V^2, V^3 contravariante şi V_1, V_2, V_3 covariante.

Deoarece vectorii bazelor reciproce au putut fi legaţi prin relaţiile (181, III)

$$\bar{e}^i = g^{ij}\bar{e}_j; \quad \bar{e}_i = g_{ij}\bar{e}^j,$$

trecerea dela o bază la cealaltă este posibilă cu ajutorul coeficienţilor g_{ij} şi g^{ij}.

In spaţiul afin, vom putea introduce deasemenea o bază $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ pentru măsura vectorilor contravarianţi, precum şi o bază $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ pentru măsura vectorilor covarianţi.

Vom reaminti că vectorul contravariant $\bar{V}$ este mărimea geometrică asociată obiectului geometric format de mulţimea tuturor perechilor orientate de puncte $(A, B) = \overline{AB}$, pe când vectorul covariant, introdus în § 35, este mărimea geometrică asociată obiectului geometric format de mulţimea tuturor perechilor orientate de plane (P, Q).

Am arătat că orice vector contravariant $\bar{V}$, raportat la baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ are expresia

$$\bar{V} = V^i\bar{e}_i. \qquad (1, IV)$$

Deasemenea, raportând vectorul covariant $\bar{U}_*$ la baza formată de trei vectori covarianţi liniar independenţi $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, va avea expresia (67, I)

$$\bar{U}_* = U_i\bar{e}^i. \qquad (2, IV)$$

Putem folosi, aşa cum am observat (§ 35), un singur triedru fundamental pentru a construi atât baza contravariantă $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, cât şi baza covariantă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$.

---

[1]) Intreg punctul A poate fi lăsat pentru a doua lectură.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, ducând prin extremitățile A_1, A_2, A_3 ale vectorilor contravarianți (fig. 97)

$$\overrightarrow{OA_1}=\bar{e}_1\,;\quad \overrightarrow{OA_2}=\bar{e}_2;\quad \overrightarrow{OA_3}=\bar{e}_3$$

plane paralele cu fețele triedrului $OA_1A_2A_3$, se formează un paralelipiped, alecărei fețe paralele pot fi asociate câte două pentru a forma trei biplane orientate,

$$(P_1, Q_1)=\bar{e}^1,\quad (P_2, Q_2)=\bar{e}^2,\quad (P_3, Q_3)=\bar{e}^3.$$

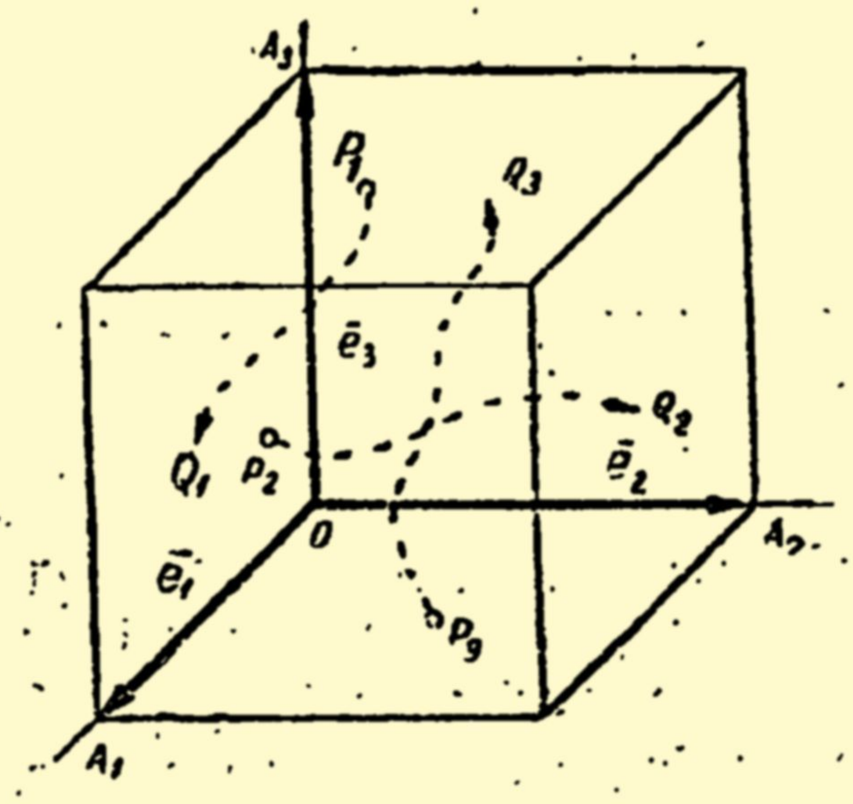


Fig. 97

Luând ca unități pe direcțiile fundamentale vectorii de bază $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, măsurile vectorilor covarianți $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ pe aceste direcții vor fi egale cu unitatea, deci *ei vor putea fi considerați ca unități vectoriale covariante.*

Între vectorii covarianți și contravarianți din spațiul afin am stabilit, pe de altă parte, o relație geometrică, asociind figurii formate dintr'un biplan și un segment orientat o mărime geometrică, produsul scalar (§ 61), care reprezintă măsura vectorului covariant pe direcția vectorului contravariant.

Produsul scalar $\overline{U}_*\overline{V}$ al unui vector covariant $\overline{U}_*$ prin vectorul contravariant $\overline{V}$ este un număr h independent de unitatea de măsură folosită pe direcția lui $\overline{V}$ și de sistemul de referință ales, deci:

$$\overline{U}_*\overline{V}=\overline{V}\overline{U}_*=h. \qquad (3,IV)$$

În particular, dacă $\overline{V}$ are extremitățile pe planele P, Q ale lui U_*, produsul scalar este egal cu unitatea, iar dacă $\overline{V}$ este paralel cu $\overline{U}_*$, produsul scalar este nul.

Aplicând aceste rezultate vectorilor celor două baze $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ vom avea:

$$\begin{aligned}&\bar{e}^1\bar{e}_1=\bar{e}_1\bar{e}^1=1\,;\quad \bar{e}^2\bar{e}_2=\bar{e}_2\bar{e}^2=1\,;\quad \bar{e}^3\bar{e}_3=\bar{e}_3\bar{e}^3=1\,;\\ &\bar{e}^1\bar{e}_2=\bar{e}_1\bar{e}^2=0;\quad \bar{e}^2\bar{e}_3=\bar{e}_2\bar{e}^3=0;\quad \bar{e}^3\bar{e}_1=\bar{e}_3\bar{e}^1=0,\end{aligned} \qquad (4,IV)$$

deci sub formă condensată;

$$\bar{e}_i\bar{e}^l=\bar{e}^l\bar{e}_i=1\,;$$

(fără sumare după i) (5,IV)

$$\bar{e}_i\bar{e}^j=\bar{e}^l\bar{e}_j=0.$$

Folosind simbolul lui Kronecker, aceste formule se pot reduce la una singură:

$$\bar{e}_i\bar{e}^j=\bar{e}^l\bar{e}_l=\delta^j_i;\quad \delta^j_l=\begin{cases}0 \text{ pentru } i\neq j.\\ 1 \text{ pentru } i=j.\end{cases} \qquad (6,IV)$$

Comparând formulele (5,IV) cu (120,III), respectiv (6,IV) cu (122,III), constatăm o identitate formală, astfel încât vom putea numi bazele $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ *baze reciproce în spațiul afin.*

Scanned with OKEN Scanner

Raportând vectorii $\overline{V}$ şi $\overline{U}_*$ la cele două baze reciproce, produsul lor scalar va avea expresia

$$\overline{U}_*\overline{V}=(U_i\overline{e}^i)\,(V^j\overline{e}_j)=U_iV^j\overline{e}^i\overline{e}_j=U_iV^j\delta^i_j=U_iV^i,$$

care se obţine imediat, ţinând seama de (6,IV).

Prin urmare: *Produsul scalar al vectorilor $\overline{U}_*$ şi $\overline{V}$, raportaţi la două baze reciproce în spaţiul afin, are expresia*

$$\overline{U}_*\overline{V}=U_iV^i, \qquad (7,IV)$$

formal identică cu aceea a doi vectori raportaţi la două baze reciproce în spaţiul euclidian.

Explicaţia acestei identităţi stă în faptul că vectorii reciproci din spaţiul metric euclidian sunt vectori reprezentativi ai vectorilor covarianţi, baza reciprocă $\overline{e}^1$, $\overline{e}^2$, $\overline{e}^3$ fiind formată din vectori normali la planele fundamentale, iar dimensiunea reciprocilor este inversa unei lungimi.

In particular, dacă biplanul (P, Q), asociat vectorului covariant $\overline{u}_*$, are planul iniţial trecând prin origine, iar vectorul $\overline{V}$ este vectorul de poziţie

$$\overline{r}=\overline{OM}=x^i\overline{e}_i$$

al unui punct curent din planul final Q, punând

$$\overline{u}_*=u_i\overline{e}^i,$$

vom avea

$$\overline{u}_*\overline{r}=u_ix^i=1.$$

Relaţia

$$u_ix^i=1 \qquad (8,IV)$$

satisfăcută de orice punct M din planul Q, reprezintă ecuaţia carteziană a acestui plan.

In general, o relaţie de forma

$$\overline{u}_*\overline{r}=h$$

care, raportată la cele două baze, devine

$$u_ix^i=u_1x^1+u_2x^2+u_3x^3=h,$$

se poate pune sub forma

$$\frac{1}{h}u_ix^i=1\,;\quad h\neq 0$$

şi deci reprezintă deasemenea ecuaţia unui plan.

Forma (8,IV) a ecuaţiei unui plan este *forma normală* şi vom numi componentele u_1, u_2, u_3 ale vectorului covariant $\overline{u}_*$ *componentele planului* sau *coordonatele planului*.

Ele reprezintă inversele măsurilor segmentelor interceptate de planul final Q al biplanului (P, Q) asociat vectorului covariant $\overline{u}_*$ când, planul iniţial

Scanned with OKEN Scanner

trece prin origine, unitățile pe cele trei axe fiind măsurile vectorilor-unitate $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Putem deci asocia fiecărui plan, care nu trece prin origine, un vector covariant $\bar{u}_*$, care determină în mod unic acest plan.

Când una din coordonatele u_1, u_2, u_3 este nulă, planul este paralel cu axa corespunzătoare.

Prin relația

$$\bar{u}_* \bar{r} = u_i x^i = h,$$

asociem vectorul covariant $\bar{u}_*$ mulțimii tuturor planelor paralele cu planul $\bar{u}_* \bar{r} = 1$, deci unei direcții de plane, după cum putem asocia un vector contravariant $\bar{V}$ unei direcții de drepte din spațiu.

Introducerea bazelor reciproce în spațiul afin stabilește între punctele și planele spațiului o analogie profundă: fiecărui punct îi corespunde un vector contravariant și fiecărui plan un vector covariant. Originii îi corespunde vectorul contravariant nul, iar planului dela infinit, vectorul covariant nul.

Vectorul covariant din spațiul afin este identic cu cel introdus în spațiul metric (§ 101) pentru a da o semnificație geometrică aspectului covariant al vectorilor din acest spațiu.

* § 107. Mărimi raportate la baze reciproce în spațiul afin

Cu ajutorul bazelor reciproce putem reprezenta în spațiul afin bivectorii și trivectorii, introduși în §§ 66 și 67 ca mărimi asociate paralelogramului, respectiv paralelipipedului orientat.

Operațiile de produs vectorial și produs exterior, folosite pentru obținerea acestor mărimi, au proprietățile formale (algebrice) cunoscute din spațiul metric. Este deci limpede că *toate formulele obținute prin aplicarea operațiilor algebrei vectoriale în spațiul metric cu folosirea unui sistem de referință oarecare oblic, deci a două baze reciproce $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, se mențin și în spațiul afin, cu aceeași înfățișare, dar cu interpretări eventual diferite.*

Astfel, produsul vectorial a doi vectori contravarianți $\bar{U}$ și $\bar{V}$ are ca rezultat *bivectorul contravariant*

$$\bar{U} \times \bar{V} = (\bar{U}, \bar{V})$$

ca și în geometria metrică, dar spre deosebire de aceasta, nu vom mai putea substitui bivectorului $(\bar{U}, \bar{V})$ vectorul său contravariant reprezentativ, normal la elementul orientat $(\bar{U}, \bar{V})$.

Notând cu E și E^{-1}, ca și în spațiul metric, produsele mixte (127,III) ale vectorilor bazelor, vom putea scrie, conform cu § 54:

$$\frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} = \bar{e}^1; \quad \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} = \bar{e}^2; \quad \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3} = \bar{e}^3. \tag{9,IV}$$

Deci, vom stabili relațiile dintre bazele reciproce, formal identice cu cele din spațiul metric, dar în fond diferite, deoarece rapoartele celor trei bivectori fundamentali $\bar{e}_2 \times \bar{e}_3$, $\bar{e}_3 \times \bar{e}_1$ și $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$ la trivectorul fundamental $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$,

Scanned with OKEN Scanner

sunt cei trei vectori *covarianți* (nu contravarianți) $\overline{e}^1$, $\overline{e}^2$, $\overline{e}^3$, reciprocii vectorilor $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

Formula (130,III), care dă expresia produsului vectorial, se menține neschimbată, reprezentând bivectorul contravariant

$$(\overline{U}, \overline{V}) = (\overline{U} \times \overline{V}) = E \begin{vmatrix} \overline{e}^1 & \overline{e}^2 & \overline{e}^3 \\ U^1 & U^2 & U^3 \\ V^1 & V^2 & V^3 \end{vmatrix} \qquad (10,IV)$$

proporțional cu un vector covariant, factorul de proporționalitate fiind E. Vom numi trivectorul E *capacitate scalară*, iar bivectorul contravariant (10,IV) *capacitate vectorială covariantă*.

Formula (131,III), care exprimă produsul vectorial prin componentele sale covariante, deci aceeași mărime sub aspectul său covariant, reprezintă în spațiul afin un *bivector covariant*

$$(\overline{U}_*, \overline{V}_*) = (\overline{U}_* \times \overline{V}_*) = E^{-1} \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} . \qquad (11,IV)$$

Numind trivectorul E^{-1} *densitate scalară*, bivectorul covariant se va numi *densitate vectorială contravariantă*.

Produsul mixt $(\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{W})$ a trei vectori contravarianți, fiind proporțional cu E, va fi o *capacitate scalară*, pe când produsul mixt $(\overline{U}_*\,\overline{V}_*\,\overline{W}_*)$ a trei vectori covarianți, proporțional cu E^{-1}, va fi *o densitate scalară*. Formulele (135,III) se mențin cu această semnificație.

O formulă, care nu poate fi transpusă formal în spațiul afin, este aceea a dublului produs vectorial. Această operație vectorială trebue aplicată unui bivector de o varianță și unui vector de o varianță contrară. Astfel, vom obține un vector covariant ca rezultat al operației:

$$(\overline{U}_* \times \overline{V}_*) \times \overline{W}.$$

In adevăr, vom scrie succesiv

$$(\overline{U}_* \times \overline{V}_*) \times \overline{W} = E^{-1} \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \times W^i \overline{e}_i =$$

$$= E^{-1} \begin{vmatrix} W^3(\overline{e}_1 \times \overline{e}_2) + W^3(\overline{e}_1 \times \overline{e}_3) \ldots & \ldots \\ U_1 & U_2 \quad U_3 \\ V_1 & V_2 \quad V_2 \end{vmatrix} .$$

Ținând seama de (9,IV) vom avea deci

$$(U_* \times \overline{V}_*) \times \overline{W} = \begin{vmatrix} W^2\overline{e}^3 - W^3\overline{e}^2 & W^3\overline{e}^1 - W^1\overline{e}^3 & W^1\overline{e}^2 - W^2\overline{e}^1 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{e}^3 [W^2(U_2V_3 - V_2U_3) - W^1(U_3V_1 - V_3U_1)] + \ldots =$$

$$= \overline{e}^3 [V_3(U_2W^2 + U_1W^1) - U_3(V_1W^1 + V_2W^2)] + \ldots .$$

Scanned with OKEN Scanner

Adăugind și scăzând în paranteză $U_3V_3W^3$, vom recunoaște produsele scalare $\overline{U}_*\overline{W}$ și $\overline{V}_*\overline{W}$, astfel încât vom obține formula de desvoltare a dublului produs vectorial în spațiul afin sub forma următoare:

$$(\overline{U}_*\times\overline{V}_*)\times\overline{W}=\overline{V}_*(\overline{U}_*\overline{W})-\overline{U}_*(\overline{V}_*\overline{W}). \qquad (12,IV)$$

Regăsim astfel rezultatul stabilit pe cale simbolică (§ 55). *Dublul produs vectorial al unui bivector covariant printr'un vector contravariant este un vector covariant.*

Evident, vom avea și formula duală:

$$(\overline{U}\times\overline{V})\times\overline{W}_*=\overline{V}(\overline{U}\,\overline{W}_*)-\overline{U}(\overline{V}\,\overline{W}_*). \qquad (13,IV)$$

Este interesant de observat că *formula dublului produs vectorial nu are o înfățișare simplă decât sub forma simbolică, operațională.* Explicația acestei particularități constă în faptul că operația de dublu produs vectorial nu introduce o mărime nouă, ci dimpotrivă, reduce o mărime bivectorială la una vectorială. Raportarea ei la două baze reciproce în spațiul afin justifică deplin acest caracter operațional al dublului produs vectorial, deoarece numai expresia finală (12,IV) pune în evidență atât mărimea obținută, cât și relațiile acesteia cu cei trei factori $\overline{U}_*$, $\overline{V}_*$ și $\overline{W}$.

*§ 108. Schimbarea bazelor reciproce. Covarianță și contravarianță în spațiul afin

Asocierea mărimilor geometrice unor obiecte geometrice ne permite, nu numai cercetarea proprietăților geometrice ale spațiului, ci și asocierea mărimilor geometrice unor mărimi fizice.

După cum am observat și anterior, operația de asociere necesită împărțirea obiectelor în clase în raport cu o relație de echivalență.

In capitolul II,B am desvoltat teoria asociației mărimilor, arătând pentru mărimile fundamentale ale spațiului afin, ca bivectorul și trivectorul, modul în care proprietățile geometrice ale obiectelor respective se reflectă în proprietățile algebrice formale ale mărimilor. Prin aceasta am fost conduși la un calcul simbolic, *algebra vectorială, în care, odată simbolul mărimii introdus, operațiile se desfășoară conform regulilor adoptate,* fără a se mai ține seama permanent de semnificația geometrică sau fizică a mărimilor în fiecare caz.

Această trecere dela obiecte la mărimi ne permite deci să stabilim proprietăți generale ale claselor de figuri, pe cale de calcul. Totuși ea nu ne permite să comparăm între ele decât speciile de mărimi, putând afirma că rezultatul unui calcul este o mărime scalară, vectorială, bivectorială, etc.

Pentru compararea mărimilor unei specii date între ele este necesar să măsurăm specia cu un sistem de unități. In acest caz, relațiile dintre mărimi se exprimă prin relații între componentele lor.

Măsura, reprezentând un caracter esențial al mărimilor, fiind rezultatul comparației mărimilor prin raportare sau adunare, caracterizează mărimile, în primul rând, într'un anumit sistem de unități, în care au fost măsurate și apoi, în orice alt sistem de unități, dedus din acesta. Cu alte cuvinte, *măsura*

Scanned with OKEN Scanner

mărimilor este o proprietate invariantă faţă de transformările sistemelor de unităţi ale speciei.

In aplicaţii, folosirea măsurii şi a calculelor numerice ne conduce la mărimi a căror natură geometrică sau fizică ne este necunoscută în acel moment, deoarece nu putem reconstitui toate operaţiile simbolice de algebră vectorială, precum şi alte operaţii eventuale de analiză vectorială, folosite pentru obţinerea acelor mărimi.

Aplicarea criteriului de invarianţă a măsurii mărimilor geometrice în raport cu schimbarea sistemelor de referinţă ale spaţiului ne conduce la determinarea modului de măsură al unei anumite mărimi geometrice raportate la spaţiu, modul de măsură fiind constituit din relaţiile dintre măsurile unei mărimi faţă de două sisteme de referinţă oarecare. (§ 78).

Comparaţia a două mărimi din specii diferite este o consecinţă a determinării modului de măsură pentru fiecare din ele. In adevăr, pornind dela observaţia că pentru două mărimi din aceeaşi specie modul de măsură este acelaşi şi considerând două specii diferite, vom putea compara mărimile respective prin modurile lor de măsură.

Astfel, prin aplicarea *criteriului măsurii*, după care două mărimi geometrice sunt de aceeaşi categorie, dacă măsurile lor în raport cu două sisteme de referinţă sunt legate prin aceleaşi relaţii, vom putea clasifica mărimile în categorii caracterizate prin modul de măsură specific fiecăreia

La baza acestei clasificări vor sta modurile de măsură ale vectorilor contravarianţi şi covarianţi în spaţiul afin, precum şi modul de măsură al mărimilor scalare, deci invarianţa măsurilor lor faţă de schimbarea de sistem de referinţă.

Transformarea unui sistem de referinţă în altul în spaţiul vectorial înseamnă schimbarea unei baze de unităţi în alta, deci schimbarea vectorilor $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ prin alţi vectori liniar independenţi $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$. Dacă baza covariantă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ este reciproca bazei contravariante $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, şi relaţia de reciprocitate a bazelor este considerată ca invariantă, atunci $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ se va transforma în baza $\bar{e}'^1$, $\bar{e}'^2$, $\bar{e}'^3$, reciproca lui $\bar{e}_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$.

Impunând condiţia de invarianţă a relaţiei de reciprocitate dintre cele două baze, vom putea deduce formulele de transformare ale componentelor vectorilor contravarianţi şi covarianţi.

In adevăr, fie conform cu (152,III)

$$\bar{e}'_i = \bar{a}^j_i \bar{e}_j$$

expresiile vectorilor noii baze contravariante, raportaţi la cea veche. Baza reciprocă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ se va schimba după formule analoage

$$\bar{e}'^k = \alpha^k_l \bar{e}^l.$$

Impunând condiţia

$$\bar{e}'_l \bar{e}'^k = \bar{e}_l \bar{e}^k = \delta^k_l ;$$

Vom scrie

$$\bar{e}'_l \bar{e}'^k = a^j_l \alpha^k_l \bar{e}_j \bar{e}^l = \delta^k_i .$$

Deci

$$a^j_l \alpha^k_l \delta^l_j = a^j_i \cdot \alpha^k_j = \delta^k_i .$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste relaţii, ţinând seama că $A=|a_j^l|\neq 0$, putem deduce imediat expresiile coeficienţilor α_j^k.

In adevăr, folosind minorii normalizaţi A_j^l ai elementelor a_l^j şi relaţiile cunoscute (165,III), vom înmulţi în ambii membri cu A_r^l şi vom însuma după k. Vom avea deci

$$(A_r^l a_l^j)\,\alpha_j^k = A_r^l \delta_l^k,$$

de unde

$$\delta_r^j \alpha_j^k = A_r^k$$

şi în sfârşit

$$\alpha_r^k = A_r^k.$$

Se vede deci că transformarea bazei covariante reciproce se face cu minorii normalizaţi ai elementelor a_k^r.

Vom avea, prin urmare

$$\bar{e}'^k = A_l^k\,\bar{e}^l$$

regăsind formulele (167,III) de transformare a bazei reciproce în spaţiul metric euclidian.

Astfel, se vede că *bazele reciproce au aceleaşi moduri de transformare, atât în spaţiul metric, cât şi în cel afin.*

Prin urmare, componentele vectorilor contravarianţi şi covarianţi se vor transforma ca şi în spaţiul metric, cu singura deosebire că nu vom mai putea considera componentele, fie contravariante, fie covariante, ca reprezentând una şi aceeaşi mărime vectorială, ci vom face distincţie între vectorii contravarianţi şi cei covarianţi.

Vom numi *mărime vectorială contravariantă*, sau vector contravariant, orice mărime măsurabilă cu trei unităţi şi care, prin schimbarea bazelor reciproce, deci a sistemelor de referinţă duale ale spaţiului, se transformă după regula următoare:

$$V'^i = A_j^i\,V^j; \quad V^i = A_j^i\,V'^j. \tag{14,IV}$$

Deasemenea, vom numi *mărime vectorială covariantă*, sau vector covariant, orice mărime măsurabilă cu trei unităţi şi care, prin schimbarea bazelor reciproce, deci a sistemelor de referinţă duale ale spaţiului, se transformă după regula:

$$V'_i = A_i^j\,V_j; \quad V_i = A_i^j\,V'_j \tag{15,IV}$$

Ambele reguli sunt cele obţinute în spaţiul metric prin formulele (169,III), ceeace arată că modul de transformare este acelaşi, atât în spaţiul afin cât şi în cel metric.

*§ 109. Densităţi şi capacităţi. Mărimi pseudo-scalare şi pseudo-vectoriale

Criteriul măsurii, care ne-a permis caracterizarea mărimilor vectoriale, stabilind distincţia între caracterele contravariant şi covariant, conduce la stabilirea diverselor categorii de mărimi fizice şi geometrice, fără a folosi imaginea geometrică.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta reprezintă un progres important în studiul mărimilor fizice ca mărimi ale spaţiului, deoarece asocierea unei mărimi geometrice unei mărimi fizice pe calea descoperirii directe a caracterelor geometrice ale acelei mărimi fizice, se loveşte de dificultăţi şi poate conduce la erori, în cazul mărimilor mai complexe.

In adevăr, dacă viteza pune imediat în evidenţă caracterele sale vectoriale, dacă forţa aplicată unui corp de dimensiuni reduse, sub forma unui efort de tracţiune, constitue un model de vector legat, am văzut că momentul unei forţe în raport cu un punct conduce la două imagini şi deci, la două mărimi geometrice diferite în plan şi în spaţiu, nici una din acestea nefiind corectă în întregime.

Dimpotrivă, criteriul măsurii permite asocierea justă a mărimii geometrice corespunzătoare unei mărimi fizice date, fără a folosi intuiţia în alegerea reprezentării geometrice. Astfel, pornind dela o bază contravariantă $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, care constitue un sistem structural de unităţi al spaţiului afin (§ 65), orice mărime măsurabilă cu trei unităţi, care se transformă contragredient cu baza, deci prin formulele (14,IV), va avea ca mărime geometrică asociată un vector contravariant şi vom spune că este un vector contravariant.

Baza covariantă reciprocă $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ fiind determinată prin alegerea primei baze, va constitui un sistem derivat de unităţi geometrice. Orice mărime, care se transformă cogredient cu $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, sau contragredient cu $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, deci prin formulele (15,IV), va avea ca mărime asociată un vector covariant şi vom spune că este un vector covariant.

Produsul scalar al unui vector contravariant printr'un vector covariant rămâne invariant prin schimbarea bazei $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, deoarece avem

$$\bar{U}_* \bar{V} = (U_i \bar{e}^i)\,(V^j \bar{e}_j) = U_i V^j \bar{e}^i \bar{e}_j = U_i V^j \delta^i_j = U_i V^i,$$

oricare ar fi baza $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Dacă aplicăm criteriul măsurii, putem verifica această invarianţă astfel:

$$U_i V^i = (A^j_i U'_j)\cdot(a^i_k V'^k) = A^j_i a^i_k U'_j V'^k = U'_k V'^k.$$

Orice mărime, aparţinând unei specii măsurabile cu o unitate, care rămâne invariantă prin schimbarea bazei $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, va fi o mărime scalară, şi unitatea aleasă în specia sa va fi o unitate fundamentală, adică independentă de sistemul structural al spaţiului. In particular, produsul scalar în spaţiul afin este un număr, o mărime fără dimensiune, pe când în spaţiul metric este de dimensiunea unei lungimi la pătrat.

Densităţi şi capacităţi scalare. Trivectorul fundamental $[\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3]$ contravariant, reprezentând volumul orientat al paralelipipedului format de vectorii bazei, se transformă conform cu formula (153,III), astfel:

$$E' = [\bar{e}'_1\ \bar{e}'_2\ \bar{e}'_3] = [A^j_1 \bar{e}_j, a^k_2 \bar{e}_k, a^l_3 \bar{e}_l] = a^j_1 a^k_2 a^l_3 [\bar{e}_j\ \bar{e}_k\ \bar{e}_l],$$

unde j, k, l iau valorile 1, 2, 3. Este limpede că singurii termeni din suma triplă, relativă la indicii j, k, l, care nu se anulează, sunt cei în care indicii sunt diferiţi: prin urmare, vom avea

$$E' = (\sum \pm a^j_1 a^k_2 a^l_3)\,[\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3],$$

Scanned with OKEN Scanner

suma fiind extinsă la toate permutările indicilor j, k, l, iar semnul fiind pozitiv sau negativ, după paritatea numărului de inversiuni ale indicilor j, k, l.

Vom avea deci:

$$E' = AE \quad \text{sau} \quad [\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3] = \Lambda [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3], \tag{16,IV}$$

Prin urmare, trivectorul fundamental se transformă amplificându-se cu determinantul A al matricei. *Unitatea* $[\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3]$ *nu este independentă de sistemul structural al spațiului, deci trivectorul este o mărime derivată, măsurabilă cu o unitate.*

Trivectorul este o mărime pseudo-scalară a spațiului afin.

Putem deduce imediat modul de măsură al trivectorilor contravarianți. Fie trivectorul $[\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{W}]$, format cu vectorii

$$\overline{U} = a^i \bar{e}_i; \quad \overline{V} = b^j \bar{e}_j; \quad \overline{W} = c^k \bar{e}_k.$$

Vom scrie

$$[\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{W}] = [a^i \bar{e}_i, b^j \bar{e}_j, c^k \bar{e}_k] = a^i b^j c^k [\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k] = \begin{vmatrix} a^1 b^1 c^1 \\ a^2 b^2 c^2 \\ a^3 b^3 c^3 \end{vmatrix} [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3].$$

In noul sistem $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$, vom avea o expresie analoagă cu litere accentuate, de unde

$$\begin{vmatrix} a^1 b^1 c^1 \\ a^2 b^2 c^2 \\ a^3 b^3 c^3 \end{vmatrix} E = \begin{vmatrix} a'^1 b'^1 c'^1 \\ a'^2 b'^2 c'^2 \\ a'^3 b'^3 c'^3 \end{vmatrix} E'.$$

Ținând seama de transformarea (16,IV) a trivectorului fundamental, vom putea scrie

$$\begin{vmatrix} a^1 b^1 c^1 \\ a^2 b^2 c^2 \\ a^3 b^3 c^3 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a'^1 b'^1 c'^1 \\ a'^2 b'^2 c'^2 \\ a'^3 b'^3 c'^3 \end{vmatrix}.$$

Notând cu τ componenta unică a trivectorului, deci punând

$$[\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{W}] = \tau [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3] = \tau E,$$

regula de transformare a trivectorilor contravarianți va fi

$$\tau = A\tau' \quad \text{sau} \quad \tau' = A^{-1}\tau \tag{16',IV}$$

Transformările (16,IV) și (16',IV) sunt contragrediente. Trivectorul contravariant se transformă astfel, încât noua sa componentă se obține din cea veche prin amplificare cu inversul determinantului transformării bazei.

Acest determinant este format cu elementele matricei de transformare a componentelor vectorilor contravarianți.

Orice mărime pseudo-scalară, care se transformă ca trivectorul contravariant, deci după legea de transformare (16',IV) se numește *capacitate scalară.*

Reluând raționamentele făcute și considerând trivectorii covarianți, vom avea pentru trivectorul fundamental E^{-1} următoarea lege de transformare:

$$E'^{-1} = A^{-1} E^{-1} \quad \text{sau} \quad [\bar{e}'^1 \bar{e}'^2 \bar{e}'^3] = \Lambda^{-1} [\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3], \tag{17,IV}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru un trivector covariant oarecare $[\overline{U}_* \overline{V}_* \overline{W}_*]$, definit prin componenta sa unică τ_*.

$$|\overline{U}_* \overline{V}_* \overline{W}_*| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [\overline{e}^1 \overline{e}^2 \overline{e}^3] = \tau_* E^{-1},$$

vom obţine legea de transformare:

$$\tau_* = A_*^{-1} \tau'^{1}_* \quad \text{sau} \quad \tau'_* = A\tau_*. \qquad (17', \text{IV})$$

Orice mărime pseudo-scalară, care se transformă ca trivectorul covariant, deci după legea de transformare (17', IV), se numeşte *densitate scalară.*

Densităţi şi capacităţi vectoriale. Criteriul măsurii precizează deasemenea relaţiile dintre vectori şi bivectori. Fie $(\overline{U} \times \overline{V})$ un bivector contravariant, raportat la o bază $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

Vom avea

$$(\overline{U} \times \overline{V}) = (U^i \overline{e}_i) \times (V^j \overline{e}_j) = U^i V^j (\overline{e}_i \times \overline{e}_j).$$

Este evident că singurele componente nenule se obţin pentru $i \neq j$, iar dacă vom ţine seama şi de anticomutativitatea produsului vectorial, vom putea scrie

$$(U \times \overline{V}) = (U^i V^j - U^j V^i)(\overline{e}_i \times \overline{e}_j) = \begin{vmatrix} U^i & V^i \\ U^j & V^j \end{vmatrix} (\overline{e}_i \times \overline{e}_j); \quad (i < j)$$

sau

$$(\overline{U} \times \overline{V}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} U^i & V^i \\ U^j & V^j \end{vmatrix} (\overline{e}_i \times \overline{e}_j) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} U^i & V^i \\ U^j & V^j \end{vmatrix} [\overline{e}_i \overline{e}_j]$$

fără nicio restricţie şi folosind noţiunea de produs exterior (§ 69).

Ţinând seama de relaţiile (9, IV) între bivectorii contravarianţi şi vectorii covarianţi, vom putea scrie

$$\overline{U} \times \overline{V} = E(P_k \overline{e}^k), \qquad (18, \text{IV})$$

unde

$$P_k = \begin{vmatrix} U^i & V^i \\ U^j & V^j \end{vmatrix}$$

reprezintă componentele bivectorului contravariant în raport cu baza bivectorială $\overline{e}_1 \times \overline{e}_2$; $\overline{e}_2 \times \overline{e}_3$; $\overline{e}_3 \times \overline{e}_1$, indicii i, j, k fiind daduşi prin permutări circulare din şirul 1, 2, 3.

Raportul dintre un bivector şi un trivector, ambii contravarianţi, este un vector covariant.

In adevăr, trecând la o nouă bază $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, vom avea

$$\overline{U} \times \overline{V} = E(P_k a_l^k \overline{e}'^l) \quad \text{cu} \quad E = A^{-1} E'.$$

deci

$$\overline{U} \times V = (A^{-1} P_k a_l^k) \overline{e}'^l E' = E' (P'_l \overline{e}'^l),$$

ceeace arată că noile componente P'_l ale bivectorului contravariant sunt de forma

$$P'_l = A^{-1} a_l^k P_k; \quad P_k = A A_k^l P'_l. \qquad (19, \text{IV})$$

Scanned with OKEN Scanner

Legea de transformare, astfel obținută, diferă de aceea a vectorilor covarianți, numai prin prezența factorului A^{-1}. Formula (19, IV) arată astfel că $\overline{U} \times \overline{V}$ *se obține dintr'un vector covariant prin amplificarea cu o capacitate scalară*. Aceasta explică denumirea de capacitate vectorială dată bivectorului contravariant.

Orice mărime măsurabilă cu trei unități, care se transformă după legea de transformare (19, IV), deci ca un vector covariant amplificat cu determinantul A^{-1} al transformării componentelor vectorilor contravarianți, se numește *capacitate vectorială covariantă.*

Orice capacitate vectorială covariantă poate fi considerată ca produsul unui vector covariant printr'o capacitate scalară.

In mod analog, pornind dela un bivector covariant de forma $\overline{U}_* \times \overline{V}_*$ vom avea:

$$\overline{U}_* \times \overline{V}_* = (U_i \bar{e}^i) \times (V_j \bar{e}^j) = U_i V_j (\bar{e}^i \times \bar{e}^j) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} U_i & U_j \\ V_i & V_j \end{vmatrix} (\bar{e}^i \times \bar{e}^i) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} U_i & U_j \\ V_i & V_j \end{vmatrix} [\bar{e}^i \bar{e}^i],$$

deci, ținând seama de relațiile între bazele reciproce deducem:

$$\overline{U}_* \times \overline{V}_* = E^{-1}(Q^k \bar{e}_k); \quad Q^k = \begin{vmatrix} U_i & U_j \\ V_i & V_j \end{vmatrix}.$$

Raportul dintre un bivector și un trivector, ambii covarianți, este un vector contravariant.

Trecerea la o nouă bază ne conduce la formulele

$$\overline{U}_* \times \overline{V}_* = (A Q^k A_k^i)\, \bar{e}'_i E'^{-1} = E'^{-1} (Q'^i \bar{e}'_i),$$

componentele Q^k transformându-se după legea

$$Q'^i = A A_k^i Q^k; \quad Q^k = A^{-1} a_i^k Q^i. \qquad (20, IV)$$

Legea astfel obținută se deduce din aceea a vectorilor contravarianți prin amplificare cu factorul A: Din formula (20, IV) se vede dealtfel că $\overline{U}_* \times \overline{V}_*$ *se obține dintr'un vector contravariant prin amplificare cu o densitate scalară. El este un exemplu de mărime pseudo-vectorială.*

Orice mărime măsurabilă cu trei unități, care se transformă după legea de transformare (20, IV), deci ca un vector contravariant amplificat prin determinantul A, se numește *densitate vectorială contravariantă.*

Formulele de transformare obținute pentru bivectori explică pentruce în Calculul vectorial produsul vectorial este considerat ca un vector fără niciun fel de restricție, înafară de aceea a despărțirii vectorilor în polari și axiali.

Criteriul măsurii ne arată, în primul rând, că produsul vectorial, ca operație algebrică, ne conduce nu la un vector, ci la o capacitate (sau o densitate) vectorială. Deasemenea, explică și introducerea celor două feluri de vectori polari și axiali cu titlul de justificare a proprietății curioase a produselor vectoriale de a-și schimba orientarea odată cu triedrul fundamental,

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, în spaţiul metric determinantul A al transformărilor ortogonale ale axelor de coordonate ia valorile ± 1. Prin urmare, formulele (19, IV) şi (20, IV) vor avea înfăţişarea legilor de transformare ale vectorilor. Pe de altă parte, în axe ortogonale dispare şi deosebirea dintre caracterele covariant şi contravariant.

Singura nepotrivire eventuală între vectori şi bivectori rămâne în faptul că $A=\pm 1$, ceeace impune clasificarea vectorilor în polari, independenţi de orientarea spaţiului, şi axiali, dependenţi de această orientare, prin aceea că modul lor de transformare este legat de factorul A.

Numai considerarea spaţiului afin şi a transformărilor generale ale bazei permite separarea justă a vectorilor de bivectori în toată generalitatea.

§ 110 Forme pătratice şi biliniare în spaţiul afin

Trecerea dela un sistem de componente la altul arată importanţa formei fundamentale în spaţiul metric euclidian. Toate proprietăţile geometrice ale spaţiului se exprimă într'un sistem de coordonate carteziene oarecare cu ajutorul acestei forme.

Vom spune că cele două expresii ale sale $g_{ij}V^iV^j$ şi $g^{ij}V_iV_j$ sunt *reciproce*, referindu-ne la matricele

$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\| \quad \text{şi} \quad \left\| \begin{matrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{matrix} \right\| \qquad (21, IV)$$

formate cu coeficienţii lor.

Proprietăţile acestor forme decurg din proprietăţile generale ale formelo pătratice.

Vom numi *formă pătratică* reală cu trei variabile x^1, x^2, x^3 o expresie de forma

$$g(x,x)=g_{11}x^1x^1+g_{12}x^1x^2+g_{13}x^1x^3+g_{21}x^2x^1+g_{22}x^2x^2+g_{23}x^2x^3+ \\ +g_{31}x^3x^1+g_{32}x^3x^2+g_{33}x^3x^3,$$

deci un polinom omogen de gradul al doilea cu coeficienţi g_{ij} reali, în variabilele x^1, x^2, x^3.

Vom putea presupune în expresia precedentă $g_{ij}=g_{ji}$. In adevăr, în caz contrar, strângând la un loc termenii $g_{ij}x^ix^j+g_{ji}x^jx^i$, vom avea

$$g_{ij}x^ix^j+g_{ji}x^jx^i=(g_{ij}+g_{ji})x^ix^j=\frac{1}{2}(g_{ij}+g_{ji})x^ix^j+\frac{1}{2}(g_{ji}+g_{ij})x^jx^i.$$

Obţinem astfel acelaşi coeficient pentru x^ix^j, ca şi pentru x^jx^i, deci putem simetriza coeficienţii unei forme pătratice.

O formă pătratică se va scrie condensat, astfel:

$$g(x,x)=g_{11}x^1x^1+2g_{12}x^1x^2+2g_{13}x^1x^3+g_{22}x^2x^2+2g_{23}x^2x^3+ \\ +g_{33}x^3x^3=g_{ij}x^ix^j, \qquad (22, IV)$$

cu notaţia tensorială.

Scanned with OKEN Scanner

Determinantul g al coeficienţilor se va numi *discriminantul* formei pătratice.

Vom numi *singulare* formele pentru care $g=0$, şi *nesingulare* cele pentru care $g \neq 0$.

Fiecărei forme pătratice $g(x, x)$ i se asociază o nouă formă cu două serii de variabile $x^1, x^2, x^3; y^1, y^2, y^3$;

$$g(x, y)=g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + g_{13}x^1y^3 + g_{21}x^2y^1 + g_{22}x^2y^2 + g_{23}x^2y^3 + \\ + g_{31}x^3y^1 + g_{32}x^3y^2 + g_{33}x^3y^3 = g_{ij}x^iy^j, \qquad (23,\text{IV})$$

numită forma *polară* a primei. Deoarecè această formă conţine două serii de variabile la puterea întâi, ea se numeşte formă *biliniară*, prin analogie cu polinoamele omogene de gradul întâi, numite forme liniare,

O formă liniară are expresia

$$l(x) = l_1x^1 + l_2x^2 + l_3x^3 = l_ix^i. \qquad (24,\text{IV})$$

Intre o formă pătratică şi polara sa există o relaţie fundamentală, dată de desvoltarea expresiei

$$g(x + \lambda y, x + \lambda y) = g_{ij}(x^i + \lambda y^i)(x^j + \lambda y^j) = \\ = g_{ij}(x^ix^j + \lambda x^iy^j + \lambda y^ix^j + \lambda^2 y^iy^j) = \\ = g_{ij}x^ix^j + 2\lambda g_{ij}x^iy^j + \lambda^2 g_{ij}y^iy^j.$$

In adevăr, avem,

$$\lambda g_{ij}x^iy^j = \lambda g_{ji}x^jy^i = \lambda g_{ij}x^jy^i,$$

deoarece putem schimba indicii muţi, de exemplu pe i cu j şi apoi putem ţine seamă că $g_{ji}=g_{ij}$.

Expresiile din membrul al doilea sunt cunoscute, astfel că avem relaţia:

$$g(x+\lambda y; x+\lambda y) = g(x, x)+2\lambda g(x, y)+\lambda^2 g(y, y), \qquad (25,\text{IV})$$

unde λ este un parametru scalar.

Forma fundamentală $g_{ij}V^iV^j$ este o formă pătratică nesingulară, deoarece $g \neq 0$; variabilele sale sunt V^1, V^2, V^3, deci componentele vectorului $\overline{V}$. Vom putea scrie simbolic

$$g(\overline{V}, \overline{V}) = g_{ij}V^iV^j = V^2, \qquad (26,\text{IV})$$

forma sa polară fiind

$$g(\overline{U}, \overline{V}) = g(\overline{V}, \overline{U}) = g_{ij}U^iV^j = g_{ij}V^iU^j = \overline{U}\,\overline{V}. \qquad (27,\text{IV})$$

Deci forma pătratică fundamentală reprezintă norma unui vector $\overline{V}$, iar forma sa polară produsul scalar a doi vectori.

Relaţia (25,IV) devine

$$g(\overline{U}+\lambda\overline{V}, \overline{U}+\lambda\overline{V}) = g(\overline{U}, \overline{V}) + 2\lambda g(\overline{U}, \overline{V}) + \lambda^2 g(\overline{V}, \overline{V}) \qquad (28,\text{IV})$$

şi poate fi interpretată imediat vectorial:

$$(\overline{U}+\lambda\overline{V})^2 = U^2 + 2\lambda\overline{U}\,\overline{V} + \lambda^2 V^2. \qquad (29,\text{IV})$$

Scanned with OKEN Scanner

Analogia făcută între formele pătratice şi forma fundamentală ne dă sugestia de *a interpreta o formă pătratică oarecare ca forma fundamentală a spaţiului,* considerând-o ca norma unui vector într'un sistem de coordonate.

Se pune, însă problema dacă această interpretare este posibilă. Este evident că în primul rând va fi necesar ca forma considerată să fie nesingulară, deci ca $g \neq 0$, dar această condiţie nu este singura.

In adevăr, ştim că într'un sistem de coordonate carteziene ortogonale norma unui vector este suma pătratelor componentelor sale. Deci, *dacă o formă pătratică $g(x,x)$ reprezintă norma unui vector $\overline{V}$, atunci trebue ca printr'o schimbare de coordonate, această formă să devină o sumă de pătrate,* adică să avem

$$g(x,x)=g(\xi,\xi)=(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2,$$

unde ξ^1, ξ^2, ξ^3 sunt noile variabile, după schimbarea coordonatelor.

Se vede că o astfel de formă nu se anulează decât dacă

$$\xi^1=\xi^2=\xi^3=0.$$

In cazul unei forme fundamentale, această condiţie este îndeplinită dela sine, fiindcă norma sau modulul unui vector nu se anulează decât dacă vectorul însuşi este nul.

O formă patratică nesingulară $g(x,x)$, care nu se anulează decât pentru $x^1=x^2=x^3=0$ se numeşte *definită.*

Forma fundamentală metrică $g(\overline{V},\overline{V})=V^2$ este *definită.*

Orice formă definită îşi păstrează semnul, pentru orice valori date variabilelor (§ 99).

In adevăr, să presupunem că am avea $g(x,x)>0$ şi $g(y,y)<0$.

In acest caz putem să determinăm două valori ale lui λ, astfel încât $g(x+\lambda y, x+\lambda y)=0$.

Să considerăm ecuaţia

$$g(x+\lambda y, x+\lambda y)=g(x,x)+2\lambda g(x,y)+\lambda^2 g(y,y)=0$$

dedusă din (25,IV).

Această ecuaţie de gradul al doilea în λ admite rădăcini reale, dacă realizantul său este pozitiv sau nul, deci dacă

$$g^2(x,y)-g(x,x)\,g(y,y)\geqq 0.$$

Ori $g(x,x)\,g(y,y)<0$, deci membrul întâi este sigur pozitiv dacă forma îşi poate schimba semnul. Prin urmare, ecuaţia are rădăcini reale şi deci forma $g(x,x)$ se anulează şi pentru alte valori decât $x^1=x^2=x^3=0$, ceeace este contrar ipotezei făcute că $g(x,x)$ este definită.

Reţinem deci proprietatea formelor definite:

$$g(x,x)\,g(y,y)-g^2(x,y)\geqq 0. \qquad (30,IV)$$

Egalitatea are loc pentru $x^1+\lambda y^1=x^2+\lambda y^2=x^3+\lambda y^3=0$, deci când valorile x^1,x^2,x^3 şi y^1,y^2,y^3 sunt proporţionale.

In cazul unei forme fundamentale, este evident că ea nu-şi poate schimba semnul, deoarece este un pătrat, în speţă pătratul modulului unui vector. Proprietatea (30,IV) devine

$$g(U,\overline{U})\,g(\overline{V},\overline{V})-g^2(\overline{U},\overline{V})\geqq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$U^2 V^2 - (\overline{U}, V)^2 = [\overline{U} \times \overline{V}]^2 \geq 0,$$

ceeace este evident, egalitatea având loc când vectorii $\overline{U}$ şi $\overline{V}$ sunt coliniari.

Forma fundamentală $g_{ij} V^i V^j$ este totdeauna pozitivă.

O formă definită se numeşte *pozitiv definită*, dacă semnul său este pozitiv (înafară de cazul când este nulă) şi *negativ definită*, dăcă semnul său este negativ.

Forma fundamentală este pozitiv definită.

Ce se întâmplă cu o formă pătratică, dacă schimbăm sistemul de referinţă?

In cazul formei fundamentale, ea având o semnificaţie independentă de orice sistem de referinţă, reprezentând norma unui vector, trebue să-şi păstreze toate proprietăţile.

Să aplicăm o transformare de coordonate unei forme pătratice $g_{ij} x^i x^j$.

Ştim că transformarea coordonatelor unui punct se face ca transformarea componentelor contravariante ale vectorilor. Vom admite că transformarea formei $g_{ij} x^i x^j$ se face înlocuind variabilele vechi prin cele noi, cu ajutorul formulelor de transformare.

Vom spune că orice mărime, care se transformă prin înlocuirea vechilor variabile în funcţie de cele noi, este un *invariant* sau o *mărime scalară*.

Vom avea

$$g_{ij} x^i x^j = g_{ij} a^i_k x'^k a^j_l x'^l = g_{ij} a^i_k a^j_l x'^k x'^l,$$

Dacă notăm

$$g'_{kl} = a^i_k a^j_l g_{ij}, \tag{31,IV}$$

atunci vom putea scrie

$$g_{ij} x^i x^j = g'_{kl} x'^k x'^l. \tag{32,IV}$$

Deci, *o formă pătratică invariantă se transformă prin trecerea dela un sistem cartezian la altul, într'o formă pătratică.*

Să calculăm discriminantul formei obţinute.

Vom avea:

$$g' = \begin{vmatrix} g'_{11} & g'_{12} & g'_{13} \\ g'_{21} & g'_{22} & g'_{23} \\ g'_{31} & g'_{32} & g'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{ij} a^i_1 a^j_1 & g_{ij} a^i_1 a^j_2 & g_{ij} a^i_1 a^j_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{vmatrix} = gA^2$$

Se vede că dacă $g \neq 0$, atunci şi $g' \neq 0$, deoarece $A \neq 0$.

Prin urmare: *O formă pătratică nesingulară se transformă într'o formă pătratică nesingulară prin schimbarea sistemului de referinţă.*

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, dacă o formă pătratică este nesingulară într'un sistem de referință, ea va rămâne nesingulară în oricare alt sistem; deasemenea o formă singulară într'un sistem este singulară în oricare altul.

Forma reciprocă a formei fundamentale are aceleași proprietăți: ea este nesingulară, deoarece discriminantul său este $\frac{1}{g} \neq 0$ și *pozitiv definită.*

In adevăr, dacă notăm cu $g^{ij} u_i u_j$ reciproca lui $g_{ij} x^i x^j$, folosind variabilele u_1, u_2, u_3, în locul componentelor covariante ale coordonatelor, vom avea

$$u_i = g_{ij} x^j; \quad x^i = g^{ij} u_j, \tag{33,IV}$$

conform cu formulele de transformare (183,III).

Dacă $g^{ij} u_i u_j$ n'ar fi formă definită, ea s'ar putea anula și pentru alte valori decât $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

Cum

$$g^{ij} u_i u_j = g_{ij} x^i x^j; \tag{34,IV}$$

pentru aceste valori vom avea și $g_{ij} x^i x^j = 0$, deci $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, fiindcă $g_{ij} x^i x^j$ este presupusă definită.

Insă, sistemul

$$x^j = g^{ij} u_i = 0,$$

din care trebue să deducem valorile lui u_1, u_2, u_3, nu poate avea alte soluții decât zero, deoarece determinantul său este $|g^{ij}| \neq 0$, deci forma $g^{ij} u_i u_j$ nu se anulează decât pentru $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

Prin aceasta se stabilește că *reciproca unei forme definite este o formă definită, iar din egalitatea* (34,IV) *se deduce și că reciproca unei forme pozitiv definite este pozitiv defintă.*

Variabilele u_1, u_2, u_3, utilizate în scrierea formei reciproce, se vor transforma după legea componentelor covariante, ceeace se vede din formulele (33,IV)

Dacă schimbăm sistemul de referință și dacă voim ca legătura dintre o formă pătratică și reciproca sa să fie invariantă, *atunci vom considera pe* u_1, u_2, u_3 *ca fiind componente covariante.*

Cu aceasta, vom putea scrie

$$g^{ij} u_i u_j = g^{ij} (A_i^k u'_k)(A_j^l u'_l) = g^{ij} A_i^k A_j^l u'_k u'_l,$$

transformând pe u_i după formulele

$$u_i = A_i^k u'_k.$$

Notând

$$g'^{kl} = g^{ij} A_i^k A_j^l, \tag{35,IV}$$

forma reciprocă se va transforma astfel:

$$g^{ij} u_i u_j = g'^{kl} u'_k u'_l,$$

deci va deveni tot o formă pătratică nesingulară în variabilele noi u'_1, u'_2, u'_3. Egalitățile (33,IV) și (34,IV) arată în plus că formele transformate rămân reciproce, deci:

Scanned with OKEN Scanner

Două forme pătratice nesingulare, reciproce într'un sistem de referință, rămân reciproce în orice alt sistem de referință, dacă variabilele lor sunt legate prin relațiile (33,IV), adică dacă sunt considerate ca fiind componente covariante și contravariante ale aceluiași vector, în raport cu o formă fundamentală $g_{ij}x^i x^j$.

Proprietatea este generală, adică cele două forme considerate pot fi diferite de forma fundamentală, important fiind ca variabilele x^i și u_i să se transforme contravariant și covariant.

Prin urmare, introducerea formei fundamentale metrice conduce la studiul general al formelor pătratice nesingulare și ale reciprocelor lor.

Dacă o astfel de formă este considerată invariantă, atunci reciproca sa va fi tot invariantă, dacă variabilele u_1, u_2, u_3 sunt interpretate ca fiind componente covariante ale unui vector.

Formele pătratice invariante se întâlnesc foarte des în aplicații în Mecanică, Electricitate, Rezistența materialelor, etc.

§ 111. Forme pătratice de vectori. Polaritate

Forma fundamentală este un prim exemplu de formă pătratică de vectorii Formula (26, IV) pune în evidență expresia sa și ne conduce la următoarea definiție

Vom numi *formă pătratică* de vectorul variabil $\overline{V}$ orice formă pătratică simetrică

$$p(\overline{V}, \overline{V}) = p_{ij} V^i V^j, \tag{36,IV}$$

cu conficienți constanți p_{ij} într'un sistem de referință.

Vom presupune că această formă este invariantă, deci că valoarea sa într'un alt sistem se obține înlocuind componentele V^i prin expresiile lor în funcție de noile componente V'^i.

Forma

$$p(\overline{U}, \overline{V}) = p_{ij} U^i V^j = p_{ij} V^i U^j = p(\overline{V}, \overline{U}) \tag{36,IV}$$

este *polara* primei forme (36,IV).

Vom spune că vectorii $\overline{U}$ și $\overline{V}$ sunt *conjugați* în raport cu forma $p(\overline{V}, V)$, dacă

$$p(\overline{U}, \overline{V}) = 0; \quad p_{ij} U^i V^j = 0. \tag{37,IV}$$

Dacă vectorul $\overline{U}$ este dat, *se vede că există o infinitate de vectori* $\overline{V}$, *conjugați cu* $\overline{U}$, *și că toți sunt coplanari în general.*

In adevăr, desvoltând ecuația (37,IV) obținem

$$(p_{11}U^1 + p_{21}U^2 + p_{31}U^3)V^1 + (p_{12}U^1 + p_{22}U^2 + p_{32}U^3)V^2 + \\ + (p_{13}U^1 + p_{23}U^2 + p_{33}U^3)V^3 = 0 \tag{37',IV}$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum parantezele reprezintă cantități determinate, vom obține ecuația unui plan, cu condiția ca să nu avem simultan

$$p_{11}U^1+p_{21}U^2+p_{31}U^3=0;$$
$$p_{12}U^1+p_{22}U^2+p_{32}U^3=0;$$
$$p_{13}U^1+p_{23}U^2+p_{33}U^3=0.$$

Acest sistem omogen nu admite soluții diferite de zero decât dacă determinantul său

$$p=|p_{ij}|=0,$$

deci dacă forma $p(\overline{V},\overline{V})$ este singulară.

Dacă forma pătratică $p(\overline{V},\overline{V})$ este nesingulară, atunci toți vectorii conjugați cu un vector dat $\overline{U}$ în raport cu această formă sunt coplanari.

Planul, care conține toți vectorii conjugați cu un vector dat $\overline{U}$, se numește *planul polar* al acestui vector în raport cu forma dată.

Dacă $\overline{U}$ este conjugat cu $\overline{V}$, atunci și $\overline{V}$ este conjugat cu $\overline{U}$ și deci planul polar al lui $\overline{V}$ conține pe $\overline{U}$.

Dacă forma pătratică nesingulară $p_{ij}V^iV^j$ se poate anula și pentru alți vectori decât vectorul nul, se spune că este *nedefinită* (sau *indefinită*).

Vom admite că forma considerată poate fi definită, sau nedefinită.

Dacă $p_{ij}U^iU^j$ este definită, atunci niciun vector $\overline{V}$ nu poate fi paralel cu planul său polar.

In adevăr, ecuația planului polar al lui $\overline{U}$ este (37',IV) sau sub formă condensată (37,IV). Dacă $\overline{U}$ verifică această ecuație, va trebui să avem

$$p_{ij}U^iV^j=0 \quad \text{pentru} \quad V^i=U^i, \quad \text{deci} \quad p_{ij}U^iU^j=0,$$

adică vectorul $\overline{U}$ anulează forma pătratică, ceeace nu este posibil dacă $\overline{U}\neq 0$.

Dacă $p_{ij}U^iU^j$ este nedefinită, atunci există o infinitate de vectori, care sunt paraleli cu planul lor polar.

Toți acești vectori sunt paraleli cu generatoarele unui con de gradul al doilea Ω, a cărui ecuație este chiar $p_{ij}x^ix^j=0$ (fig. 98), numit *con nul*.

Noțiunea de vectori conjugați pune în evidență o mulțime de triedre de referință legate intrinsec de forma pătratică $p_{ij}V^iV^j$ nesingulară, definită sau indefinită.

Să considerăm un vector oarecare $\overline{u}$ și planul său polar P_u și să presupunem că $\overline{u}$ nu este paralel cu planul său polar. Orice vector, care nu este paralel cu o generatoare a conului $p_{ij}x^ix^j=0$, poate fi ales ca vector $\overline{u}$.

Este evident că există astfel de vectori; altfel, dacă pentru orice vector $\overline{u}$ am avea $p_{ij}u^iu^j=0$, forma ar avea toți coeficienții nuli, adică ar fi identic nulă.

Vectorul $\overline{u}$ fiind astfel ales, să considerăm un al doilea vector $\overline{v}$ din planul polar al lui $\overline{u}$ și planul polar P_v al acestuia. Vom presupune dea-

Scanned with OKEN Scanner

semenea că $\bar{v}$ nu este paralel cu planul său polar, ceeace este posibil, fiindcă în caz contrar conul nul ar trebui să conţină întreg planul P_v, deci ar fi un con degenerat.

Planele P_u şi P_v se intersectează după o dreaptă. Ele nu pot fi paralele, fiindcă în caz contrar $\bar{v}$ ar fi paralel cu planul său polar.

Pe dreapta de intersecţie vom alege un vector $\bar{w}$. Vectorii $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ formează un triedru. Să observăm că aceşti trei vectori sunt conjugaţi între ei, fiecare fiind conjugat cu ceilalţi doi.

Planul polar P_u al lui $\bar{u}$ conţine pe $\bar{v}$ şi $\bar{w}$. Deasemenea planul polar P_v al lui $\bar{v}$ va conţine pe $\bar{u}$ şi $\bar{w}$ şi planul polar P_w al lui $\bar{w}$ va conţine pe $\bar{u}$ şi $\bar{v}$.

Vom numi acest triedru *triedru autoconjugat sau autopolar* în raport cu forma dată. Interpretarea geometrică este foarte interesantă. Dacă egalăm forma cu zero, ecuaţia

$$p_{ij}x^i x^j = 0 \qquad (38,IV)$$

va reprezenta un con cu vârful în origine. Acest con va fi real, dacă forma este nedefinită, şi imaginar dacă este definită.

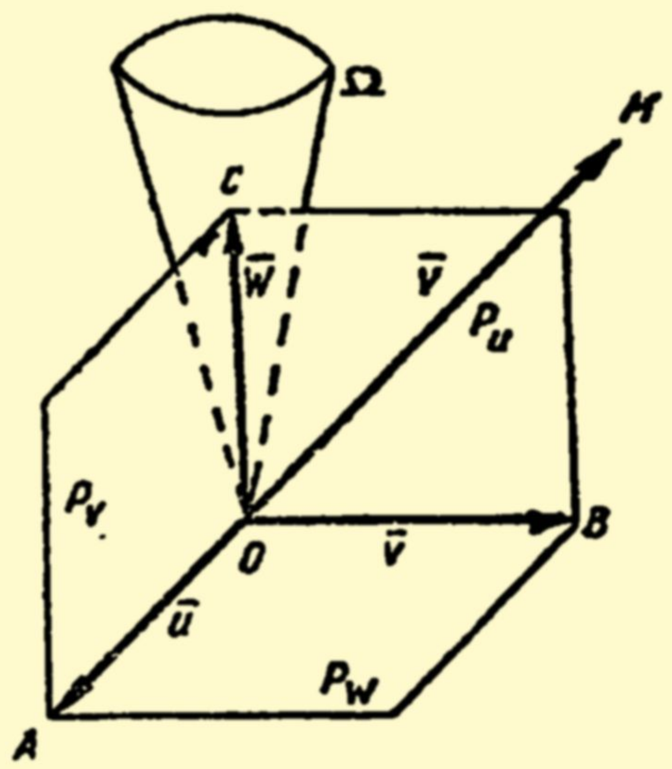


Fig. 98

In cazul când conul nul este real, planul polar al vectorului $\bar{V}$ poate fi interpretat ca planul polar al punctului M din spaţiu, al cărui vector de poziţie este $\bar{r} = \bar{V}$.

Cei trei vectori $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ formează atunci un triedru, ale cărui feţe sunt planele polare a trei puncte A, B, C în raport cu conul nul. Să observăm dealtfel că notând (fig. 98)

$$\bar{OA} = \bar{u}, \quad \bar{OB} = \bar{v}, \quad \bar{OC} = \bar{w}.$$

planele polare ale oricărui punct de pe direcţiile $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sunt P_u, P_v, P_w. Triedrul $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ va fi numit *triedru autoconjugat* în raport cu conul nul.

Se vede deci că o formă pătratică de vectori defineşte un con de gradul al doilea. Acest con poate fi numit *conul nul* sau conul *direcţiilor nule* pentru forma $p_{ij}V^iV^j$.

In cazul când forma considerată este chiar forma fundamentală $g_{ij}V^iV^j$ conul nul este imaginar şi se numeşte *conul isotrop* al spaţiului. Observăm că în cazul unui con nul imaginar, planele polare sunt reale şi deci triedrul conjugat este real.

Fiind dată o formă nesingulară $p_{ij}V^iV^j$, există o infinitate de triedre autoconjugate. Toate aceste triedre sunt invariant legate de forma pătratică şi geometric vorbind, de conul nul.

Din egalarea unei forme pătratice cu o constantă se obţine ecuaţia unei cuadrice pentru care, deasemenea, se poate obţine într'o infinitate de moduri un triedru autoconjugat, format din planele polare a trei puncte, astfel încât studiul cuadricelor este strâns legat de acela al formelor pătratice.

Scanned with OKEN Scanner

*§ 112. Forme liniare de vectori. Structura formelor pătratice

In aplicațiile Calculului vectorial intervin pe lângă formele pătratice de vectori și *forme liniare* de vectori.

O formă liniară de un vector $\overline{V}$ este o expresie de forma

$$l(\overline{V})=l_1 V^1+l_2 V^2+l_3 V^3=l_i V^i, \qquad (39,IV)$$

unde l_1, l_2, l_3 sunt cantități scalare date.

O astfel de formă trebue să aibă un caracter invariant, adică să se schimbe prin simpla înlocuire a componentelor V^1, V^2, V^3 prin expresiile lor în funcție de noile componente.

Vom avea deci:

$$l(\overline{V})=l_i V^i=l_i(a^i_k V'^k)=l_i a^i_k V'^k$$

Punând

$$l'_k=a^i_k l_i \qquad (40,IV)$$

observăm că l_1, l_2, l_3 se schimbă în l'_1, l'_2, l'_3 prin formulele de transformare ale vectorilor covarianți.

Deci, *într'o formă liniară de vectori, coeficienții sunt componentele covariante ale unui vector $\overline{L}$ determinat.*

Aceasta înseamnă că *orice formă liniară de un vector $\overline{V}$ poate fi considerată ca un produs scalar și vom avea*

$$l(\overline{V})=\overline{L}\,\overline{V} \qquad (41,IV)$$

Invers, orice produs scalar a doi vectori este o formă liniară în raport cu fiecare din ei.

In particular, dacă raportăm un vector oarecare $\overline{V}$ la o bază $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, expresiile componentelor sale scalare sunt forme liniare de acest vector. In adevăr, avem:

$$\overline{V}=(\overline{u}'\,\overline{V})\overline{u}+(\overline{v}'\overline{V})\overline{v}+(\overline{w}'\overline{V})\overline{w}.$$

Utilizarea notației tensoriale conduce la același rezultat și arată că putem considera și forme liniare de vectori, în care componentele vectorului pot fi covariante. In expresia (41,IV), considerând ca variabil vectorul $\overline{L}$ și păstrând pe $\overline{V}$ fix, avem o formă liniară, în care vectorul variabil $\overline{L}$ este considerat covariant.

Produsul a două forme liniare de vectori este o formă pătratică de vectori.

In adevăr, fiind date două forme liniare $l(\overline{V})$ și $m(\overline{V})$, produsul lor va fi

$$l(\overline{V})\,m(\overline{V})=(l_i V^i)(m_j V^j)=l_i m_j V^i V^j;$$

coeficienții $l_i m_j$ nu sunt însă simetrici, deaceea îi vom simetriza scriind încă odată produsul

$$l(\overline{V})\,m(\overline{V})=(l_j V^j)\,(m_i V^i)=l_j m_i V^i V^j,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, luând semisuma,

$$l(\bar{V})\,m(\bar{V})=\frac{1}{2}\,(l_i m_j+m_i l_j)V^i V^j=q_{ij}V^i V^j. \qquad (42,IV)$$

Coeficienţii

$$q_{ij}=\frac{1}{2}\,(l_i m_j+m_i l_j);\quad q_{ij}=q_{ji}$$

sunt simetrici, astfel încât expresia (42,IV) este o formă pătratică.

Este uşor de verificat că discriminantul formei $l(\bar{V})\,m(\bar{V})$ este nul, deci *produsul a două forme liniare este o formă pătratică singulară.* (Exerciţiu)

Conul nul de ecuaţie

$$l(\bar{V})\,m(\bar{V})=l_i m_j V^i V^j=0$$

se descompune în două plane

$$l(\bar{V})\equiv l_i V^i=0 \quad \text{şi} \quad m(\bar{V})\equiv m_i V^i=0.$$

Planul polar al unui vector U în raport cu acest con degenerat are ecuaţia

$$q(\bar{U},\bar{V})=q_{ij}U^i V^j=\frac{1}{2}\,(l_i m_j+m_i l_j)U^i V^j=0,$$

care se poate scrie

$$(l_i U^i)(m_j V^j)+(m_i U^i)(l_j V^j)=0$$

sau

$$l(\bar{U})\,m(\bar{V})+m(\bar{U})\,l(\bar{V})=0. \qquad (43,IV)$$

Forma polară a formei $l(\bar{U})\,m(\bar{V})$ este deci

$$q(\bar{U},\bar{V})=\frac{1}{2}\,[l(\bar{U})\,m(\bar{V})+m(\bar{U})l(\bar{V})]. \qquad (44,IV)$$

Din ecuaţia (43,IV) se vede că planul polar al vectorului $\bar{U}$ trece prin intersecţia planelor $l(\bar{V})=0$ şi $m(\bar{V})=0$, care definesc deci un fascicol de plane.

Dacă un vector $\bar{U}$ este în planul $l(\bar{V})=0$, atunci planul său polar este chiar $l(\bar{V})=0$, deci: *Planele polare ale vectorilor din planele* $l(\bar{V})=0$ *şi* $m(\bar{V})=0$ *sunt chiar aceste două plane.*

Planul polar al unui vector situat pe dreapta de intersecţie

$$l(\bar{U})=0;\quad m(\bar{U})=0$$

a celor două plane, care formează conul nul, este nedeterminat.

In cazul când în loc de produsul a două forme diferite, se consideră pătratul unei singure forme liniare $l(\bar{U})$, se obţine forma pătratică singulară

$$l^2(\bar{V})=l_i l_j V^i V^j=q_{ji}V^i V^j=q(\bar{V},\bar{V}),$$

unde

$$q_{ij}=q_{ji}=l_i l_j.$$

Forma sa polară este

$$q(\bar{U},\bar{V})=l(\bar{U})\,l(\bar{V}).$$

Scanned with OKEN Scanner

şi conul său nul se reduce la două plane confundate, de ecuaţie

$$q(\bar{V}, \bar{V}) - l^2(\bar{V}) = 0.$$

In acest caz, *planul polar al unui vector* $\bar{U}$, *care nu este cuprins în planul* $l(\bar{U}) = 0$, este

$$l(\bar{V}) = 0,$$

iar planul polar al oricărui vector din $l(\bar{U}) = 0$ *este nedeterminat.*

Vom face observaţia că produsul a două forme liniare se poate pune sub forma unei diferenţe de două pătrate de forme liniare.

In adevăr, avem:

$$l(\bar{V})\, m(\bar{V}) = \left(\frac{l(\bar{V}) + m(\bar{V})}{2}\right)^2 - \left(\frac{l(\bar{V}) - m(\bar{V})}{2}\right)^2. \qquad (45,IV)$$

In acest caz, toate planele polare ale vectorilor din spaţiu formează un fascicol determinat de planele $l(\bar{V}) = 0$ şi $m(\bar{V}) = 0$, sau, ceeace este acelaşi lucru, de planele

$$l(\bar{V}) + m(\bar{V}) = 0 \text{ şi } l(\bar{V}) - m(\bar{V}) = 0,$$

care sunt distincte, dacă cele două forme nu sunt proporţionale.

Vom numi *forme liniare liniar dependente* două forme liniare $a(\bar{V})$ şi $b(\bar{V})$, între care există relaţia

$$\lambda a(\bar{V}) + \mu b(\bar{V}) \equiv 0,$$

λ şi μ fiind doi scalari diferiţi de zero.

Două forme liniare, între care această relaţie nu poate exista, decât dacă $\lambda = 0$ şi $\mu = 0$, sunt *liniar independente.*

Fiind date două forme liniare liniar independente, expresia

$$\alpha a^2(\bar{V}) + \beta b^2(\bar{V}) \qquad (46,IV)$$

este o formă pătratică singulară de vectori.

Este uşor de văzut că toate rezultatele de mai sus relative la produsul a două forme $l(\bar{V})$ şi $m(\bar{V})$ liniar independente sunt valabile şi pentru forma (46,IV). Explicaţia constă în faptul că forma (42,IV) este ca şi (46,IV) o sumă algebrică de două pătrate de forme liniare şi că amândouă aceste forme sunt singulare.

Trei forme liniare $a(\bar{V})$, $b(\bar{V})$ şi $c(\bar{V})$ sunt *liniar independente*, dacă există între ele o relaţie de forma

$$\lambda a(\bar{V}) + \mu b(\bar{V}) + \nu c(\bar{V}) \equiv 0$$

cu coeficienţi λ, μ, ν nu toţi nuli.

In caz contrar, cele trei forme sunt liniar independente. Expresia

$$\alpha a^2(\bar{V}) + \beta b^2(\bar{V}) + \gamma c^2(\bar{V}) \qquad (47,IV)$$

este o formă pătratică nesingulară de vectorul $\bar{V}$.

Scanned with OKEN Scanner

Forma polară a acestei forme este

$$\alpha a(\bar{U})a(\bar{V})+\beta b(\bar{U})b(\bar{V})+\gamma c(\bar{U})c(\bar{V}). \qquad (48,IV)$$

Ecuaţia planului polar al unui vector $\bar{U}$ în raport cu forma (47,IV) sau cu conul nul de ecuaţie

$$\alpha a^2(\bar{V})+\beta b^2(\bar{V})+\gamma c^2(\bar{V})=0 \qquad (49,IV)$$

va fi

$$\alpha a(\bar{U})a(\bar{V})+\beta b(\bar{U})b(\bar{V})+\gamma c(\bar{U})c(\bar{V})=0. \qquad (50,IV)$$

Cele trei plane

$$a(\bar{V})=0; \quad b(\bar{V})=0, \quad c(\bar{V})=0 \qquad (51,IV)$$

formează un triedru nedegenerat, deoarece se intersectează într'un singur punct. In adevăr, planele

$$a(\bar{V})=0 \quad \text{şi} \quad b(\bar{V})=0$$

se intersectează după o dreaptă. Ele nu pot fi confundate, fiindcă ar trebui să avem

$$b(\bar{V})\equiv\lambda a(\bar{V}),$$

ceeace este exclus prin condiţia de independenţă liniară. Planul $c(\bar{V})$ nu poate trece, prin intersecţia lor, fiindcă ar face parte din fascicolul definit de $a(\bar{V})=0$ şi $b(\bar{V})=0$. Deci, cele trei plane se taie după trei drepte concurente în spaţiu.

Pentru a preciza ideile, atragem atenţia că, în toate aceste consideraţii geometrice, vectorii $\bar{V}$ sunt interpretaţi ca vectori de poziţie. Proprietăţile sunt valabile şi pentru vectori liberi, cu condiţia de a-i considera paraleli cu direcţiile pe care le definesc, deci de a vorbi, de exemplu, de vectori paraleli cu un plan, în loc de a-i considera situaţi în acel plan.

Triedrul format de planele

$$a(\bar{V})=0; \quad b(\bar{V})=0; \quad c(\bar{V})=0$$

este autoconjugat faţă de forma (47,IV) *sau faţă de conul nul* (49,IV).

In adevăr, să considerăm un vector $\bar{U}$ situat pe intersecţia planelor

$$a(\bar{U})=0, \quad b(\bar{U})=0. \qquad (52,IV)$$

Planul său polar, obţinut din (50,IV), ţinând seama de condiţiile (52,IV), se va reduce la

$$\gamma c(\bar{U})c(\bar{V})=0$$

şi cum $c(\bar{U})\neq 0$, fiindcă sistemul (51,IV) nu admite alte soluţii decât $V=0$, vom avea

$$c(\bar{V})=0.$$

Prin urmare, planul polar al lui $\bar{U}$ este al treilea plan al triedrului considerat. In general: *Planele polare ale muchiilor triedrului* (51,IV) *sunt feţele opuse ale acestui triedru.*

Scanned with OKEN Scanner

*§ 113. Descompunerea unei forme pătratice într'o sumă de pătrate

Cele trei exemple de forme pătratice, care sunt sume algebrice de pătrate de forme liniare, au pus în evidenţă două tipuri de forme singulare pentru care conul nul, considerat real, se reduce la un plan dublu şi la două plane concurente, precum şi o formă nesingulară, căreia i se asociază în mod invariant un triedru autoconjugat.

Dacă alegem acest triedru ca triedru fundamental, vom spune că forma (48,IV) este *raportată la un triedru autoconjugat.*

Suntem deci conduşi la problema de a raporta o formă oarecare la un triedru oarecare şi apoi de a vedea ce particularităţi apar când acest triedru este autoconjugat faţă de această formă.

A raporta o formă pătratică la un triedru înseamnă a găsi expresia acelei forme când toţi vectorii care intervin în ea sunt raportaţi la acest triedru.

Fiind dată forma

$$p(\overline{V}, \overline{V}) = p_{ij} V^i V^j,$$

dacă raportăm vectorii spaţiului la un triedru fundamental $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, vom scrie

$$\overline{V} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} + \gamma\overline{w},$$

iar forma va deveni:

$$p(\overline{V}, \overline{V}) = p(\alpha\overline{u} + \beta\overline{v} + \gamma\overline{w}, \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} + \gamma\overline{w}).$$

Aplicând formula (28,IV) de desvoltare a unei forme, vom avea

$$\begin{aligned} p(\overline{V}, \overline{V}) = \alpha^2 p(\overline{u},\overline{u}) + \beta^2 p(\overline{v},\overline{v}) + \gamma^2 p(\overline{w},\overline{w}) + 2\alpha\beta p(\overline{u},\overline{v}) + \\ + 2\beta\gamma p(\overline{v},\overline{w}) + 2\gamma\alpha p(\overline{w},\overline{u}), \end{aligned} \tag{53,IV}$$

unde

$$\alpha = (\overline{u}'\overline{V}); \quad \beta = (\overline{v}'\overline{V}); \quad \gamma = (\overline{w}'\overline{V}), \tag{54,IV}$$

Formula (53,IV) ne dă expresia generală a unei forme pătratice de vectorul $\overline{V}$, raportată la un triedru oarecare.

In cazul când conul nul al formei este real, există vectori nenuli, care anulează forma, deci situaţi pe generatoarele conului nul, astfel încât, cu o alegere particulară convenabilă, unii din termeni pot dispare.

Când $\overline{V}$ variază, forma (53,IV) este o formă pătratică de trei variabile α, β, γ, deci de componentele scalare ale lui $\overline{V}$ în raport cu triedrul $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$.

Să considerăm întâi cazul unei forme nesingulare.

Putem atunci determina un triedru $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ autoconjugat în raport cu forma dată şi format cu vectori care nu anulează forma, adică neconţinuţi în planele lor polare.

Deoarece $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ sunt conjugaţi doi câte doi, vom avea

$$p(\overline{u},\overline{v}) = 0; \quad p(\overline{v},\overline{w}) = 0 \quad \text{şi} \quad p(\overline{w},\overline{u}), = 0,$$

însă

$$p(\overline{u},\overline{u}) \neq 0; \quad p(\overline{v},\overline{v}) \neq 0; \quad p(\overline{w},\overline{w}), \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinând seama de aceste relaţii, expresia generală a formei (53,IV) se reduce la

$$p(\bar{V}, \bar{V}) = \alpha^2 p(\bar{u}, \bar{u}) + \beta^2 p(\bar{v}, \bar{v}) + \gamma^2 p(\bar{w}, \bar{w}), \qquad (55,IV)$$

unde coeficienţii sunt toţi diferiţi de zero.

Putem spune că forma s'a redus la o sumă algebrică de trei pătrate Acestea sunt pătratele formelor liniare (54,IV).

Se poate verifica imediat că cele trei forme α, β, γ sunt liniar independente. In adevăr, dacă ar fi liniar dependente, ar trebui să existe trei coeficienţi a, b, c, astfel încât

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \equiv 0.$$

adică

$$a(\bar{u}'\bar{V}) + b(\bar{v}'\bar{V}) + c(\bar{w}'\bar{V}) \equiv 0$$

sau

$$(a\bar{u}' + b\bar{v}' + c\bar{w}')\bar{V} = 0$$

pentru orice vector $\bar{V}$, ceeace aduce după sine

$$a\bar{u}' + b\bar{v}' + c\bar{w}' = 0.$$

Ori, această relaţie este imposibilă, fiindcă $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ sunt liniari independenţi, ca reciproci ai lui $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Am obţinut deci următorul rezultat:

Orice formă pătratică nesingulară se poate reduce la o sumă algebrică de trei pătrate ale unor forme liniare liniar independente.

Acest număr nu mai poate fi redus, fiindcă niciuna din forme nu se exprimă liniar în funcţie de celelalte.

Cazul formelor singulare poate fi tratat în acelaşi mod. Dacă o formă $p(\bar{V}, \bar{V})$ este singulară, vom avea $|p_{ij}| = 0$. In acest caz, considerând planul polar (37,IV) al unui vector oarecare $\bar{U}$, există vectori pentru care acest plan este nedeterminat, deoarece sistemul

$$\begin{aligned} p_{11}U^1 + p_{12}U^2 + p_{13}U^3 &= 0; \\ p_{21}U^1 + p_{22}U^2 + p_{23}U^3 &= 0; \\ p_{31}U^1 + p_{32}U^2 + p_{33}U^3 &= 0, \end{aligned} \qquad (56,IV)$$

care anulează toţi coeficienţii planului (37,IV), admite soluţii nenule. Discuţia clasică a acestui sistem pune în evidenţă două cazuri:

1) una dintre ecuaţii, de exemplu a treia, este o consecinţă a celor-lalte două;

2) două dintre ecuaţii, de exemplu ultimele, sunt consecinţe ale celeilalte, în speţă prima.

Din punct de vedere geometric noi urmărim să determinăm vectorii $\bar{U}$, care satisfac sistemul (56,IV).

In primul caz, un astfel de vector se găseşte în primele două plane şi deci este situat pe dreapta lor de intersecţie.

In al doilea caz, orice vector. din primul plan verifică întreg sistemul.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea deci două cazuri diferite;

In primul, *există o infinitate de vectori coliniari* $\overline{U}$, *care sunt conjugați cu orice vector* $\overline{V}$ *din spațiu*, iar în al doilea, *există o infinitate de vectori* $\overline{U}$ *coplanari, conjugați cu toți vectorii din spațiu.*

In particular, *acești vectori singulari sunt conjugați și cu ei înșiși*, deci vom avea

$$p(\overline{U}, \overline{U}) = 0,$$

adică *ei vor anula forma pătratică.*

Din punct de vedere algebric, primul caz corespunde aceluia în care cel puțin unul din minorii de primul ordin, extrași din determinantul $|p_{ij}|$, este diferit de zero. Al doilea caz corespunde aceluia în care niciunul din acești minori nu este diferit de zero, dar există cel puțin un minor de al doilea ordin, adică unul din coeficienții p_{ij}, diferit de zero.

Vom sintetiza această discuție prin matricea

$$\left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix} \right\| \qquad (57,IV)$$

formată cu coeficienții formei $p_{ij}V^iV^j$, al cărei determinant $p = |p_{ij}| = 0$.

Vom spune că o matrice are *rangul k* dacă ordinul cel mai înalt al unui determinant diferit de zero, extras din ea, este k.

Matricea (57,IV) este cel mult de rangul al treilea. In cazul când ea este de rangul al treilea, forma $p_{ij}V^iV^j$ este nesingulară.

In cazul când rangul său este doi, forma e singulară și există o direcție de vectori $\overline{U}$ *singulari, conjugați cu orice vector al spațiului.*

Dacă luăm planul polar al unui vector oarecare $\overline{V} \neq \overline{U}$, acesta va conține neapărat vectorul $\overline{U}$, care este conjugat și cu $\overline{V}$.

Vom putea construi un triedru $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ autoconjugat, la care vom raporta forma $p(\overline{V}, \overline{V})$ singulară cu matricea de rangul al doilea.

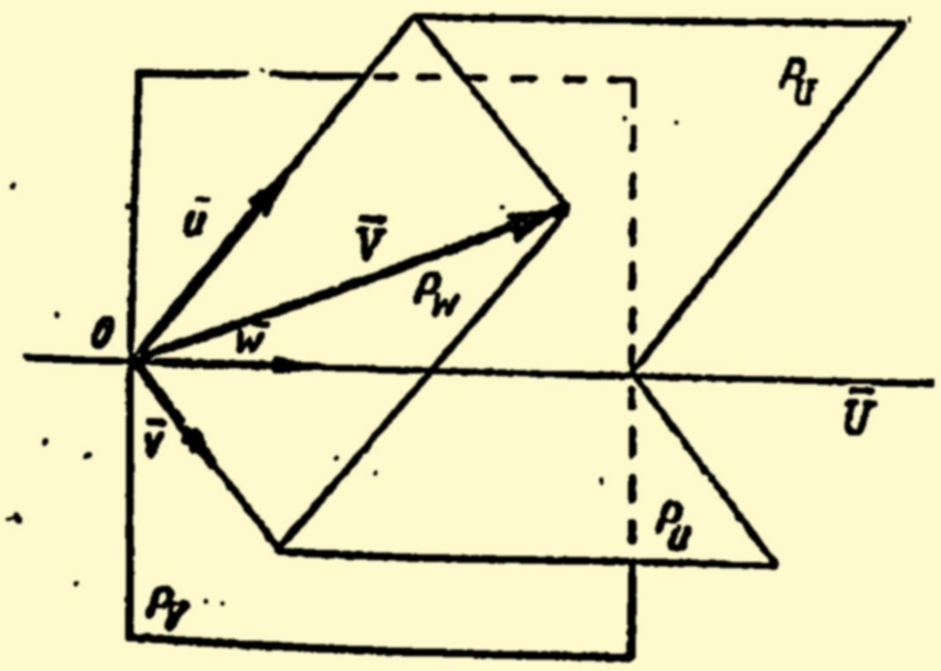


Fig. 99

Pentru aceasta, vom lua un vector $\overline{u}$, care nu anulează forma, deci nu este pe conul nul: $p(\overline{u}, \overline{u}) \neq 0$ (fig. 99).

In planul polar P_u al acestui vector, care trece prin vectorul $\overline{U}$ *singular, unic ca direcție*, vom alege un vector $\overline{v}$, care nu anulează forma: $p(\overline{v}, \overline{v}) \neq 0$. Acest vector trebue deci să nu fie coliniar cu $\overline{U}$.

Un astfel de vector există, fiindcă în caz contrar, am avea

$$p(\overline{u}, \overline{v}) = 0 \quad \text{și} \quad p(\overline{v}, \overline{v}) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Planul polar P_v al lui $\overline{v}$ trebue să conţină vectorul singular $\overline{U}$ şi vectorul $\overline{u}$ conjugat cu $\overline{v}$. In acelaşi timp, acest plan P_v de ecuaţie

$$p(\overline{v},\ \overline{V})=0$$

ar conţine şi vectorul $\overline{u}$, fiindcă $p(\overline{v},\ \overline{u})=0$. Deci, P_v ar coincide cu P_u, determinat de $\overline{v}$ şi $\overline{U}$ şi ar conţine şi vectorul $\overline{u}$, adică vectorul $\overline{u}$ ar fi cuprins în propriul său plan polar, deci am avea $p(\overline{u},\ \overline{u})=0$, contrar ipotezei făcute.

Prin urmare, *dacă un vector $\overline{u}$ nu anulează forma $p(\overline{V},\ \overline{V})$, deci nu este pe conul nul, planul său polar conţine şi vectori $\overline{v}$, care nu anulează forma.*

Plecând dela vectorul $\overline{u}$, vom putea deci determina un vector $\overline{v}$ în planul P_u, conjugat cu $\overline{u}$, şi care nu anulează forma : $p(\overline{v},\ \overline{v})\neq 0$.

In sfârşit, al treilea vector $\overline{w}$ al triedrului fundamental va fi un vector $\overline{w}$, coliniar cu vectorul singular $\overline{U}$. Acesta fiind conjugat cu orice alt vector din spaţiu, vom avea

$$p(\overline{w},\overline{u})=0,\quad p(\overline{w},\ \overline{v})=0.$$

El, însă, va fi conjugat şi cu el însuşi, deci

$$p(\overline{w},\ \overline{w})=0.$$

Triedrul astfel determinat este autoconjugat. Vom avea

$$\begin{aligned} &p(\overline{u},\ \overline{v})=0;\quad p(\overline{v},\ \overline{w})=0;\quad p(\overline{w},\ \overline{u})=0;\\ &p(\overline{u},\ \overline{u})\neq 0;\quad p(\overline{v},\ \overline{v})\neq 0;\quad p(\overline{w},\ \overline{w})=0. \end{aligned} \tag{58,IV}$$

Raportând forma $p(\overline{V},\ \overline{V})$ la acest triedru, expresia sa (53,IV) se va reduce la

$$p(\overline{V},\overline{V})=\alpha^2 p(\overline{u},\ \overline{u})+\beta^2 p(\overline{v},\ \overline{v}), \tag{59,IV}$$

adică la o sumă algebrică de două pătrate de forme liniare liniar independente.

Putem enunţa deci următorul rezultat: *O formă pătratică singulară, a cărei matrice* (57,IV) *este de rangul al doilea, se poate reduce la o sumă algebrică de două pătrate ale unor forme liniare independente.*

Reamintim că aceste forme sunt α^2 şi β^2, date de (54,IV).

In sfârşit, cazul în care matricea (57,IV) este de rangul întâi se tratează la fel.

Deoarece în sistemul (56,IV), care determină vectorii al căror plan polar este nedeterminat, două dintre ecuaţii sunt consecinţe ale celei de a treia, există un plan singular, astfel încât orice vector din acest plan este conjugat cu toţi vectorii spaţiului, inclusiv el însuşi. Vom avea pentru un astfel de vector $\overline{U}$

$$p(\overline{U},\overline{U})=0\quad \text{şi}\quad p(\overline{U},\overline{V})=0,$$

oricare ar fi $\overline{V}$.

Vom determina un triedru $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, autoconjugat faţă de forma $p(\overline{V},\ \overline{V})$, luând un vector $\overline{u}$, care nu anulează forma, deci nu este pe conul nul: $p(\overline{u},\ \overline{u})\neq 0$ (fig. 100).

Scanned with OKEN Scanner

Planul polar al acestui vector va fi de ecuaţie

$$p(\overline{u}, \overline{V})=0$$

şi se va confunda cu planul vectorilor sirgulari $\overline{U}$, fiindcă orice vector $\overline{U}$ este conjugat cu orice vector din spaţiu.

Vom nota cu P_u acest plan polar singular.

Deoarece $\overline{u}$ nu anulează forma, el nu va putea fi cuprins în propriul său plan polar, deci putem alege în P_u doi vectori $\overline{v}$ şi $\overline{w}$, care formează cu $\overline{u}$ un triedru propriu. Aceşti vectori sunt conjugaţi cu $\overline{u}$, fiindcă orice vector din P_u este conjugat cu $\overline{u}$. Ei însă sunt conjugaţi şi unul faţă de celălalt, fiind doi vectori singulari.

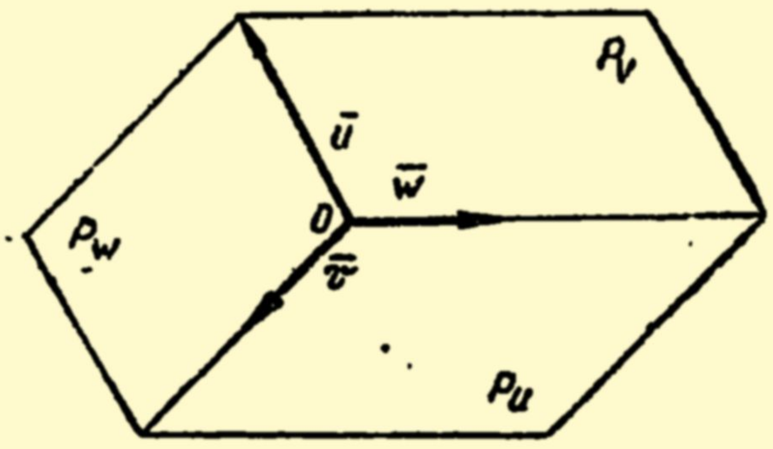


Fig. 100

Triedrul $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ este autoconjugat faţă de forma $p(\overline{V}, \overline{V})$. Feţele sale P_v şi P_w pot fi considerate ca planele polare ale lui $\overline{v}$ şi $\overline{w}$, deci aceşti vectori singulari au planele polare nedeterminate.

Dacă observăm că ei anulează în acelaşi timp forma dată, vom putea scrie:

$$\begin{aligned} &p(\overline{u}, \overline{u})\neq 0; \quad p(\overline{u}, \overline{v})=0; \quad p(\overline{u}, \overline{w})=0; \\ &p(\overline{v}, \overline{v})=0; \quad p(\overline{v}, \overline{w})=0; \quad p(\overline{w}, \overline{w})=0. \end{aligned} \tag{60,IV}$$

Ţinând seama de aceste relaţii, expresia generală (53,IV) a forme pătratice $p(\overline{V}, \overline{V})$ devine:

$$p(\overline{V}, \overline{V})=\alpha^2 p(\overline{u}, \overline{u}), \tag{61,IV}$$

adică se reduce la un singur pătrat.

Rezultatul stabilit este deci următorul: *O formă pătratică singulară, a cărei matrice* (57,IV) *este de rangul întâi, se poate reduce la pătratul unei forme liniare de vectori.*

Se vede că planul singular se obţine anulând forma, deci conul nul este în acest caz degenerat în două plane confundate.

Deasemenea, conul nul este degenerat şi în cazul formelor singulare cu matricea de rangul al doilea.

Discuţia ne oferă două cazuri:

Dacă în expresia (59,IV) a formei, redusă la două pătrate, semnele coeficienţilor $p(\overline{u}, \overline{u})$ şi $p(\overline{v}, \overline{v})$ sunt aceleaşi, forma nu se poate anula decât anulând fiecare pătrat în parte, deci pentru

$$\alpha \equiv (\overline{u}'\overline{v})=0 \quad \text{şi} \quad \beta \equiv (\overline{v}'\overline{V})=0,$$

adică pentru vectorii situaţi pe dreapta de intersecţie a acestor două plane. Se vede imediat că aceasta este dreapta vectorilor singulari, având direcţia vectorului $\overline{w}$.

Dacă semnele pătratelor sunt diferite, să presupunem de exemplu

$$p(\overline{u}, \overline{u})>0; \quad p(\overline{v}, \overline{v})<0,$$

Scanned with OKEN Scanner

forma este de fapt o diferență de pătrate și se descompune imediat:

$$p(\overline{V}, \overline{V}) = \left[\alpha\sqrt{p(\overline{u}, \overline{u})} + \beta\sqrt{-p(\overline{v}, \overline{v})}\right]\left[\alpha\sqrt{p(\overline{u}, \overline{u})} - \beta\sqrt{-p(\overline{v}, \overline{v})}\right]. \quad (62,IV)$$

Conul nul rezultă din anularea acestor factori, deci se compune din două plane, care deasemenea trec prin vectorul $\overline{w}$.

Putem considera valabilă descompunerea (62,IV) și pentru cazul când semnele sunt aceleași. Cele două plane vor fi complex conjugate și vom putea enunța următorul rezultat: *Conul nul al unei forme singulare cu matricea de rangul al doilea se descompune în două plane reale sau complex conjugate, având ca dreaptă de intersecție dreapta vectorilor singulari.*

In sfârșit, discuția cazurilor singulare ne readuce la cazul nesingular. Am văzut că semnele mutuale ale pătratelor, în care se descompune forma, joacă un rol important în reprezentarea sa geometrică.

In cazul unei forme nesingulare, putem avea deasemenea două cazuri:

Dacă pătratele din expresia (55,IV) au coeficienți cu aceleași semne, forma este *definită*.

In adevăr, în acest caz ea nu se poate anula decât anulând cele trei pătrate

$$\alpha \equiv (\overline{u}'\overline{V}) = 0; \quad \beta \equiv (\overline{v}'\overline{V}) = 0; \quad \gamma \equiv (\overline{w}'\overline{V}) = 0.$$

Se vede că aceasta nu se poate obține decât pentru $\overline{V} = \overline{0}$, deoarece aceste plane sunt de fapt planele triedrului fundamental, care se intersectează în origine. Prin urmare, forma este definită și în sensul definiției anterioare.

Vom distinge două subcazuri: 1) *toate pătratele pozitive* și 2) *toate pătratele negative*, numind forma respectiv *pozitiv* și *negativ definită*.

Dacă pătratele sumei au semne diferite, forma este *nedefinită* (sau *indefinită*). Putem avea un pătrat pozitiv și două negative, sau invers. Din punctul de vedere al proprietăților geometrice, aceste două cazuri nu trebue distinse unul de celălalt.

Conul nul al formelor nesingulare este imaginar pentru formele definite și real pentru cele nedefinite.

Conul nul al formelor definite are, totuși, vârful real.

Conul nul al formelor nedefinite, poate fi scris astfel, încât vectorii interiori să dea formei semnul pozitiv, iar cei exteriori, semnul negativ. Pentru aceasta trebue să avem un pătrat pozitiv și două negative.

Deci, *dacă o formă nedefinită are un pătrat pozitiv și două negative, ea va fi pozitivă la interiorul conului său nul, și negativă la exterior.*

Această proprietate are importante consecințe în aplicațiile fizice ale formelor pătratice.

*§ 114. Metoda tensorială

Introducerea mărimilor scalare și vectoriale ca mărimi geometrice, asociate unor obiecte geometrice simple ale spațiului afin, constituie o metodă unitară de cercetare a proprietăților spațiului și figurilor sale cu ajutorul mărimilor

Scanned with OKEN Scanner

geometrice. In acelaşi timp, introducerea măsurii mărimilor ne dă posibilitatea de a exprima prin relaţii numerice aceste proprietăţi, pe care le pune în evidenţă calculul simbolic, algebric, cu scalari, vectori, bivectori, etc.

Trebue totuşi să observăm încă odată că *aplicarea directă a metodei de asociere prin împărţirea obiectelor în clase, esenţială pentru introducerea mărimilor fundamentale ale spaţiului, nu poate fi folosită exclusiv,* deoarece conduce la dificultăţi considerabile din punct de vedere practic.

Această metodă pune în lumină în modul cel mai natural operaţiile de bază ale Calculului vectorial şi conduce la formarea mărimilor compuse, ca bivectorii şi trivectorii. Ea atrage atenţia asupra deosebirilor dintre aceste mărimi, precum şi asupra structurii lor, dar nu poate stabili în mod riguros categoriile de mărimi geometrice. In adevăr, nu trebue pierdut din vedere că *ideea de asociere între mărime şi obiect foloseşte în mod esenţial obiectul geometric, deci are nevoie de acest obiect, pentru a pune în evidenţă o anumită mărime.*

Deaceea, este foarte greu să stabilim, cu ajutorul ei, în ce condiţii două mărimi, asociate la două obiecte diferite, aparţin sau nu aceleiaşi categorii de mărimi.

Această dificultate se prezintă chiar şi pentru vectorii contravarianţi şi covarianţi, deoarece regulile de adunare şi amplificare prin numere sunt aceleaşi pentru unii, ca şi pentru ceilalţi. Deosebirea dintre ei apare prin măsură, deoarece vectorul covariant se măsoară prin inversa măsurii vectorului contravariant având extremităţile pe planele sale.

Criteriul măsurii aduce precizarea definitivă a deosebirilor dintre vectorii covarianţi şi contravarianţi, stabilind categoriile lor. El ne-a dat putinţa de a introduce şi alte categorii de mărimi, ca densităţile şi capacităţile.

Prin introducerea acestui criteriu se afirmă că o mărime, care aparţine unei anumite categorii, poate fi asociată acelui obiect geometric, ce a dat naştere categoriei considerate.

Astfel, dublul produs vectorial (13,IV) dintre un bivector covariant şi un vector contravariant este un vector covariant asociat obiectului geometric determinat de o prismă indefinită, formată din cele două biplane ale bivectorului covariant (fig. 77), şi bipunctul asociat vectorului contravariant

Reprezentarea mărimilor prin măsurile lor, deci prin componentele măsurate în raport cu o bază, poate conduce la introducerea de noi mărimi pe cale de calcul. Aceste mărimi pot aparţine la categorii distincte de cele introduse prin asocierea directă, astfel încât asocierea lor unor obiecte geometrice trebue bazată pe alte criterii decât cele folosite până în prezent, deci pe criterii geometrice deduse din criteriul măsurii.

Prin aceasta se trece la o etapă superioară, în care *criteriul măsurii este utilizat nu numai pentru clasificarea mărimilor geometrice, ci şi pentru determinarea obiectului corespunzător unei mărimi date.*

Metoda carteziană în geometrie urmăreşte acelaşi ţel: asociind fiecărui punct un sistem de numere (x, y, z), şi unor obiecte geometrice simple ca dreapta, planul, conicele, cuadricele — anumite relaţii numerice, în speţă ecuaţiile respective, deduce din cercetarea acestor relaţii, proprietăţile acestor obiecte geometrice. Unul din punctele principale ale metodei este *recunoaşterea* curbelor pe ecuaţiile corespunzătoare, deci recunoaşterea obiectelor geometrice

Scanned with OKEN Scanner

Un alt punct important este recunoaşterea proprietăţilor acestor curbe, independente de alegerea axelor.

Se ştie ce importanţă au notaţiile raţionale în geometria analitică şi se cunoaşte dificultatea de a sintetiza un anumit obiect geometric prin datele numerice, care îl reprezintă. Deaceea, *metodele vectoriale în geometria analitică rezolvă deodată, pentru numeroase obiecte geometrice, atât problema recunoaşterii lor, cât şi pe aceea a determinării proprietăţilor invariante.*

Totuşi, unele dintre mărimile geometrice se reprezintă complicat prin operaţiile vectoriale, sau nu pot fi puse în evidenţă sub formă simbolică. Deaceea, trecerea la reprezentarea mărimilor prin componente şi aplicarea criteriului măsurii pune probleme noi, care depăşesc atât cadrul Geometriei analitice, cât şi pe acel al Calculului vectorial.

Geometria analitică este depăşită prin necesitatea de prezentare permanentă a mărimilor geometrice sub o formă sintetică, unitară, ca în Calculul vectorial, iar acesta prin apariţia de mărimi, care nu pot fi reprezentate prin operaţiile vectoriale.

Reprezentarea acestor mărimi geometrice fizice şi cercetarea proprietăţilor lor constitue obiectul *Calculului tensorial,* care este *extensiunea naturală a Calculului vectorial, conceput ca teorie a mărimilor geometrice asociate, obiectelor geometrice fundamentale ale spaţiului afin.*

Pentru a ilustra metoda tensorială, care s'a desvoltat treptat în cursul expunerii metodei vectoriale la interiorul acestei metode, *vom introduce vectorul covariant fără a folosi modelul geometric al biplanului şi vom regăsi acest model,* ca obiect geometric asociat vectorului covariant.

Să considerăm mulţimea tuturor vectorilor contravarianţi, deci specia respectivă în spaţiul afin. Pe această specie să definim o *formă liniară scalară* având ca variabilă un vector contravariant $\overline{V}$ oarecare. Notând cu $l(\overline{V})$ această formă liniară, vom impune prin definiţie proprietăţile de liniaritate:

$$l(\overline{V}+\overline{W}) = l(\overline{V}) + l(\overline{W}) \quad \textit{(aditivitate)};$$

$$l(\lambda\overline{V}) = \lambda l(\overline{V}) \qquad \textit{(omogenitate)}.$$

Raportând vectorii la o bază $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, vom scrie deci:

$$l(\overline{V}) = l(V^i\overline{e}_i) = V^i\, l(\overline{e}_i) = V^1 l(\overline{e}_1) + V^2 l(\overline{e}_2) + V^3 l(\overline{e}_3),$$

unde $l(\overline{e}_i)$ sunt valorile luate de forma $l(\overline{V})$ pentru vectorii bazei, deci trei *scalari* determinaţi, pe care îi vom nota

$$l(\overline{e}_i) = u_i.$$

Astfel, forma liniară, invariantă faţă de orice schimbare de bază în spaţiul afin, are expresia următoare:

$$l(\overline{V}) = u_i V^i = u_1 V^1 + u_2 V^2 + u_3 V^3. \qquad (63,IV)$$

Fiecare dintre mărimile u_1, u_2, u_3 este un scalar, dar mulţimea lor considerată ca un tot, este o mărime?

Criteriul măsurii ne dă răspunsul la această întrebare, care s'a mai pus (§ 86) pentru recunoaşterea vectorilor cu ajutorul componentelor lor.

Scanned with OKEN Scanner

In primul rând, *pentru ca u_1, u_2, u_3 să fie componente ale unei mărimi măsurabile cu trei unităţi, trebue ca ele să reprezinte măsura acestei mărimi, invariantă faţă de schimbarea bazei.* Prin urmare, se impune cercetarea modului de transformare a cantităţilor u_1, u_2, u_3. In cazul când mulţimea lor se va transforma în ea însăşi, deci noile expresii u'_1, u'_2, u'_3 se vor exprima exclusiv în funcţie de cele vechi şi de elementele matricei de transformare. u_1, u_2, u_3 vor fi componentele unei mărimi.

Impunând condiţia de invarianţă formei (63,IV) vom avea

$$u_i V^i = u_i a^i_k V'^k = (a^i_k u_i)\, V'^k = u'_k V'^k$$

deci transformarea cantităţilor u_1, u_2, u_3 se va face după legea

$$u'_k = a^i_k u_i. \qquad (63',IV)$$

Ori, este evident întâi că relaţiile dintre cantităţile u'_1, u'_2, u'_3, calculate în noul sistem şi u_1, u_2, u_3, calculate în vechiul sistem, nu conţin alte elemente decât coeficienţii a^i_k ai transformării.

Prin urmare, u_1, u_2, u_3 sunt componentele unei mărimi şi formulele (63',IV) arată că această mărime este un vector covariant.

Făcând abstracţie de introducerea anterioară a vectorilor covarianţi, putem adopta pentru mărimea u_1, u_2, u_3 denumirea de vector covariant. In acest caz, avem următoarea propoziţie: *Orice formă liniară invariantă de vectori contravarianţi defineşte un vector covariant.*

Este evident că reluând raţionamentele făcute pe o formă liniară de vectori covarianţi, recunoaştem în coeficienţii acestei forme componentele unui vector contravariant şi suntem conduşi la propoziţia următoare: *Orice formă liniară de vectori covarianţi defineşte un vector contravariant.*

Calculul cu forme liniare este analog cu calculul cu vectori, în ceeace priveşte adunarea şi amplificarea cu scalari.

Pentru a obţine şi obiectul geometric asociat unei forme liniare, deci unui vector covariant, vom considera relaţia

$$l(\overline{V}) = u_i V^i = 1,$$

care reprezintă, după cum ştim, un plan ce interceptează pe axe segmente egale cu $\frac{1}{u_1}$, $\frac{1}{u_2}$, $\frac{1}{u_3}$. Biplanului format de acest plan şi de planul paralel cu el trecând prin origine, i se asociază vectorul covariant u_1, u_2, u_3.

Putem deasemenea regăsi rezultatele relative la dualitatea dintre vectorii covarianţi şi contravarianţi impunând vectorilor celor două baze reciproce (§ 71) dualitatea:

$$\overline{e}_i \rightarrow \overline{e}^i.$$

Metoda tensorială în Calculul vectorial şi în aplicaţiile sale este bazată pe reprezentarea mărimilor prin măsurile lor. Pornind dela stabilirea unei baze de vectori contravarianţi în spaţiul afin, care constitue un sistem structural de unităţi în spaţiu, această metodă asociază fiecărei mărimi un sistem de componente. Invers, oricărui sistem de componente i se asociază o mărime, dacă acest sistem se transformă în el însuşi prin schimbarea bazei $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$..

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul de recunoaştere al caracterului de mărime precum şi de clasificare a mărimilor este criteriul măsurii, prin care două mărimi sunt înglobate în aceeaşi categorie, dacă au acelaşi mod de măsură.

Prin aceasta se păstrează unitatea mărimilor, deoarece sistemul de componente este considerat ca un tot şi se aplică permanent principiul de invarianţă a măsurii faţă de transformările sistemelor de referinţă.

Metoda tensorială pune în evidenţă faptul extrem de important că mărimile vectoriale nu constituc decât o parte redusă din mărimile fizice şi geometrice.

In consecinţă, *ca se extinde la mărimi mai complexe, dintre care unele apar chiar în cadrul Calculului vectorial*, cum este cazul bivectorilor şi trivectorilor şi, în general, al densităţilor şi capacităţilor. Aceste mărimi fiind cazuri particulare importante ale unor mărimi numite *tensori*, calculul desvoltat prin metoda tensorială şi având ca obiect cercetarea proprietăţilor tensorilor constitue *Calculul tensorial.*

După cum vectorii nu sunt decât o parte din mărimile, care se încadrează în Calculul vectorial, tot aşa tensorii nu formează decât o parte din mărimile, care intră în cadrul Calculului tensorial.

Deaceea, *este important de subliniat în primul rând metoda tensorială, ca o extensiune a metodei vectoriale*, domeniile de aplicaţie prelungindu-se unul prin celălalt prin trecerea dela vectori la tensori.

* § 115. Tensori de ordinul al doilea în spaţiul afin

Aplicarea metodei tensoriale unei forme liniare invariante de vectori ne-a condus la definirea vectorului covariant prin această formă şi apoi la asocierea sa unui biplan sau unui plan determinat. Pe de altă parte, studiul formelor pătratice şi biliniare de vectori a scos în evidenţă importanţa din punct de vedere geometric a acestor forme.

Urmând calea schiţată în paragraful precedent, se pune întrebarea dacă acestor forme li se pot asocia deasemenea anumite mărimi geometrice ca şi formelor liniare.

Tensorul covariant. Vom considera în acest scop specia vectorilor contravarianţi în spaţiul afin şi o formă *biliniară* de vectori $p(\bar{U}, \bar{V})$, invariantă faţă de schimbarea bazei $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, deci reprezentând un scalar.

Condiţiile de biliniaritate fiind:

$$p(\bar{U}_1+\bar{U}_2, \bar{V})=p(\bar{U}_1, \bar{V})+p(\bar{U}_2, \bar{V});$$

$$p(\bar{U}, \bar{V}_1+\bar{V}_2)=p(\bar{U}, \bar{V}_1)+p(\bar{U}, \bar{V}_2);$$

$$p(\lambda\bar{U}, \bar{V})=\lambda p(\bar{U}, \bar{V}); \quad p(\bar{U}, \mu\bar{V})=\mu p(\bar{U}, \bar{V})$$

deducem imediat:

$$p(U^i\bar{e}_i, V^j\bar{e}_j)=U^iV^jp(\bar{e}_i, \bar{e}_j); \quad (i,j=1,2,3). \tag{64,IV}$$

Cum forma este un scalar, valorile sale $p(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ pentru vectorii fundamentali $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, vor fi scalari. Vom presupune forma simetrică, deci vom pune

$$p(\bar{e}_i, \bar{e}_j)=p(\bar{e}_j, \bar{e}_i)=p_{ij}=p_{ji} \tag{65,IV}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi vom avea

$$p(\overline{U}, \overline{V}) = p_{ij} U^i V^j. \qquad (66,IV)$$

Este clar că sistemul de scalari

$$p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33}$$

determină complect forma (66,IV). *Constitue acest sistem de scalari o mărime geometrică?*

Aplicarea criteriului măsurii ne conduce la următoarele rezultate, dacă schimbăm baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$:

$$p(\overline{U}, \overline{V}) = p_{ij} U^i V^j = p_{ij} a^i_k a^j_l U'^k V'^l = (a^i_k a^j_l p_{ij}) U'^k U'^l.$$

Punând

$$p'_{kl} = a^i_k a^j_l p_{ij} \qquad (67,IV)$$

avem

$$p_{ij} U^i V^j = p'_{kl} U'^k U'^l,$$

deci *forma biliniară rămâne invariantă dacă, şi numai dacă, p_{ij} se transformă după legea* (67,IV).

Permutând indicii k şi l şi schimbând apoi indicii muţi i şi j între ei, vom avea

$$p'_{lk} = a^i_l a^j_k p_{ij} = a^i_l a^j_k p_{ji} = a^j_l a^i_k p_{ij} = p'_{kl},$$

deci: *proprietatea de simetrie rămâne invariantă prin schimbarea bazei.* Se vede că sistemul de cantităţi p_{ij} constituie o mărime cu şase componente, deoarece acest sistem se transformă în el însuşi prin legea (67,IV), în care nu intervin decât componentele vechi şi noi şi coeficienţii transformări liniare omogene a^i_k.

Vom numi mărimea astfel obţinută, reprezentată prin componentele sale $p_{ij} = p_{ji}$, *tensor simetric de ordinul al doilea covariant.*

Acest tensor a fost întâlnit în spaţiul metric, într'un caz special, fiind format de coeficienţii g_{ij} ai formei fundamentale (§ 105).

Este de recunoscut că dacă nu impuneam condiţia de simetrie formei biliniare, criteriul măsurii ne conducea deasemenea la o mărime formată de componentele p_{ij}, în număr de nouă, deoarece $p_{ij} \neq p_{ji}$, a cărei lege de transformare este tot (67,IV). Vom putea deci considera ca *tensor de ordinul al doilea covariant,* orice mărime reprezentată în raport cu baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ printr'un sistem de nouă componente, care se transformă prin legea (67,IV).

Un tensor de ordinul al doilea este o mărime măsurabilă cu nouă unităţi, dar exemplul tensorului simetric arată că aceste unităţi se pot reduce la şase şi eventual chiar la un număr mai mic.

Componentele unui tensor de ordinul al doilea pot fi figurate sub forma unei matrice

$$\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

care, în cazul tensorului simetric, este simetrică. Rangul acestei matrice, folosită în discuția formelor pătratice de vectori (57,IV), va fi prin definiție și *rangul tensorului* p_{ij}.

Din compararea considerațiilor precedente cu rezultatele relative la formele pătratice și biliniare de vectori, se vede că tensorul simetric covariant de ordinul al doilea, definit de aceste forme, poate fi reprezentat prin ele.

Ecuația

$$p_{ij}U^iU^j=1 \tag{68,IV}$$

reprezintă o cuadrică cu centru, dacă vectorul $\overline{U}$ este vectorul de poziție al unui punct M. Deci: *Tensorul covariant simetric de ordinul al doilea este mărimea geometrică asociată unei cuadrice de ecuație* (68,IV) *cu centrul în origine.*

Tensorul va fi *nesingular*, dacă forma pătratică $p_{ij}U^iU^j$ este nesingulară și *singular* în caz contrar.

Deasemenea, putem asocia tensorul p_{ij} conului real al formei pătratice $p_{ij}U^iU^j$ însă asociația nu este complect determinată, deoarece putem oricând amplifica printr'un scalar membrul întâi al ecuației

$$p_{ij}U^iU^j=0.$$

Tensorul contravariant. Pornind dela forma biliniară $q(\overline{U}_*, \overline{V}_*)$ de vectori covarianți, prin considerații absolut analoage cu cele făcute mai sus, deducem

$$q(\overline{U}_*, \overline{V}_*)=U_iV_jq(\overline{e}^i,\overline{e}^i)=q^{ij}U_iV_j, \tag{69,IV}$$

unde

$$q^{ij}=q^{ji}=q(\overline{e}^i,\overline{e}^j)=q(\overline{e}^i,\overline{e}^i), \tag{70,IV}$$

dacă impunem condiția de simetrie.

Aplicând criteriul măsurii, deducem că sistemul de cantități q^{ij} constitue o mărime, care se transformă după legea

$$q'^{kl}=A^k_iA^l_jq^{ij} \tag{71,IV}$$

întâlnită în formulele (35,IV), relative la forma reciprocă a formei fundamentale.

Vom numi *tensor de ordinul al doilea contravariant*, orice mărime ale cărei componente se transformă după legea (71,IV); în cazul când $q^{ij}=q^{ji}$, vom spune că tensorul este *simetric*.

Rangul tensorului q^{ij} va fi rangul matricei corespunzătoare, tensorul fiind nesingular sau singular, odată cu forma (69,IV).

Pentru interpretarea geometrică, atât a formei $q^{ij}U_iU_j$, cât și a tensorului q^{ij} în spațiul afin, vom considera forma polară $p(\overline{U}, \overline{V})$ a formei pătratice $p(\overline{U}, \overline{U})$. Avem

$$p(\overline{U}, \overline{U})=p_{ij}U^iU^j;\quad p(\overline{U}, \overline{V})=p_{ij}U^iV^j.$$

Fie

$$p_{ij}U^iV^j=0$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuaţia (37,IV) a planului polar al vectorului dat $\bar{U}$ în raport cu forma $p(\bar{V}, \bar{V})$ a punctului P.

Punând

$$p_{ij}U^i = U_j; \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{72,IV}$$

cantităţile U_1, U_2, U_3 vor fi componentele unui vector covariant, în speţă componentele planului polar, a cărui ecuaţie devine

$$U_j V^j = 0. \tag{73,IV}$$

Când vectorul U^i este situat pe conul nul de ecuaţie

$$p_{ij}U^i U^j = 0, \tag{74,IV}$$

planul său polar este tangent la acest con.

Pe de altă parte, în ipoteza că tensorul p_{ij} este nesingular, deci că forma $p_{ij}V^iV^j$ este nesingulară, determinantul $|p_{ij}| \neq 0$ şi sistemul (72,IV) poate fi rezolvat în raport cu necunoscutele U^1, U^2, U^3.

In adevăr, notând cu P^{ij} minorii normalizaţi ai elementelor p_{ij} în determinantul $|p_{ij}|$, vom putea scrie:

$$P^{jk}p_{ij}U^i = P^{jk}U_j; \quad \delta^k_i U^i = P^{jk}U_j,$$

deci

$$U^k = P^{jk}U_j. \tag{75,IV}$$

Introducând în ecuaţia (74,IV), aceasta devine:

$$p_{ij}P^{ll}P^{mj}U_lU_m = (p_{ij}P^{ll})P^{mj}U_lU_m = \delta^l_j P^{mj}U_lU_m = P^{lm}U_lU_m = 0.$$

Ecuaţia

$$P^{lm}U_lU_m = 0, \tag{76,IV}$$

verificată de componentele planului tangent la conul nul, este *ecuaţia tangenţială* a acestui con.

Este uşor de arătat direct, sau prin observaţia că membrul întâi al acestei ecuaţii este un invariant, că P^{lm} *sunt componentele unui tensor de ordinul al doilea simetric contravariant.*

Prin urmare, *o formă pătratică de vectori covarianţi şi tensorul simetric contravariant corespunzător reprezintă un con de clasa a doua sub forma tangenţială.*

Dacă am fi luat în consideraţie nu conul nul, ci cuadrica (68,IV), presupusă nesingulară, planul de ecuaţie

$$p_{ij}U^iV^j = U_jV^j = 1$$

ar fi reprezentat planul polar al unui punct P în raport cu aceasta cuadrică. Se ştie că planul polar al unui punct situat pe cuadrică este planul tangent în acel punct, în care caz este verificată condiţia

$$p_{ij}U^iU^j = 1 \tag{77,IV}$$

de apartenenţă a punctului P la cuadrică.

Scanned with OKEN Scanner

Introducerea soluţiilor (75,IV) ale sistemului (72,IV) în (77,IV) conduce la relaţia

$$P^{lm} u_l u_m = 1, \qquad (78,IV)$$

care va reprezenta ecuaţia tangenţială a cuadricei $p_{ij} V^i V^j = 1$.

Deci, în general, vom putea spune că *tensorul simetric contravariant de ordinul al doilea este mărimea asociată unei cuadrice considerată ca înfăşurătoare a planelor sale tangente.*

*§ 116. Tensorul mixt

Obiectul geometric fundamental al spaţiului afin este bipunctul orientat, căruia i se asociază mărimea geometrică fundamentală, vectorul contravariant, prin împărţirea sa în clase cu ajutorul translaţiei.

Translaţia, caracterizată prin vectorul contravariant, nu este cea mai generală transformare a acestui obiect geometric în el însuşi, ci *orice transformare care păstrează structura spaţiului vectorial.*

Dacă notăm cu $T(\overline{V})$ o astfel de transformare, va trebui, în primul rând, ca ea să transforme orice vector $\overline{V}$ într'un alt vector $\overline{W}$ şi apoi ca

$$T(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = T(\overline{V}_1) + T(\overline{V}_2):$$

$$T(\lambda \overline{V}) = \lambda T(\overline{V}).$$

Fie $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ o bază în spaţiul afin. Vom pune deci,

$$\overline{V} = V^i \overline{e}_i; \quad \overline{W} = W^j \overline{e}_j$$

şi vom avea:

$$\overline{W} = T(\overline{V}),$$

deci

$$W^j \overline{e}_j = T(V^i \overline{e}_i) = V^i T(\overline{e}_i). \qquad (79,IV)$$

Fiindcă transformarea T transformă orice vector într'un vector, $T(\overline{e}_i)$ vor fi deasemea vectori şi vom pune:

$$T(\overline{e}_i) = t^j_i \overline{e}_j, \qquad (80,IV)$$

unde t^1_i, t^2_i, t^3_i sunt componentele vectorului contravariant $T(\overline{e}_i)$.

Înlocuind în (79,IV), vom avea

$$W^j \overline{e}_j = V^i t^j_i \overline{e}_j = (t^j_i V^i) \overline{e}_j,$$

de unde, ţinând seama de independenţa liniară a vectorilor bazei, vom deduce:

$$W^j = t^j_i V^i. \qquad (81,IV)$$

Deci, transformarea cea mai generală, care lasă structura spaţiului vectorial invariantă, este un isomorfism vectorial (§§ 62, 70) *şi se exprimă ca o transformare liniară a vectorilor contravarianţi în vectori contravarianţi.*

Scanned with OKEN Scanner

Aceste transformări au fost întâlnite (§ 87) sub forma particulară de transformări ortogonale, legate de schimbările de sisteme de referinţă carteziene ortogonale, precum şi de schimbări ale bazei în spaţiul afin.

Ele sunt caracterizate prin cantităţile $t_i^{j'}$, care formează matricea

$$\left\| \begin{matrix} t_1^{1'} & t_2^{1'} & t_3^{1'} \\ t_1^{2'} & t_2^{2'} & t_3^{2'} \\ t_1^{3'} & t_2^{3'} & t_3^{3'} \end{matrix} \right\|$$

Coloanele acestei matrice sunt formate din componentele vectorilor $T(\bar{e}_i)$ transformaţi ai vectorilor de bază.

Se pune întrebarea ca şi în cazurile precedente, dacă sistemul de nouă componente t_j^i nu formează o mărime.

Aplicarea criteriului măsurii la relaţia (81,IV), a cărei formă este independentă de alegerea particulară a bazei, ne va conduce la următoarele rezultate:

$$W^j = a_k^j W'^k; \qquad V^i = a_l^i V'^l,$$

deci, introducând în (81,IV), vom avea:

$$a_k^j W'^k = t_i^j a_l^i V'^l.$$

Înmulţind în ambii membri cu minorul normalizat A_j^r şi însumând, vom avea

$$A_j^r a_k^j W'^k = A_j^r t_i^j a_l^i V'^l,$$

de unde

$$\delta_k^r W^k = (a_l^i A_j^r t_i^j) V'^l,$$

$$W'^r = t'^r_l V'^l,$$

punând

$$t'^r_l = A_j^r a_l^i t_i^j. \qquad (82,IV$$

Transformarea liniară îşi păstrează forma în orice sistem de coordonate dacă, şi numai dacă, sistemul t_l^j se transformă după legea (82,IV).

Se vede imediat că acest sistem constitue cele nouă componente ale unei mărimi, deoarece transformarea (82,IV) leagă exclusiv vechile componente de cele noi prin coeficienţii transformării bazei. In acelaşi timp, se observă faptul că în transformarea (82,IV) apar atât matricea $\| a_l^i \|$, cât şi inversa sa $\| A_j^r \|$; deci, mărimea t_i^j are atât caracterul covariant, cât şi cel contravariant.

Vom numi *tensor mixt de ordinul al doilea* orice mărime t_l^j, ale cărei componente se transformă prin legea (82,IV).

Tensorul mixt îşi găseşte interpretarea geometrică în faptul că el defineşte transformarea liniară (81,IV). *El pune în evidenţă posibilitatea de a*

Scanned with OKEN Scanner

defini mărimi geometrice, nu numai prin asocierea lor unui obiect geometric, ci şi prin relaţii geometrice.

Tensorul mixt caracterizează o transformare geometrică ce stabileşte o corespondenţă între vectorii spaţiului. El este asociat obiectului geometric fundamental prin relaţiile (81,IV), care lasă invariantă structura spaţiului vectorial.

Translaţia este caracterizată prin formulele:

$$W^j = V^j - 0\,V^i + 1\,V^j + 0\,V^k; \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

pe care le putem scrie condensat cu ajutorul simbolului lui Kronecker:

$$W^j = \delta^j_i\, V^i.$$

Prin urmare tensorul translaţiei are componentele δ^j_i.

Astfel, *simbolul lui Kronecker defineşte un tensor mixt, numit tensorul unitate.*

Ca şi în cazul celorlalţi tensori de ordinul al doilea, rangul matricei $\|t^j_i\|$ va fi rangul tensorului mixt. Când acest rang este mai mic decât trei, tensorul este singular şi odată cu el şi transformarea liniară (81,IV).

Toţi tensorii de ordinul al doilea, definiţi mai sus, apar în mod natural în Calculul vectorial, deoarece corespund unor mărimi geometrice şi fizice întâlnite în aplicaţiile sale cele mai importante, în Geometria analitică, Mecanică, Elasticitate, etc., cum sunt elipsoidul şi tensorul de inerţie, tensorul tensiunilor, tensorul deformărilor, etc. şi în primul rând tensorul metric fundamental g_{ij}, definit prin forma fundamentală a spaţiului metric.

Folosirea exclusivă a metodei vectoriale simbolice, deci a simbolismului Algebrei vectoriale, permite evitarea până la un punct a prezentării acestor mărimi sub forma tensorială, însă uneori cu preţul unor complicaţii de notaţii şi operaţii, care dovedesc necesitatea metodei tensoriale.

*§ 117. Tensori antisimetrici şi forme exterioare de vectori

Introducerea tensorilor simetrici de ordinul al doilea ca mărimi asociate cuadricelor sub forma punctuală sau tangenţială a pus în lumină strânsa legătură dintre tensori şi formele de vectori. Am văzut că această legătură nu este caracteristică tensorilor de ordinul al doilea, întrucât însăşi vectorii sunt legaţi de formele liniare de vectori.

Din această observaţie vom putea deduce posibilitatea de a defini tensorii ca mărimi asociate unor forme invariante de vectori.

Fie $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ o bază în spaţiul afin. Expresia

$$\frac{1}{2} t^{ij} [\bar{e}_i \bar{e}_j] = \frac{t^{12} - t^{21}}{2} [\bar{e}_1\, \bar{e}_2] + \frac{t^{23} - t^{32}}{2} [\bar{e}_2\, \bar{e}_3] + \frac{t^{31} - t^{13}}{2} [\bar{e}_3\, \bar{e}_1]$$

este o formă pătratică exterioară de vectorii bazei (§ 69).

Vom presupune antisimetria coeficienţilor t^{ij}, deci $t^{ij} = -t^{ji}$, astfel încât forma se reduce la

$$\frac{1}{2} t^{ij} [\bar{e}_i\, \bar{e}_j] = t^{12} [\bar{e}_1 \bar{e}_2] + t^{23} [\bar{e}_2 \bar{e}_3] + t^{31} [\bar{e}_3 \bar{e}_1]. \qquad (83,IV)$$

Scanned with OKEN Scanner

Un exemplu de formă pătratică exterioară este bivectorul contravariant. In adevăr, vom putea scrie[1]):

$$[\overline{U}\times\overline{V}]=[U^i\,\overline{e}_i\times V^j\,\overline{e}_j]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}U^i & V^i\\ U^j & V^j\end{vmatrix}[\overline{e}_i\times\overline{e}_j], \qquad (84,IV)$$

coeficienții

$$t^{ij}=\begin{vmatrix}U^i & V^i\\ U^j & V^j\end{vmatrix}$$

fiind antisimetrici.

In cele ce urmează vom folosi notația introdusă pentru produsele exterioare $[\overline{U}\,\overline{V}]$ pentru $[\overline{U}\times\overline{V}]$, deoarece se aplică și în cazul a trei factori

Să impunem formei (83,IV) condiția de a fi invariantă față de schimbarea bazei, ceeace nu înseamnă a reprezenta un scalar, ci a se transforma prin invarianță, deci după legea:

$$\frac{1}{2}\,t^{ij}\,[\overline{e}_i\,\overline{e}_j]=\frac{1}{2}\,t'^{kl}\,[\overline{e}'_k\overline{e}'_e], \qquad (85,IV)$$

prin analogie cu bivectorul (84,IV), a cărui expresie rămâne invariantă față de schimbarea bazei, deoarece reprezintă o mărime. *Invarianța formei pătratice exterioare exprimă faptul că această formă va reprezenta o mărime.*

Trecând la o nouă bază $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$, $\overline{e}'_3$, vom avea

$$\frac{1}{2}\,t^{ij}[A^k_i\overline{e}'_k,\,A^l_j\,\overline{e}'_l]=\frac{1}{2}\,A^k_iA^l_j\,t^{ij}\,[\overline{e}'_k\overline{e}'_l]=\frac{1}{2}\,t'^{kl}\,[\overline{e}'_k\,\overline{e}'_l],$$

de unde

$$t'^{kl}=A^k_i\,A^l_j\,t^{ij}.$$

Este ușor de arătat (Exercițiu) că proprietatea de antisimetrie se păstrează pentru coeficienții t^{ij} prin schimbarea bazei. Deasemenea, din legea de transformare a acestor coeficienți rezultă că ei constitue un tensor de ordinul al doilea contravariant.

Deci, *coeficienții antisimetrici ai unei forme pătratice exterioare de vectorii bazei contravariante* $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ *formează un tensor de ordinul a doilea contravariant antisimetric.*

Vom numi, în general *tensor antisimetric* orice tensor ale cărui componente sunt antisimetrice în raport cu o pereche de indici. De exemplu

$$t^{ij}=-t^{ji},\quad t_{ij}=-t_{ji}.$$

Un tensor mixt t^i_j nu este nici simetric, nici antisimetric. Simetria sau antisimetria unui tensor mixt nu este o proprietate invariantă față de schimbarea bazei (Exercițiu). Numai un tensor de forma $\lambda\delta^i_j$, deci un multiplu al tensorului-unitate poate fi simetric (Exercițiu).

Putem face o apropiere între formele pătratice algebrice și cele exterioare, observând că acestor forme li se asociază câte un tensor simetric, respectiv antisimetric.

---

[1]) Deoarece fiecare termen este repetat de două ori în sumă când permutăm pe i cu j, deci trebue împărțit prin 2.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, formei algebrice

$$p^{ij}\bar{e}_i\bar{e}_j$$

îi corespunde tensorul simetric $p^{ij}=p^{ji}$, iar formei exterioare

$$t^{ij}[\bar{e}_i\bar{e}_j]$$

îi corespunde tensorul antisimetric $t^{ij}=-t^{ji}$. In primul caz, produsul $(\bar{e}_i\bar{e}_j)$ este scalar, pe când în al doilea caz este exterior.

Numărul componentelor nenule ale unui tensor antisimetric de ordinul al doilea este 3, deoarece avem

$$t^{12}=-t^{21};\quad t^{23}=-t^{32};\quad t^{31}=-t^{13};\quad t^{11}=t^{22}=t^{33}=0.$$

El poate fi pus sub forma matricei antisimetrice

$$\left\|\begin{matrix} 0 & t^{12} & -t^{31} \\ -t^{12} & 0 & t^{23} \\ t^{31} & -t^{23} & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Orice bivector contravariant este un tensor antisimetric contravariant de ordinul al doilea.

Proprietatea rezultă imediat din expresia (84,IV) a bivectorului $[U, V]$. Pe de altă parte, am arătat, însă, că orice bivector contravariant este o capacitate vectorială covariantă. Deoarece modul de transformare este acelaşi pentru mărimile dintr'o categorie, putem deduce că *orice tensor antisimetric contravariant de ordinul al doilea este o capacitate vectorială.* Totuşi, pentru ilustrarea aplicării criteriului măsurii, vom da demonstraţia directă, folosind modul de transformare a formelor exterioare.

Vom nota, în general, componentele nenule ale tensorului antisimetric t^{ij} astfel:

$$t^{ij}=\tau_k,$$

unde k este al treilea indice din şirul 1, 2, 3, din care au fost extraşi întâi i şi j, sau dintr'o permutare circulară a acestui şir.

Astfel $\tau_2=t^{31}$, etc. Vom avea:

$$\frac{1}{2}t^{ij}[\bar{e}_i\bar{e}_j]=\tau_r\bar{e}^r[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3];$$

$$\frac{1}{2}t'^{kl}[\bar{e}'^k\bar{e}'^l]=\tau'_s\bar{e}'^s[\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3]$$

conform cu (9,IV). Egalând aceste expresii, în virtutea invarianţei formei exterioare, conform cu (85,IV), vom scrie

$$E\tau_r\bar{e}^r=E\tau'_s\bar{e}'^s=AE\tau'_s(A^s_r\bar{e}^r),$$

de unde

$$\tau_r=A\,A^s_r\tau'_s.$$

Comparând cu (19,IV), deducem că τ_r se transformă ca o capacitate vectorială covariantă.

Scanned with OKEN Scanner

Putem deci enunţa următorul rezultat: *Orice tensor antisimetric de ordinul al doilea contravariant este o capacitate vectorială covariantă.*

Prin aceasta este lămurită complect problema bivectorilor. Natura acestor mărimi, care părea scalară în plan şi vectorială în spaţiu, este în realitate tensorială. Introducerea capacităţilor şi densităţilor explică dece aceste mărimi măsurabile cu trei unităţi se transformă aproape ca vectorii, dar totuşi depind de orientarea spaţiului. Privită însă în cadrul mai larg al Calculului tensorial, problema bivectorului devine mai simplă:

Orice bivector este un tensor de ordinul al doilea antisimetric şi se transformă după legea tensorilor de ordinul al doilea. Un bivector are de fapt nouă componente, dar dintre acestea numai şase sunt nenule, două câte două egale şi de semne contrare. Această particularitate, în spaţiul cu trei dimensiuni, face ca transformarea să se simplifice şi astfel se obţine o mărime cu trei componente, în speţă o capacitate vectorială covariantă (respectiv o densitate vectorială contravariantă).

Urmând calea folosită mai sus şi pornind dela o formă exterioară

$$-\frac{1}{2} t_{ij} [\bar{e}^i \bar{e}^j]$$

vom putea introduce tensorii de ordinul al doilea antisimetrici covarianţi, stabilind următorul rezultat: *Orice tensor antisimetric de ordinul al doilea covariant este o densitate vectorială contravariantă.*

*§ 118. Mărimile tensoriale ale Calculului vectorial

Rezultatele obţinute ne permit o privire unitară asupra bivectorilor şi trivectorilor, pe de o parte, şi asupra densităţilor şi capacităţilor, pe de altă parte. Metodele vectoriale ne-au condus cu necesitate la distincţia între scalari şi vectori, pe de o parte, şi pseudo-scalari şi pseudo-vectori, pe de altă parte, iar introducerea măsurii şi a criteriului măsurii au stabilit deosebirile dintre aceste categorii de mărimi. Totuşi, dacă ţinem seama de faptul că atât bivectorii, cât şi trivectorii au fost obţinuţi prin operaţia de produs de vectori, vectorial în primul caz şi mixt în al doilea, *se pune întrebarea dacă între pseudo-scalari şi pseudo-vectori nu există o legătură mai strânsă decât cea pusă în evidenţă până în prezent.*

Intrebarea este naturală, dacă ne gândim la faptul că în ambele cazuri transformarea acestor mărimi introduce un factor, în speţă determinantul A sau inversul său A^{-1}. Pentru a putea răspunde, este necesar să le examinăm dintr'un punct de vedere comun şi în lumina aceluiaşi criteriu al măsurii. Ori, acest punct de vedere este indicat de modul de formare a exemplelor celor mai simple de densităţi şi capacităţi, cu ajutorul produselor exterioare de vectori, care ne-au condus la bivectori şi trivectori.

In spaţiul cu trei dimensiuni nu putem avea decât produse exterioare de cel mult trei factori. Deoarece produsul de doi factori a fost examinat în paragraful precedent, vom considera forma cubică exterioară

$$\frac{1}{3!} t^{ijk} [\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k], \qquad (86,IV)$$

cu coeficienţi antisimetrici.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea deci:

$$\tau = t^{123} = t^{231} = t^{312}; \quad t^{213} = t^{132} = t^{321} = -t^{123} = -\tau;$$
$$t^{113} = t^{122} = \ldots = 0; \quad t^{111} = t^{222} = t^{333} = 0.$$

Din cele $27 = 3^3$ componente t^{ijk}, toate cele cu doi sau trei indici egali sunt nule, iar celelalte $6 = 3!$, cu indici distincţi, se împart în două grupe: cele care se obţin printr'o permutare pară din t^{123} iau valoarea τ, cele ce se deduc din t^{123} printr'o permutare impară iau valoarea $-\tau$.

De fapt, vom avea:

$$\frac{1}{3!} t^{ijk} [\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k] = \frac{1}{3!} (t^{123} - t^{213} + t^{231} - t^{321} + t^{312} - t^{132}) [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3],$$

de unde

$$\frac{1}{3!} t^{ijk} [\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k] = \tau [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3]. \qquad (87,IV).$$

Deoarece forma (86,IV) reprezintă o mărime, ea va fi invariantă faţă de schimbarea bazei şi vom scrie:

$$\frac{1}{3!} t^{ijk} [\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k] = \frac{1}{3!} t'^{lmn} [\bar{e}'_l \bar{e}'_m \bar{e}'_n]. \qquad (88,IV).$$

Ţinând seama de formulele de transformare ale bazei, vom avea

$$\frac{1}{3!} t'^{ijk} [A^l_i \bar{e}'_l, \; A^m_j \bar{e}'_m, \; A^n_k \bar{e}'_n] = \frac{1}{3!} A^l_i A^m_j A^n_k t^{ijk} [\bar{e}'_l \bar{e}'_m \bar{e}'_n].$$

Egalând cu membrul al doilea din (88,IV), deducem:

$$t'^{lmn} = A^l_i A^m_j A^n_k t^{ijk}. \qquad (89,IV).$$

Sistemul de coeficienţi t^{ijk} se transformă în el însuşi, adică noile valori se exprimă exclusiv în funcţie de cele vechi şi de coeficienţii transformării bazei. Conform cu criteriul de invarianţă, ei vor forma componentele unei mărimi cu trei indici.

In tot ce precedă nu am ţinut seama de antisimetria lui t^{ijk}, ci numai de modul de transformare. Constatăm o analogie formală între modurile de transformare (89,IV) şi (71,IV), ambele prezentând caracterele transformării vectorilor contravarianţi.

Vom numi *tensor contravariant de ordinul al treilea* orice mărime a cărei componente se transformă după legea (89,IV), care se mai poate scrie şi

$$t^{ijk} = a^i_l a^j_m a^k_n t'^{lmn} \qquad (89',IV).$$

pentru transformarea inversă.

Când componentele sunt antisimetrice, respectiv simetrice, vom spune că tensorul este *antisimetric*, respectiv *simetric*. Proprietatea de simetrie este geometrică, adică independentă de alegerea bazei

Reamintindu-ne modul de formare al tensorilor de ordinul al doilea, vom putea folosi o formă cubică algebrică de vectori

$$p_{ijk} U^i V^j W^k \quad \text{sau} \quad q^{ijk} U_i V_j W_k.$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru a forma tensori *simetrici* de ordinul al treilea. Deasemenea, vom putea deduce şi *tensori mixti* din forme cubice, ca

$$p_{ij}{}^{k}U^{i}V_{j}W^{k};\quad p_{i}^{jk}U^{i}V_{j}W_{k}.$$

Revenind la tensorul antisimetric t^{ijk}, vom putea simplifica modul său de transformare ţinând seama de faptul că nu are decât şase componente nenule, egale toate cu $\pm\tau$.

Ţinând seama de (87,IV) şi (88,IV), forma cubică exterioară se va putea scrie

$$\tau[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3]=\tau'[\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3]=\tau' A[\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3],$$

de unde

$$\tau=A\tau';\quad \tau'=A^{-1}\tau.$$

Regăsim astfel modul de transformare (16',IV) a capacităţilor scalare, al căror model este trivectorul contravariant şi vom putea enunţa următorul rezultat: *Orice tensor de ordinul al treilea antisimetric contravariant este o capacitate scalară.*

Proprietatea poate fi dedusă şi direct din legea de transformare (89',IV) ţinând seama de antisimetrie (Exerciţiu).

Este uşor de stabilit un rezultat analog pentru tensori de ordinul al treilea antisimetrici covarianţi. Vom considera în acest scop forma invariantă

$$\frac{1}{3!}t_{ijk}[\bar{e}^i\bar{e}^i\bar{e}^k],$$

punând

$$t_{ijk}=\pm\tau_*,$$

după cum i, j, k, reprezintă o permutare pară sau impară a şirului 1, 2, 3. Vom deduce legea de transformare (17',IV)

$$\tau_*=A^{-1}\tau'_*;\quad \tau'_*=A\tau_*$$

a densităţilor scalare. Deci:

Orice tensor de ordinul al treilea antisimetric covariant este o densitate scalară.

In particular, orice trivector conduce la o formă cubică exterioară cu coeficienţi antisimetrici. In adevăr:

$$[\bar{U}\bar{V}\bar{W}]=[U^i\bar{e}_i,\ V^j\bar{e}_j,\ W^k\bar{e}_k]=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix}U^i & V^i & W^i\\ U^j & V^j & W^j\\ U^k & V^k & W^k\end{vmatrix}[\bar{e}_i\bar{e}_j\bar{e}_k]=$$

$$=\begin{vmatrix}U^1 & V^1 & W^1\\ U^2 & V^2 & W^2\\ U^3 & V^3 & W^3\end{vmatrix}[\bar{e}_1\bar{e}_2e_3].$$

Acelaşi determinant apare de şase ori cu liniile permutate în toate modurile, ceeace explică necesitatea împărţirii prin 3!.

Scanned with OKEN Scanner

Punând

$$t^{ijk} = \begin{vmatrix} U^i & V^i & W^i \\ U^j & V^j & W^j \\ U^k & V^k & W^k \end{vmatrix}$$

avem

$$[\overline{U}\,V\,\overline{W}] = \frac{1}{31}\, t^{ijk}\,[\overline{e}_i \overline{e}_j \overline{e}_k],$$

de unde: *Orice trivector contravariant este un tensor de ordinul al treilea antisimetric contravariant.*

In mod analog, obţinem rezultatul următor: *Orice trivector covariant este un tensor de ordinul al treilea antisimetric covariant.*

Reunind rezultatele relative la bivectori şi trivectori şi comparându-le cu cele relative la densităţi şi capacităţi, putem considera toate aceste mărimi dintr'un punct de vedere unitar: *Bivectorii şi trivectorii sunt tensori antisimetrici. Ei se prezintă în spaţiul cu trei dimensiuni sub forma de densităţii şi capacităţi vectoriale sau scalare.*

In realitate, aceste densităţi şi capacităţi sunt cazuri particulare de tensori care, din cauza antisimetriei, au un număr redus de componente.

In spaţiul cu trei dimensiuni, tensorul antisimetric de ordinul al doilea, neavând decât şase componente nenule, două câte două egale şi de semne contrare, se prezintă ca o mărime măsurabilă cu trei unităţi şi se transformă ca o capacitate sau densitate *vectorială*. Deasemenea, în spaţiul cu trei dimensiuni, tensorul antisimetric de ordinul al treilea neavând decât tot şase componente nenule, trei câte trei egale şi de semne contrare, se prezintă ca o mărime măsurabilă cu o unitate şi se transformă ca o capacitate sau densitate scalară.

In concluzie:

Mărimile fundamentale, atât în geometrie, cât şi în fizică, cum sunt bivectorii şi trivectorii, şi care se încadrează în Calculul vectorial ca produse exterioare de vectori, sunt tensori particulari şi trebue consideraţi ca tensori, pentru a putea explica proprietăţile lor cele mai importante, în primul rând pentru a-i putea clasifica.

Ţinând seama şi de faptul că însăşi forma metrică fundamentală a spaţiului euclidian pune în evidenţă tensorul fundamental g_{ij}, *suntem conduşi cu necesitate să considerăm Calculul vectorial ca o metodă de cercetare a unei părţi foarte importante dintre mărimile tensoriale.*

In lumina acestor constatări, *Calculul tensorial, deci calculul cu mărimi tensoriale, este extensiunea naturală şi necesară a Calculului vectorial.*

Aceste concluzii decurg din teoria mărimilor geometrice, asociate obiectelor geometrice în spaţiul afin, şi se extind la mărimile fizice, prin asocierea acestora mărimilor geometrice ale spaţiului.

In Calculul tensorial, vom considera vectorii ca tensori de ordinul întâi, iar scalarii ca tensori de ordinul zero.

Operaţiile Calculului vectorial, aplicate mărimilor geometrice şi fizice celor mai simple, ne conduc la tensori de primele trei ordine, tensorul de ordinul al treilea corespunzând trivectorului, deci măsurii volumelor în spaţiul cu trei dimensiuni.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile pseudo-scalare şi pseudo-vectoriale, de tipul densităţilor şi capacităţilor, pot fi extinse şi considerate ca *tensori relativi*, când se transformă ca tensorii, amplificându-se cu o putere întreagă a determinantului transformării bazei, deci a lui $A = \left| a^i_j \right|$. Puterea respectivă se numeşte *pondere.*

Capacităţile scalare sunt tensori relativi de ordinul zero şi de pondere —1, deoarece avem

$$\tau' = A^{-1}_{\cdot} \tau,$$

pe când densităţile scalare sunt tensori relativi de ordinul zero şi de pondere +1.

Deasemenea, capacităţile şi densităţile vectoriale sunt tensori relativi de ordinul întâi şi de pondere —1, respectiv +1.

EXERCIŢII

1. O dreaptă mobilă întâlneşte feţele unui triedru în trei puncte, ale căror distanţe mutuale sunt constante. Se cere locul geometric al unui punct invariabil legat de cele trei puncte considerate.

Indicaţie. Notând cu $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vectorii care definesc triedrul, cu A_1, A_2, A_3 punctele în care dreapta variabilă Δ înţeapă feţele triedrului, cu a^1, a^2, a^3 trei constante, cu $\bar{u}$ (u^1, u^2, u^3) versorul lui Δ şi cu $M(x^1, x^2, x^3)$ punctul, al cărui loc se cere, avem $g_{ij}u^iu^j = 1$: $x^1 + a^1u^1 = 0$; $x^2 + a^2u^2 = 0$; $x^3 + a^3u^3 = 0$. Eliminând parametrii u^1, u^2, u^3, se găseşte că locul căutat este cuadrica

$$g_{ij}\left(\frac{x^i}{a^i}\right)\left(\frac{x^j}{a^j}\right) = 1.$$

2. Fie $\bar{v}$ un vector măsurat într'o bază $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ şi $\bar{v}'$, acelaşi vector măsurat în baza $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$. Fie deasemenea $\bar{v}''$ acelaşi vector măsurat în a treia bază $(\bar{e}''_1, \bar{e}''_2, \bar{e}''_3)$. Cum se deduc componentele lui $\bar{v}''$ din acelea ale lui $\bar{v}$, faţă de baza iniţială?

Indicaţie. Să presupunem că trecerea dela prima bază la a doua se efectuează cu ajutorul transformării

$$\bar{e}'_1 = a^1_1 \bar{e}_1 + a^1_2 \bar{e}_2 + a^1_3 \bar{e}_3;$$

$$\bar{e}'_2 = a^2_1 \bar{e}_1 + a^2_2 \bar{e}_2 + a^2_3 \bar{e}_3;$$

$$\bar{e}'_3 = a^3_1 \bar{e}_1 + a^3_2 \bar{e}_2 + a^3_3 \bar{e}_3,$$

de matrice nesingulară

$$\alpha = \begin{Vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{Vmatrix}$$

şi că trecerea dela a doua bază la a treia se face cu ajutorul matricei nesingulare

$$\beta = \begin{Vmatrix} b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 \\ b^2_1 & b^2_2 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_2 & b^3_3 \end{Vmatrix}.$$

Un calcul simplu ne arată că trecerea directă dela prima bază la a treia se efectuează cu ajutorul matricei

Scanned with OKEN Scanner

$$\gamma = \begin{Vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{Vmatrix},$$

unde $c_j^i = b_k^i a_j^k$, indicele mut fiind k.

Prescurtat, vom spune că matricea γ este produsul matricelor β și α, adică $\gamma = \beta\alpha$. In general, $\beta\alpha \neq \alpha\beta$. Trecerea dela componentele contravariante ale lui $\overline{v}$ față de prima bază la acelea ale lui $\overline{v}''$ față de ultima, se va face în mod similar, ceeace vom scrie pe scurt $\overline{v}'' = \beta\alpha\overline{v}$.

Se demonstrează cu ușurință că acest produs este asociativ, adică $\beta(\alpha\delta) = (\beta\alpha)\delta = \beta\alpha\delta$. Matricea inversă a unei matrice nesingulare α se notează cu α^{-1} și avem $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$ unde ε este matricea-unitate

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3. Fie $\overline{v}$ un vector măsurat într'o bază și $\overline{V}$ același vector măsurat în o a doua bază, trecerea dela prima la a doua efectuându-se cu ajutorul unei matrice nesingulare α. Fie t o matrice oarecare, care transformă în prima bază pe $\overline{v}$ în $\overline{u}$, iar $\overline{U}$ fie același vector $\overline{u}$ măsurat în a doua bază. Ce legătură există între $\overline{V}$ și $\overline{U}$?

Indicație. Avem $\overline{V} = \alpha\overline{v}$, $\overline{u} = t\overline{v}$, $\overline{U} = \alpha\overline{u}$, conform notațiilor adoptate în exercițiul precedent.

Un calcul simplu ne arată că trecerea inversă, dela $\overline{V}$ la $\overline{v}$ se face cu ajutorul matricei inverse matricei α, pe care în exercițiul precedent am notat-o cu α^{-1}. Deci, $\overline{v} = \alpha^{-1}\overline{V}$. Inlocuind pe rând în relația a doua și apoi în a treia se obține $\overline{U} = \alpha t\alpha^{-1}\overline{V}$.

Matricea $\alpha t\alpha^{-1}$ poartă numele de matricea transformată a lui t prin matricea nesingulară α.

Astfel, dacă starea tensiunilor într'un punct al unui mediu elastic se exprimă prin cele nouă componente, care compun o matrice t, (care în acest caz, din considerații fizice, este simetrică), componentele față de o a doua bază, provenită din prima cu ajutorul transformării de matrice nesingulară α, vor fi date de matricea $T = \alpha t\alpha^{-1}$ (care se verifică cu ușurință a fi deasemenea simetrică).

4. Să se arate că, dacă un tensor este nul într'un sistem de referință, atunci el este nul față de orice sistem.

Indicație. Fie t_{ik} un tensor de ordinul al doilea covariant. Din $t_{ik}^3 = 0$ pentru $i, k = 1, 2, 3$ se deduce, aplicând formulele de transformare, $t_{ik}' = 0$. Analog pentru un tensor contravariant sau pentru un tensor mixt.

5. Să se arate că, dacă doi tensori sunt egali într'un sistem $(t_l^k = \tau_l^k)$, ei sunt egali față de orice sistem $(t_l'^k = \tau_l'^k)$.

Indicație. Se folosește exercițiul precedent.

6. Să se arate că, dacă pentru un tensor de componente u_{ij} avem relația $au_{ij} + bu_{ji} = 0$, unde a și b sunt scalari, tensorul este sau simetric, sau antisimetric.

Indicație. Se vor schimba indicii: $au_{ji} + bu_{ij} = 0$; se scad apoi cele două relații.

7. Fiind dați doi vectori $\overline{x}$ și $\overline{y}$, respectiv $\overline{x}_*$ și $\overline{y}_*$ de varianța indicată prin notație, să se arate că

$$t^{ik} = x^i y^k + x^k y^i; \quad \tau_{ik} = x_i y_k + x_k y_i$$

Scanned with OKEN Scanner

sunt componentele a doi tensori simetrici de ordinul al doilea, primul contravariant, al doilea covariant, iar

$$a^{ik}=x^iy^k-x^ky^i, \quad b_{ik}=x_iy_k-x_ky_i$$

doi tensori antisimetrici.

Indicație. Din formulele de transformare ale componentelor vectorilor se deduc cele pentru componentele tensorilor.

8. T^{ik}_{ij} fiind un tensor de ordinul și varianța indicate prin notație, să se arate că relația

$$A(l, j)\,X^k=T^k_{lj}$$

invariantă față de schimbările de axe și valabilă pentru orice vector contravariant $\overline{X}$, definește un tensor $A(l, j)$ a cărui varianță se cere.

Indicație. Se va obține un tensor de ordinul al doilea covariant A_{lj} aplicând criteriul măsurii.

9. Să se arate că orice tensor T^{ik} sau T_{ik} se poate descompune în mod unic într'o sumă $S^{ik}+A^{ik}$, respectiv $S_{ik}+A_{ik}$, unde S_{ik} este un tensor simetric, iar A_{ik} un tensor antisimetric.

Indicație. $S^{ik}=T^{ik}+T^{ki}$, $A^{ik}=T^{ik}-T^{ki}$. Se arată apoi că descompunerea este unică, punând $T^{ik}=(S^{ik}+S_1^{ik})+(A^{ik}-S_1^{ik})$ și observând că S_1^{ik} trebuie să fie în același timp simetric și antisimetric, deci nul.

10. Fie T'^{ik} componentele tensorului T^{ik} față de un nou sistem de axe. Să se arate că partea simetrică S'^{ik} și cea antisimetrică A'^{ik} sunt transformatele tensorilor S^{ik} și A^{ik} din descompunerea lui T^{ik}.

Să se arate că relațiile:

1) $T(i, k)\,X_i=Y^k$; 3) $T(i, k)\,X_l=Y_k$;

2) $T(i, k)\,X^l=Y_k$; 4) $T(i, k)\,X^i=Y^k$;

invariante față de schimbările de axe, în care $\overline{X}$ și $\overline{Y}$, respectiv $\overline{X}_*$ și $\overline{Y}_*$ sunt vectori arbitrari având varianțele indicate, definesc tensori $T(i, k)$, ale căror varianțe se cer pentru fiecare caz.

Indicație. Se folosesc formulele de transformare ale vectorilor față de schimbările de axe, căutându-se modul de transformare al lui $T(l, k)$.

11. δ_{ikl} fiind tensorul-unitate antisimetric (densitatea tensorială a lui Levi-Civita)

$$\delta_{ikl}=\begin{cases} 1, \text{ când } ikl \text{ este o permutare pară a lui } 1, 2, 3; \\ 1, \text{ când } ikl \text{ este o permutare impară a lui } 1, 2, 3, \end{cases}$$

să se arate că au loc relațiile (δ^i_l fiind simbolul lui Kronecker)

$$\delta_{ikl}\,\delta^{imn}=\delta^m_k\delta^n_l-\delta^n_k\delta^m_l; \quad \delta_{ikl}\,\delta^{ikm}=2\delta^m_l.$$

12. Să se arate că față de transformări ortogonale, orice tensor antisimetric de ordinul al treilea poate fi definit ca produs al tensorului-unitate antisimetric (exercițiul 11) cu un scalar.

13. Pornind dela norma produsului vectorial

$$(\bar{a}\times\bar{b})^2=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(a^ib^k-a^kb^i)^2,$$

să se demonstreze inegalitatea lui Cauchy-Buniacovschi

$$\sum_i(a^i)^2\sum_i(b^i)^2\geq\sum_i(a^ib^i)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

14. Tensorul tensiunilor electrostatice într'un dielectric omogen are expresia

$$T=\frac{1}{4\pi}\begin{Bmatrix} \varepsilon\left(E_x^2-\frac{E^2}{2}\right) & \varepsilon E_xE_y & \varepsilon E_xE_z \\ \varepsilon E_yE_x & \varepsilon\left(E_y^2-\frac{E^2}{2}\right) & \varepsilon E_yE_z \\ \varepsilon E_zE_x & \varepsilon E_zE_y & \varepsilon\left(E_z^2-\frac{E^2}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

unde E_x, E_y, E_z, sunt componentele și E-mărimea vectorului câmp electric, iar ε—permitivitatea (constanta dielectrică) mediului (cf. I. E. Tamm, Bazele teoriei Electricității, Editura Tehnică, București 1952, § 34).

a) Să se scrie în notație tensorială componentele acestui tensor.

b) Să se găsească axele principale ale cuadricei tensiunilor și să se verifice că această cuadrică este de revoluție.

Să se afle direcția axei de rotație a cuadricei și tensiunea transmisă printr'un element de suprafață, perpendicular pe această direcție, conținând direcția, sau de orientare arbitrară.

Indicație. a) $T_{ij}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\left[E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E_kE^k\right]$.

b) Axele principale ale unui tensor se găsesc din sistemul de ecuații

$$T_j^k n_k=\lambda n_j; \qquad (j,k=1,2,3).$$

In cazul nostru, condiția ca sistemul să aibă soluții nenule este anularea determinantului:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_x^2-\frac{E^2}{2}\right)-\lambda & \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y & \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_z \\ \frac{\varepsilon}{4\pi}E_yE_x & \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_y-\frac{E^2}{2}\right)-\lambda & \frac{\varepsilon}{4\pi}E_yE_z \\ \frac{\varepsilon}{4\pi}E_zE_x & \frac{\varepsilon}{4\pi}E_zE_y & \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_z-\frac{E^2}{2}\right)-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Desvoltând, se obține ecuația

$$8\lambda^3+4E^2\lambda^2-2E^4\lambda-E^6=0,$$

cu rădăcinile

$$\lambda_1=\frac{\varepsilon}{8\pi}E^2=W; \qquad \lambda_2=\lambda_3=-\frac{\varepsilon}{8\pi}E^2=-W.$$

$\left(W=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\right.$ este expresia densității de energie liberă a câmpului electrostatic: cf. Tamm, op. cit. § 31$\left.\right)$.

Se vede că cuadrica are o axă de simetrie. Direcția axei $\overline{n}^{(1)}$ se determină din sistemul omogen

$$\begin{aligned} (E_x^2-E^2)\,n_x^{(1)}+E_xE_yn_y^{(1)}+E_xE_zn_z^{(1)}&=0;\\ E_yE_xn_x^{(1)}+(E_y^2-E^2)\,n_y^{(1)}+E_yE_zn_z^{(1)}&=0;\\ E_zE_xn_x^{(1)}+E_zE_yn_y^{(1)}+(E_z^2-E^2)\,n_z^{(1)}&=0, \end{aligned}$$

de unde se obține

$$n_x^{(1)}:n_y^{(1)}:n_z^{(1)}=E_x:E_y:E_z.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\overline{n}^{(1)}$ este paralel cu $\overline{E}$ (axa de rotație a cuadricei are direcția câmpului electric) celelalte două axe fiind arbitrare și egale în planul perpendicular pe câmp. În acest sistem de axe, tensorul tensiunilor are forma

$$T' = \begin{Vmatrix} \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \end{Vmatrix}.$$

Tensiunea pe un element de suprafață, perpendicular pe $\overline{E}$ (presiunea electrostatică), este

$$\overline{p}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \overline{n}^{(1)},$$

iar pe elemente de suprafață, care conțin pe $\overline{E}$

$$\overline{p}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \overline{n}^{(2)}; \qquad \overline{p}^{(3)} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \overline{n}^{(3)}.$$

Pentru un element de suprafață orientat arbitrar cu normala $\overline{n}$ alegem axa Oz după direcția lui $\overline{E}$ și axa Ox perpendiculară pe planul format de $\overline{n}$ și $\overline{E}$. Fie ϑ unghiul între $\overline{n}$ și $\overline{E}$, atunci

$$p_x = 0; \quad p_y = -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \sin\vartheta; \quad p_z = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \cos\vartheta \quad \text{și} \quad |\overline{p}| = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2.$$

15. Fie $p(\overline{U}, \overline{V}) = a^i_j u^j V_i$ o formă biliniară de un vector contravariant $\overline{U}$, și un vector covariant $\overline{V}$, măsurați respectiv în bazele $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ și $(\overline{f}^1, \overline{f}^2, \overline{f}^3)$.

Dacă bazele se înlocuesc cu $(\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3)$ și $(\overline{f}'^1, \overline{f}'^2, \overline{f}'^3)$, transformările bazelor fiind determinate de matricele $B = \| b^s_j \|$ și $C = \| c^i_k \|$, se cere expresia, în bazele noi, a formei biliniare.

Indicație. Efectuând calculele se găsește că $p(\overline{U}', \overline{V}') = p'^i_j U'^j V'_i$, unde $p'^i_j = c^i_k a^k_s b^s_j$.

B. VECTORI ALUNECĂTORI

§ 119. Forțele ca mărimi vectoriale

Caracterul vectorial al forțelor rezultă pe cale experimentală. O forță oarecare este caracterizată prin mărimea, direcția și punctul său de aplicație.

Deoarece forțele lucrează asupra materiei, prin *punct de aplicație* înțelegem un element de materie reductibil, din punct de vedere teoretic, la un punct geometric.

O forță aplicată unei particule materiale este o mărime vectorială reprezentabilă printr'un vector legat. Se arată experimental că acțiunea a două

Scanned with OKEN Scanner

forțe asupra aceleiași particule este egală cu acțiunea unei forțe reprezentabile prin suma vectorială a celor doi vectori reprezentativi[1]).

O particulă materială în echilibru se găsește sub acțiunea unor forțe a căror sumă vectorială este nulă.

Când înlocuim acțiunea mai multor forțe asupra unui punct material, deci asupra unei particule materiale, prin acțiunea sumei lor vectoriale, numim această forță, echivalentă cu toate cele înlocuite, *rezultanta lor.*

Intr'un sistem material, format dintr'un număr finit sau infinit de particule, forțele constitue un sistem de vectori, în general legați de punctele lor de aplicație.

Un corp rigid este definit ca un astfel de sistem de particule materiale, care își păstrează distanțele mutuale. Aceasta presupune că putem compara distanțele în diverse puncte ale spațiului, deci că spațiul este considerat metric. Etalonul de lungime este de fapt chiar el un sistem rigid, care poate fi transportat fără deformare în tot spațiul.

O forță aplicată unei particule oarecare a corpului rigid se spune că este *aplicată corpului în punctul respectiv.*

Pentru nevoile Staticei, putem complecta orice sistem rigid cu întreg spațiul, sau cu o porțiune indefinită din acesta.

Se verifică experimental că două forțe egale și opuse, aplicate unui corp solid în echilibru, nu modifică starea de echilibru. Dacă se adoptă această constatare ca principiu, sub numele de *Principiul transmisibilității forțelor*, se poate adăuga sau suprima orice pereche de forțe egale și opuse, aplicate unui sistem rigid, fără a-i modifica starea. In particular putem schimba punctul de aplicație al oricărei forțe pe suportul său, deoarece aceasta revine la adăugarea a două forțe egale și opuse.

Prin urmare, în Statica sistemelor rigide, punctul de aplicație al forțelor nu este important, acestea fiind caracterizate prin mărimea, suportul și sensul lor pe acest suport. Urmează că în Statica sistemelor rigide forțele sunt reprezentabile, nu prin vectori legați, ci prin *vectori alunecători* (pe suporturile lor).

Operațiile Algebrei vectoriale nu se pot aplica acestor vectori fără discernământ, deoarece ele sunt concepute pentru vectori liberi. Totuși, principiul transmisibilității forțelor permite folosirea Calculului vectorial în Statica sistemelor rigide, cu unele modificări ale căror semnificații mecanice sunt legate de problema echilibrului acestor sisteme.

Reprezentarea vectorială a forțelor, care lucrează asupra sistemelor rigide conduce la *Teoria vectorilor alunecători*, în care noțiunea de forță nu mai intervine direct, dar sugerează mersul însuși al desvoltărilor teoretice. Această teorie se aplică apoi în toate problemele de Statica sistemelor rigide, considerându-se sistemele de forțe reprezentabile vectorial prin sisteme de vectori alunecători.

---

1) Intr'o expunere sistematică a principiilor mecanicei, acest rezultat experimental este ridicat la rangul de principiu, constituind a patra lege a lui Newton (A. Sommerfeld, Mechanik, Leipzig 1943, p. 6.

Scanned with OKEN Scanner

§ 120. Caracterizarea vectorului alunecător

Fiind dată o dreaptă D în spațiul pe care figurăm un segment orientat $\overline{AB}$, putem desena un alt segment orientat $\overline{A'B'}$ pe aceeași dreaptă, astfel încât $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ și sensul ambelor segmente să fie același, alegând A' arbitrar pe D (fig. 101).

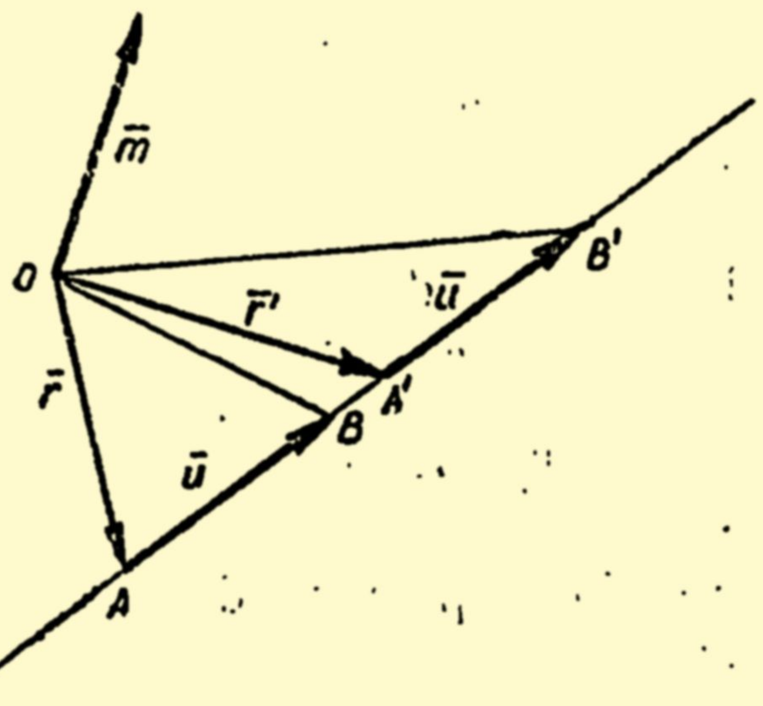


Fig. 101

Vom considera toate aceste segmente, care se obțin unul din altul prin *translația dealungul dreptei D* ca echivalente, cum se întâmplă în cazul forțelor aplicate unui sistem rigid, dacă folosim principiul transmisibilității.

Mulțimea tuturor segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$ etc., orientate și echivalente, este caracterizată prin aceeași mărime, același sens și aceeași dreaptă D, pe care o vom numi *suport*,

Prin urmare, din mulțimea tuturor segmentelor orientate din întreg spațiul, se desprinde o clasă de segmente, care au un număr de proprietăți comune.

Vom numi *vector alunecător* clasa tuturor segmentelor orientate, care au:

1) același suport D;
2) același modul AB;
3) același sens pe D.

Mai precis, vom spune că această clasă de segmente orientate echivalente definește un *vector alunecător*, care este o noțiune abstractă, o mărime, concretizată prin fiecare dintre segmentele $\overline{AB}$ ale clasei. Oricare dintre aceste segmente orientate este un reprezentant al vectorului alunecător, care rămâne ca tip al clasei.

Facem observația că introducerea noțiunii de *modul* în definiția vectorului alunecător nu presupune măsura distanțelor în toate direcțiile spațiului. Este suficient, ca și pentru vectorul liber, să considerăm $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, când se deduc unul din altul prin translație dealungul lui D.

Toate noțiunile, care intervin în definiția vectorului alunecător aparținând spațiului afin, *vectorul alunecător este o mărime geometrică a spațiului afin*.

Pentru a determina un vector alunecător, este necesar să cunoaștem suportul său D. La rândul său, dreapta D este determinată, de exemplu, printr'un punct A și prin direcția sa, adică printr'un vector liber $\bar{u} = \overline{AB}$, punctul A fiind determinat prin vectorul său de poziție $\overline{OA}$. Prin urmare, vectorul alunecător este determinat prin mărimi geometrice, dar, ca și vectorul legat, presupune un punct de referință O, dealtfel arbitrar.

Se vede că, nici punctele A și O, nici vectorul $\overline{OA}$, nici chiar vectorul $\bar{u}$, care poate fi înlocuit prin $\lambda\bar{u}$, nu sunt intrinsec legate de vectorul alunecător, deoarece pot fi înlocuite cu altele echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul alunecător nu este un caz particular de vector liber. El se deosebeşte esenţial, atât de acesta cât şi de vectorul legat, care este definit în mod unic prin punctul său de aplicaţie şi prin reprezentantul din acest punct al unui vector liber.

Vom nota vectorul alunecător prin suportul său D şi prin vectorul liber $\bar{u}=\overline{AB}$.

Deasemenea, uneori este preferabil să menţionăm chiar punctul de aplicaţie A al vectorului alunecător pe suportul său, ţinând bine înţeles seama că poate fi deplasat dealungul lui D. Vom utiliza deci notaţiile

$$(D, \bar{u}) \quad \text{sau} \quad (A, \bar{u}) \equiv A, \bar{u} \equiv A\,\bar{u} \tag{90,IV}$$

şi vom numi $\bar{u}$ *vectorul liber* al vectorului alunecător.

Doi vectori alunecători sunt *egali*, dacă au acelaşi suport, acelaşi modul şi acelaşi sens pe suport. Se observă că, dacă au acelaşi vector liber $\bar{u}$, vor avea şi acelaşi modul şi acelaşi sens. Prin urmare, suportul şi vectorul liber caracterizează şi egalitatea a doi vectori alunecători.

Doi vectori alunecători sunt prin definiţie egali, dacă au acelaşi suport D şi acelaşi vector liber.

Vom scrie această egalitate:

$$(D, \bar{u}) = (D', \bar{u}) \quad \text{dacă} \quad D \equiv D' \quad \text{şi} \quad \bar{u} = \bar{u}'. \tag{91,IV}$$

Dacă folosim notaţia $(A, \bar{u})$, $(A', \bar{u}')$, vom scrie:

$$(A, \bar{u}) = (A', \bar{u}'), \text{ dacă } \bar{u} = \bar{u}' \text{ şi } \overline{AA'} = \lambda\bar{u} \ (\lambda \text{ fiind un scalar}). \tag{92,IV}$$

In adevăr, pentru ca vectorii să aibă acelaşi suport, trebue ca A' să fie pe D, deci $\overline{AA'}$ să fie coliniar cu $\bar{u}$.

Relaţia de echivalenţă a vectorilor alunecători impune ca cele două suporturi D şi D' să *coincidă*. Cum însă o dreaptă nu este ea însăşi o mărime geometrică, ci este determinată prin mărimi geometrice, cele două suporturi vor coincide când mărimile, care determină dreptele D şi D' vor satisface condiţiile necesare şi suficiente corespunzătoare, de exemplu, condiţiile (92,IV) menţionate (fig. 101).

Echivalenţa vectorilor alunecători revenind deci la egalitatea unor mărimi geometrice, *vom considera vectorul alunecător ca o mărime geometrică a spaţiului afin.* Mulţimea tuturor vectorilor alunecători formează deci o specie de mărimi geometrice.

Aceasta ne va permite să introducem operaţia de adunare şi măsura vectorilor alunecători. Consideraţiile făcute ne vor ajuta să înţelegem deosebirile ce apar în aceste operaţii între vectorii alunecători şi cei liberi sau legaţi, deosebiri care corespund semnificaţiei lor fizice, de exemplu celei de forţe aplicate solidelor.

§ 121. Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct

Elementul geometric introdus pentru caracterizarea vectorilor alunecători, suportul, este orientat prin vectorul liber $\bar{u}$, sau, mai bine, prin versorul $\frac{\bar{u}}{u}$ al acestuia.

Scanned with OKEN Scanner

Doi vectori alunecători sunt *opuşi*, dacă vectorii lor liberi sunt opuşi şi suportul acelaşi; deci

$$(D, \bar{u}) = -(D', \bar{u}'), \quad \text{dacă} \quad D \equiv D' \quad \text{şi} \quad \bar{u}' = -\bar{u}. \qquad (93,IV)$$

Acţiunile forţelor asupra unui corp solid se manifestă prin deplasarea acestuia în spaţiu. Orice deplasare este rezultatul aplicării succesive a unor translaţii şi rotaţii.

Rotaţiile fiind măsurate prin bivectori sau prin produsele vectoriale reprezentative, o mărime caracteristică pentru vectorii alunecători va fi *momentul* în raport cu un punct O din spaţiu.

Numim moment al vectorului alunecător $(A, \bar{u})$ *în raport cu punctul* O *bivectorul definit de* $\overline{OA}$ *şi* $\bar{u}$ (fig. 101). Acest bivector este reprezentat prin produsul vectorial

$$\bar{m} = \overline{OA} \times \bar{u}. \qquad (94,IV)$$

Momentul este reprezentat ca un vector legat, figurat chiar în punctul O, dar nu trebue pierdut din vedere că *el are toate proprietăţile bivectorilor egaţi* (§. 43).

Momentul m *este independent de poziţia punctului* A *pe suportul* D.

In adevăr, să alegem O ca punct de reper; notând

$$\overline{OA} = \bar{r}; \quad \overline{OA'} = \bar{r}';$$

vom avea şi $\overline{AA'} = \lambda \bar{u}$, unde λ este un scalar pozitiv sau negativ.

Dacă $\bar{m}'$ este momentul lui $(A', \bar{u})$ faţă de acelaşi punct O, vom avea

$$\bar{m}' = \overline{OA'} \times \bar{u} = \bar{r}' \times \bar{u};$$

însă

$$\bar{r}' = \bar{r} + \overline{AA'} = \bar{r} + \lambda \bar{u},$$

de unde

$$\bar{m}' = (r + \lambda \bar{u}) \times \bar{u} = \bar{r} \times \bar{u} = \bar{m}.$$

Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct nu depinde, deci, decât de suportul D, vectorul liber $\bar{u}$ şi punctul O. Momentul $\bar{m}$ este nul când

1) $\bar{u} = 0$:

2) $\bar{u} \parallel \bar{r}$;

3) $\bar{r} = 0$.

Inafară de cazul când vectorul liber este nul, *momentul nu poate fi nul decât dacă* O *se găseşte pe suportul vectorului alunecător.*

Momentul este perpendicular pe vectorul liber, deci avem

$$\bar{m}\,\bar{u} = 0. \qquad (95,IV)$$

In cazul când se consideră numai vectori alunecători coplanari, situaţi în spaţiul cu două dimensiuni constituit de planul acestor vectori, bivectorul moment ia caracterul pseudo-scalar şi apare ca dublul ariei triunghiului $O\,A\,B$

Scanned with OKEN Scanner

orientat. *Teoria metrică a vectorilor alunecători nu se poate desvolta complect geometric decât în spaţiul cu trei dimensiuni (cel puţin).*

Momentul în raportul cu un punct caracterizează în primul rând, suportul vectorului alunecător, adică axa determinată de versorul $\frac{\bar{u}}{u}$ pe D.

Vom numi *momentul axei D, în raport cu un punct O,* momentul versorului $\bar{v}$ al acestei axe în raport cu O, adică

$$\bar{\mu} = \bar{r} \times \bar{v}; \quad (\bar{r} = \overline{OA}). \tag{96,IV}$$

Momentul astfel definit nu este altceva decât momentul vectorului alunecător $(D, \bar{v})$ sau $(A, \bar{v})$ având ca vector liber versorul $\bar{v}$.

Pentru proprietăţile geometrice ale vectorilor alunecători, modulele vectorilor liberi nu reprezintă importanţă, ci numai versorii corespunzători.

§ 122. Coordonate vectoriale ale unui vector alunecător

Definiţia vectorului alunecător conţine un element geometric greu de caracterizat vectorial, în mod simplu. In adevăr, dacă determinăm vectorul alunecător prin $(A, \bar{u})$, punctul A este reprezentabil prin vectorul său de poziţie, dar el nu este esenţial, putând fi mutat oriunde pe suportul D. Dacă, dimpotrivă, folosim definiţia $(D, \bar{u})$ trebue în primul rând, să exprimăm pe D vectorial şi apoi să observăm că, D fiind paralelă cu $\bar{u}$, datele sunt supraabundente. Totuşi, suportul fiind un element esenţial al vectorului alunecător, este necesar să fie caracterizat vectorial şi folosit pentru determinarea vectorului.

Ori, prin cunoaşterea vectorului $\bar{u}$ aşezat pe D, deci a versorului $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{u}$ al axei D şi prin cunoaşterca momentului $\bar{m}$ al lui $\bar{u}$ în raport cu un punct O, dreapta D este determinată.

In adevăr, din punct de vedere geometric, dreapta D se va găsi într'un plan dus perpendicular pe $\bar{m}$ în O şi va avea direcţia lui $\bar{u}$. Dacă s'ar cunoaşte vectorul $\overline{OA} = \bar{d}$, perpendicular pe D, dreapta ar fi determinată. (fig.102). Ori, aceasta revine la determinarea înălţimii unui triunghi OAB, de arie dată $\frac{1}{2} m$ şi având ca bază $\overline{AB} = \bar{u}$, ceeace este uşor realizabil. Vom stabili următoarea propoziţie:

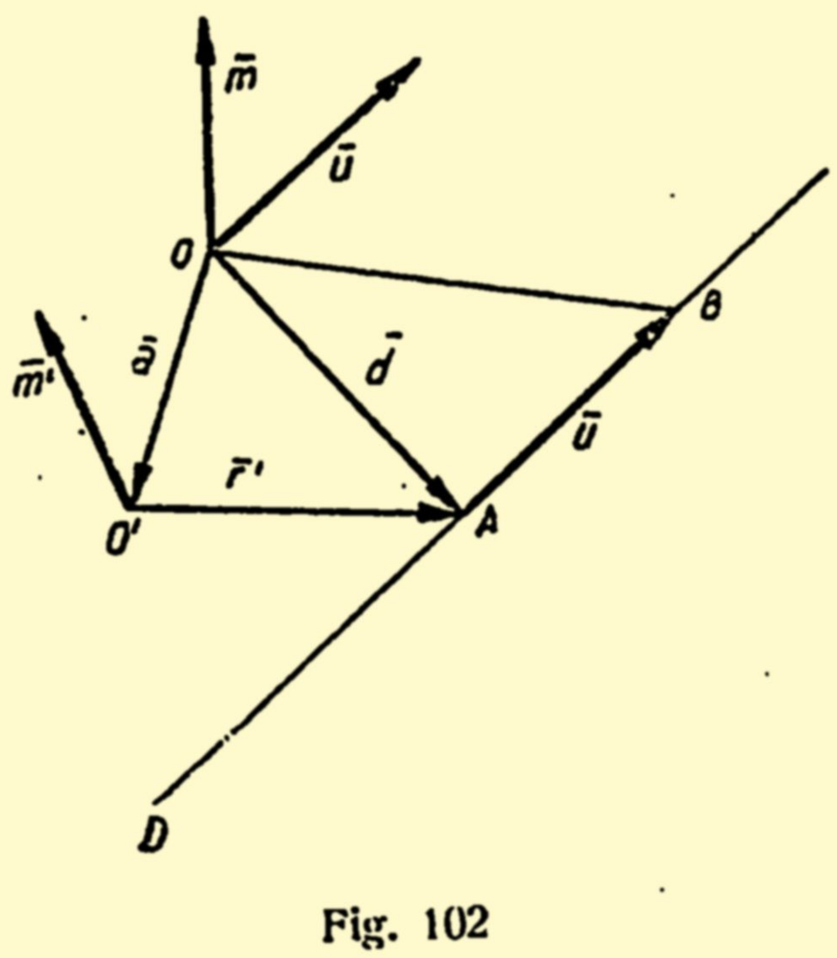


Fig. 102

Fiind dat un punct O, un vector liber $\bar{u}$ şi un vector legat $\bar{m}$, perpendicular pe $\bar{u}$ în O, există un vector alunecător $(D, \bar{u})$ şi numai unul, al cărui moment în raport cu O este $\bar{m}$ şi al cărui vector liber este $\bar{u}$.

Presupunând problema rezolvată, să determinăm vectorul $\bar{d} = \overline{OA}$ în funcţie de $\bar{m}$ şi $\bar{u}$. Vectorii $\bar{m}, \bar{d}, \bar{u}$ formează un triedru pozitiv ortogonal, cu vârful în O. Vectorul $\bar{d}$ va fi deci proporţional cu produsul vectorial $\bar{u} \times \bar{m}$. Vom pune:

$$\bar{d} = \lambda (\bar{u} \times \bar{m}). \tag{97,IV}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem însă:

$$\overline{m}=d\times\overline{u};\quad \overline{u}=\mu(\overline{m}\times\overline{d});\quad \overline{d}\,\overline{u}=0; \tag{98,IV}$$

λ şi μ fiind parametri.

Ţinând seama de expresia (98,IV) a lui $\overline{m}$, expresia lui d se scrie succesiv:

$$d=\lambda[\overline{u}\times(\overline{d}\times\overline{u})]=\lambda[\overline{d}u^2-\overline{u}(\overline{d}\,\overline{u})]=\lambda u^2\,\overline{d},$$

de unde

$$\lambda=\frac{1}{u^2}$$

Prin urmare:

$$d=\frac{1}{u^2}(\overline{u}\times\overline{m}). \tag{99,IV}$$

Deducem imediat şi valoarea lui μ, scriind

$$\overline{u}=\mu\left[\overline{m}\times\frac{1}{u^2}(\overline{u}\times\overline{m})\right]=\frac{\mu}{u^2}[\overline{u}\,m^2-\overline{m}\,(\overline{m}\,\overline{u})]=\frac{m^2}{u^2}\mu\overline{u},$$

de unde

$$\mu=\frac{u^2}{m^2}$$

şi deci

$$\overline{u}=\frac{u^2}{m^2}(\overline{m}\times\overline{d}).$$

Vectorul $\overline{d}$ fiind determinat, suportul D al lui $\overline{u}$ este fixat. *Soluţia astfel obţinută este unică.* In adevăr, dacă ar mai exista un vector d', am putea scrie

$$\overline{m}=\overline{d}\times\overline{u}=\overline{d'}\times\overline{u};$$

deci

$$(d'-\overline{d})\times\overline{u}=0,\text{ sau } d'=d+\lambda\overline{u}$$

şi extremitatea A' a lui $\overline{d'}=\overline{OA'}$ se va găsi pe D, deci nu obţinem decât o singură soluţie, respectiv o singură dreaptă D.

Aceasta înseamnă că un vector alunecător $(D,\overline{u})$ este perfect determinat de $\overline{u}$ şi $\overline{m}$, adică de vectorul său liber $\overline{u}$ şi de momentul său $\overline{m}$ în raport cu un punct O.

Vom numi *coordonate vectoriale* ale vectorului alunecător $(D,\overline{u})$ în raport cu punctul O, vectorul liber $\overline{u}$ şi momentul $\overline{m}$ al acestui vector alunecător în raport cu O.

Intre coordonatele vectoriale $\overline{u},\overline{m}$ avem relaţia (95,IV)

$$\overline{m}\cdot\overline{u}=0.$$

Coordonatele vectoriale depind de punctul O prin momentul $\overline{m}$. Dacă alegem alt punct O', coordonatele vectorului $(D,\overline{u})$ vor deveni $(\overline{u'},\overline{m'})$. Vom avea

$$\overline{m'}=\overline{O'A}\times\overline{u}=\overline{r'}\times\overline{u}\text{ şi }\overline{r'}=d-\overline{a},$$

dacă notăm $\overline{OO'}=\overline{a}$; deci

$$\overline{m'}=(d-\overline{a})\times\overline{u}=d\times\overline{u}-\overline{a}\times\overline{u};$$

$$\overline{m'}=\overline{m}-\overline{a}\times\overline{u}. \tag{100,IV}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident, $\bar{u}' = \bar{u}$, vectorul liber fiind independent de punctul O. Trecerea dela coordonatele în raport cu O la cele în raport cu O' se face cu formula (100,IV).

Determinarea suportului vectorului alunecător prin metoda folosită este bazată pe operaţii metrice, deoarece revine la determinarea vectorului $\bar{d}$, perpendicular pe suportul D în planul format de O şi D. Totuşi, *vectorul alunecător este o mărime geometrică din spaţiul afin.* Deaceea, vom observa că suportul D poate fi determinat numai prin operaţii afine astfel: vom presupune cunoscut *bivectorul legat* $\bar{m}$, aplicat în O şi vectorul liber $\bar{u}$; vom considera planul P determinat de acest bivector în punctul O şi în acest plan paralel cu $\bar{u}$ vom determina un triunghi OAB de arie dată $\frac{1}{2}m$ şi de bază $\overline{AB} = \bar{u}$. Ori, construcţia unui triunghi de arie şi bază dată se poate face numai prin operaţii afine. De exemplu, se construeşte un triunghi orientat având aceeaşi arie, dar de bază oarecare $u' \neq u$. Este suficient, atunci, ca una din laturi v' să fie împărţită în raportul $\frac{u'}{u}$ pentru ca

$$v = \frac{u'}{\bar{u}} v'$$

şi u să formeze un triunghi de bază u şi arie $\frac{1}{2}m$. Printr'o translaţie convenabilă acest triunghi orientat este apoi transportat cu vârful în O şi determină în mod unic suportul vectorului alunecător (D, u). Prin urmare, *coordonatele vectoriale sunt mărimi geometrice în spaţiul afin.*

Introducerea acestor coordonate, făcută deobicei cu scopul imediat de a opera cu vectorul alunecător, pe cât se poate, într'un mod analog cu cel folosit pentru vectorul liber, are o semnificaţie mai adâncă. Ea precizează structura vectorului alunecător, considerat ca mărime geometrică: *vectorul alunecător este o mărime geometrică alcătuită dintr'un bivector* $\bar{m}$ *legat de un punct arbitrar* O *din spaţiu şi un vector liber* $\bar{u}$, *paralel cu planul bivectorului* $\bar{m}$. Se vede deci că *vectorul alunecător este o mărime compusă* şi complexă în sensul că reuneşte un bivector *legat* şi un vector *liber*. Această complexitate explică toate deosebirile ce se vor prezenta în operaţiile cu vectori alunecători.

Este de observat deasemenea că punctul O intervine în mod artificial în coordonatele vectoriale cu rolul de punct de reper şi că *aceste coordonate nu sunt independente.* Legătura $\bar{m}\bar{u} = 0$ dintre ele corespunde faptului geometric că bivectorul $\bar{m}$ conţine vectorul $\bar{u}$. Deşi vectorul alunecător este o mărime geometrică a spaţiului afin şi este determinat prin mărimile geometrice $\bar{u}$ şi $\bar{m}$ din acest spaţiu, pentru uşurinţa operaţiilor vom folosi în general spaţiul metric euclidian, substituind bivectorului moment $\bar{m}$ vectorul său legat reprezentativ. Nu vom pierde, însă, din vedere caracterul afin al vectorului alunecător.

Dacă în loc de a considera un vector oarecare u pe D, folosim un versor $\bar{v}$, definim *coordonatele vectoriale ale axei* D, de versor $\bar{v}$ în raport cu O. Acestea vor fi $\bar{\mu}, \bar{\nu}$, unde $\bar{\mu}$ are expresia (96,IV) şi reprezentăm momentul axei D în raport cu O.

Coordonatele vectoriale $\bar{\mu}, \bar{\nu}$ se mai numesc şi *coordonatele plückeriene ale dreptei* D.

Scanned with OKEN Scanner

Ele nu sunt independente, ci satisfac relațiile

$$\bar{\mu}\,\bar{\nu}=0;\quad \bar{\nu}^2=1. \tag{101,IV}$$

Dacă adoptăm un sistem de referință cartezian, cei doi vectori $\bar{\mu}$ și $\bar{\nu}$ au șase componente legate prin cele două relații (101,IV), deci din coordonatele plückeriene numai patru sunt independente.

Această constatare corespunde dealtfel celor patru grade de libertate ale unei drepte în spațiu.

In cazul când definim suportul D prin coordonatele sale plückeriene, relația (99,IV) devine

$$\bar{d}=\bar{\nu}\times\bar{\mu},$$

astfel încât, notând cu $\bar{r}$ vectorul de poziție $\overline{OM}$ al unui punct al lui D, ecuația vectorială a acestei drepte este

$$\bar{r}=\bar{\nu}\times\bar{\mu}+\lambda\bar{\nu}. \tag{102,IV}$$

Fiindcă $\bar{\nu}$ și $\bar{\mu}$ sunt perpendiculari, vom avea

$$d^2=(\bar{\nu}\times\bar{\mu})^2=\mu^2;\quad d=\mu.$$

§ 123 Comomentul a doi vectori alunecători

Fiind dați doi vectori alunecători $(A,\bar{u})$ și $(B,\bar{v})$ așezați pe două suporturi D și D' (fig. 103) produsul mixt $(\overline{BA},\bar{u},\bar{v})$ se numește *comomentul* celor doi vectori alunecători și se notează

$$\mathfrak{M}(A\bar{u},B\bar{v})=(\overline{BA}\,\bar{u},\bar{v}). \tag{103,IV}$$

Este evident că vom avea

$$\mathfrak{M}(A\bar{u},B\bar{v})=\mathfrak{M}(B\bar{v},A\bar{u})=$$

$$=(\overline{BA},\bar{u},\bar{v})=(\overline{AB},\bar{v},\bar{u});$$

deci, *comomentul a doi vectori alunecători este comutativ.* Pentru a fi reținut, observăm că în expresia (103,IV), vectorul $\overline{BA}$ se formează luând ultima literă B ca origine și prima, A, ca extremitate.

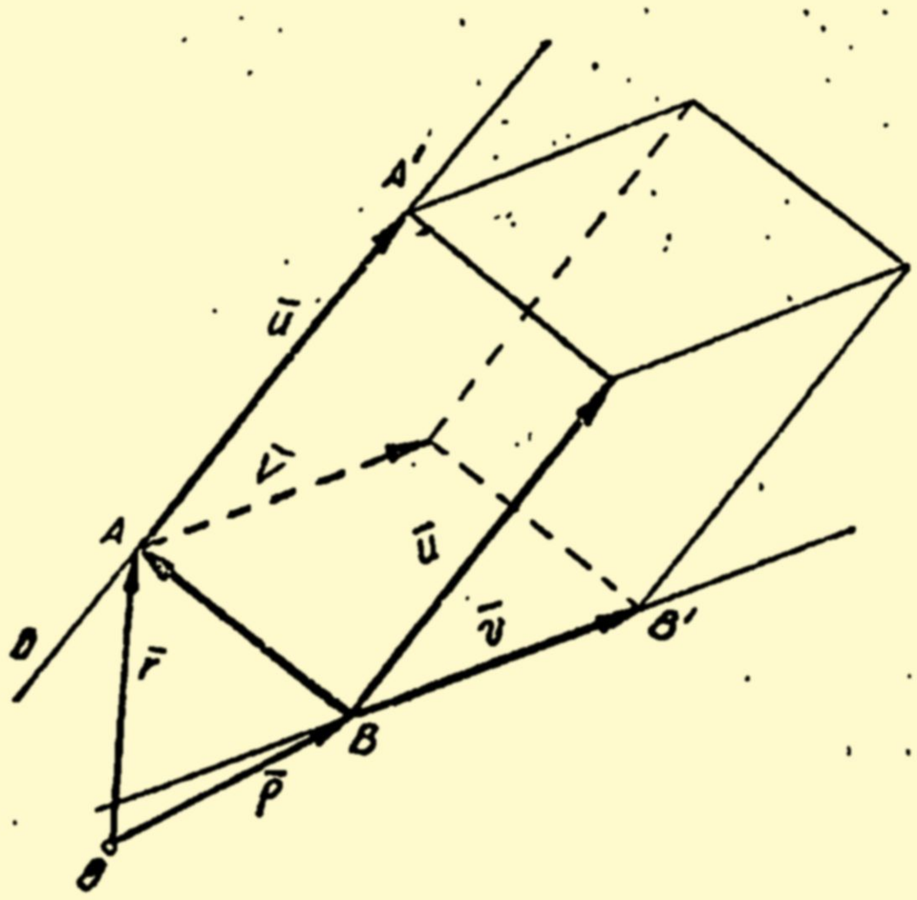


Fig. 103

Comomentul poate fi reprezentat geometric ca volumul paralelipipedului format pe $\overline{BA}$, $\bar{u}$ și $\bar{v}$ așezați în B, sau al paralelipipedului format pe $\overline{AB}$, $\bar{v}$ și $\bar{u}$ așezați în A. Ca orice produs mixt, el reprezintă măsura unui trivector și poate fi pozitiv sau negativ, după orientarea triedrului $\overline{BA}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$. In valoare absolută comomentul este de șase ori volumul tetraedrului, care are ca muchii opuse vectorii $A\bar{u}$ și $B\bar{v}$.

Expresia comomentului cu ajutorul coordonatelor vectoriale ale vectorilor alunecători se obține imediat. Să notăm cu $(\bar{m},\bar{u})$ și $(\bar{n},\bar{v})$ coordonatele

Scanned with OKEN Scanner

respective ale lui $A\bar{u}$ şi $B\bar{v}$, şi cu $\bar{r}$ şi $\bar{\rho}$ vectorii de poziţie $\bar{r}=\overline{OA}$, $\bar{\rho}=\overline{OB}$. Vom avea,

$$\mathfrak{M}(A\bar{u}, B\bar{v})=(\bar{r}-\bar{\rho})\,\bar{u}\,\bar{v}=\bar{r}\,\bar{u}\,\bar{v}-\bar{\rho}\bar{u}\bar{v}=(\bar{r}\times\bar{u})\,\bar{v}+(\bar{\rho}\times\bar{v})\,\bar{u}.$$

Insă

$$\bar{r}\times\bar{u}=\bar{m} \text{ şi } \bar{\rho}\times\bar{v}=\bar{n},$$

de unde

$$\mathfrak{M}(A\bar{u}, B\bar{v})=\bar{m}\bar{v}+\bar{n}\bar{u}. \qquad (104,IV)$$

Din această expresie reiese, încă odată, comutativitatea comomentului. Se vede deasemenea că *el este independent de poziţia punctelor de aplicaţie A şi B pe suporturile D şi D'*, deoarece $\bar{m}, \bar{n}$ sunt independenţi de alegerea lui A şi B.

Această proprietate se verifică şi direct pe expresia (103,IV) luând alte două puncte de aplicaţie A_1 şi B_1 şi punând

$$\overline{OA_1}=\bar{r}_1=\bar{r}+\overline{AA_1}=r+\lambda\bar{u},$$

$$\overline{OB_1}=\bar{\rho}_1=\bar{\rho}+\overline{BB_1}=\rho+\mu\bar{v},$$

de unde;

$$(\overline{B_1A_1}\,\bar{u}\,\bar{v})=(\bar{r}_1-\bar{\rho}_1)\,\bar{u}\,\bar{v}=(\bar{r}-\bar{\rho})\,\bar{u}\,\bar{v}=(\overline{BA}\bar{u}\bar{v}).$$

Comomentul este nul când vectorii $\overline{BA}$, $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt coplanari, deci când suporturile lui $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt concurente, paralele sau confundate.

Se poate verifica şi direct invarianţa expresiei (104,IV) a comomentului, luând ca punct de reper în care se calculează coordonatele vectoriale ale vectorilor alunecători un alt punct O' din spaţiu.

In acest caz avem

$$\bar{m}'=\bar{m}-\bar{a}\times\bar{u};$$
$$\bar{n}'=\bar{n}-\bar{a}\times\bar{v}$$

şi deci

$$\bar{m}'\bar{v}+\bar{n}'\bar{u}=\bar{m}\bar{v}+\bar{n}\bar{u}-(\bar{a}\bar{u}\bar{v})-(\bar{a}\bar{v}\bar{u}).$$

Insă ultimele două produse mixte sunt egale şi de semn contrar, deci se reduc.

§ 124. Momentul unui vector alunecător în raport cu o axă

Noţiunea de comoment permite definiţia momentului unui vector în raport cu o axă Δ, dată printr'un versor $\bar{\omega}$. In fond, o axă este determinată printr'un vector alunecător, de vector liber $\bar{\omega}$. Vom numi *moment al vectorului alunecător $A\bar{u}$ în raport cu axa $O\bar{\omega}$*, comomentul vectorilor alunecători $A\bar{u}$ şi $O\bar{\omega}$, notând (fig. 104):

$$M=\mathfrak{M}(A\bar{u},\ O\bar{\omega})=\overline{OA}\bar{u}\bar{\omega}. \qquad (105,IV)$$

Dacă punem $\overline{OA}=\bar{r}$, vom avea:

$$M=\bar{r}\bar{u}\bar{\omega}=(\bar{r}\times\bar{u})\,\bar{\omega}=\bar{m}\bar{\omega}, \qquad (106,IV)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\overline{m}$ este momentul lui $A\overline{u}$ în raport cu O. Deci: *momentul unui vector alunecător în raport cu o axă Δ este reprezentat prin proiecția pe Δ a momentului său $\overline{m}$, luat în raport cu un punct oarecare O al acestei axe.*

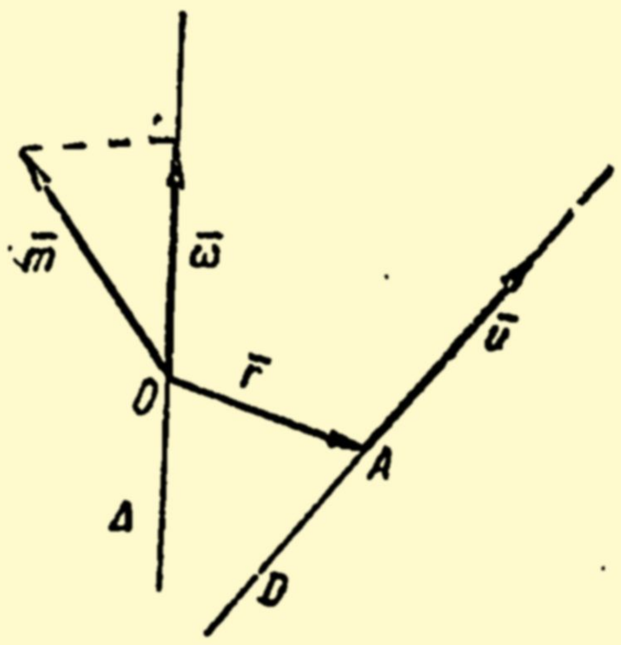


Fig. 104

Prin definiția dată, momentul în raport cu o axă este un produs mixt, deci de natura unui trivector. El este reprezentat prin *proiecția orientată* a unui moment pe o axă, când bivectorii sunt reprezentați prin vectori.

Inainte de utilizarea vectorilor în Statică, deci înainte de a se pune sistematic în evidență caracterul vectorial al forțelor, momentul în raport cu o axă era utilizat pentru a caracteriza momentele forțelor în spațiu, pe când momentul în raport cu un punct, numit și *moment static*, era folosit pentru forțele coplanare. Prin aceasta, și unul și celălalt apăreau cu semnificații incomplecte, având caracter pseudo-scalar.

Definiția momentului în raport cu o axă ca un comoment arată că acesta este independent, atât de punctul de aplicație al vectorului alunecător pe suportul său, cât și de poziția punctului O pe axa Δ.

Dacă raportăm spațiul la un triedru ortogonal $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ punând

$$\overline{m}=m_1\overline{i}+m_2\overline{j}+m_3\overline{k},$$

vom avea

$$m_1=(\overline{m}\overline{i});\quad m_2=(\overline{m}\overline{j});\quad m_3=(\overline{m}\overline{k}).$$

Cum i, $\overline{j}$, $\overline{k}$ sunt versorii axelor Ox, Oy, Oz, *componentele lui $\overline{m}$ sunt de fapt momentele vectorului alunecător $A\overline{u}$ în raport cu cele trei axe de coordonate.*

§ 125. Sisteme de vectori alunecători. Torsori

Forțele care acționează asupra unui sistem rigid, sunt reprezentabile printr'un sistem de vectori alunecători, astfel încât Statica solidelor este teoria sistemelor de vectori alunecători.

Condițiile de echilibru pentru un sistem rigid S sunt independente de sistemul particular S considerat. Ele depind numai de sistemul de vectori alunecători, ce reprezintă distribuția de forțe în acest sistem rigid.

Principiul transmisibilității forțelor permite dealtfel modificarea sistemului de forțe prin introducerea sau suprimarea de vectori alunecători opuși: deasemenea principiul adunării vectoriale a două forțe, care au același punct de aplicație, permite înlocuirea unui număr oarecare de vectori alunecători pe drepte concurente printr'un singur vector. Astfel, un sistem dat poate fi transformat în altul echivalent cu el, adică susceptibil de a-l înlocui cu aceleași efecte. In aplicații, sistemele de vectori alunecători intervin și în alte fenomene, de exemplu, în reprezentarea micilor deplasări ale unui sistem de particule.

Scanned with OKEN Scanner

La noţiunea de sistem de vectori alunecători suntem conduşi de concluziile încercărilor experimentale de a înlocui un sistem de forţe, care acţionează asupra unui corp solid, prin altul mai simplu, în particular de a compune două forţe. Se ştie că, în general, *nu putem compune două forţe oarecare într'una singură*, dar că două forţe concurente pot fi adunate ca doi vectori legaţi de punctul de intersecţie al suporturilor lor. Compunerea forţelor aduce după sine introducerea unei reguli de compunere a vectorilor alunecători, deci constatarea caracterului de mărime măsurabilă a acestora.

Putem afirma dela început propoziţia următoare: *suma a doi vectori alunecători nu este în general un vector alunecător.*

Pentru a defini această sumă, vom ţine seama că vectorul alunecător, ca mărime geometrică, este compus din două mărimi măsurabile, bivectorul $\overline{m}$ şi vectorul liber $\overline{u}$.

Vom defini *suma a doi vectori alunecători* $(\overline{u}_1, \overline{m}_1)$ şi $(\overline{u}_2, \overline{m}_2)$, unde $\overline{m}_1$ şi $\overline{m}_2$ sunt doi bivectori legaţi de acelaşi punct O. cu condiţiile

$$\overline{m}_1\overline{u}_1=0; \quad \overline{m}_2\overline{u}_2=0$$

ca o mărime compusă din bivectorul $\overline{m}_1+\overline{m}_2$ legat de punctul O şi din vectorul liber $\overline{u}_1+\overline{u}_2$.

Obiectul geometric corespunzător va fi sistemul format din cei doi vectori alunecători $(D_1, \bar{u}_1)$ şi $(D_2, \bar{u}_2)$, cel puţin atât timp cât această figură geometrică nu va putea fi înlocuită cu alta echivalentă cu ea, eventual mai simplă şi determinată de aceeaşi mărime compusă $(\bar{u}_1+\bar{u}_2, \bar{m}_1+\bar{m}_2)$. Dacă acestui obiect geometric i-ar corespunde tot un vector alunecător, ar trebui să avem relaţia

$$(\overline{u}_1+\overline{u}_2)(\overline{m}_1+\overline{m}_2)=0.$$

Insă

$$(\overline{u}_1+\overline{u}_2)(\overline{m}_1+\overline{m}_2)=\overline{u}_1\overline{m}_1+\overline{u}_2\overline{m}_2+\overline{u}_1\overline{m}_2+\overline{u}_2\overline{m}_1=$$
$$=\overline{u}_1\overline{m}_2+\overline{u}_2\overline{m}_1=\mathfrak{M}(A_1\bar{u}_1, A_2\bar{u}_2),$$

unde A_1 şi A_2 sunt două puncte de pe suporturile D_1 şi D_2. Cum comomentul a doi vectori alunecători nu este nul decât dacă suporturile sunt concurente, paralele, sau confundate, urmează că *suma a doi vectori alunecători nu poate fi un vector alunecător decât în cazul când vectorii*:

1) sunt concurenţi;
2) sunt paraleli;
3) au acelaşi suport.

Regulile experimentale de compunere a forţelor aplicate corpurilor solide confirmând aceste constatări, vom putea adopta următoarele concluzii:

Vectorul alunecător poate fi considerat ca o mărime geometrică măsurabilă.

Mulţimea tuturor vectorilor alunecători nu constitue o specie măsurabilă de mărimi. Ea conţine, însă, trei specii particulare măsurabile de vectori alunecători: concurenţi în acelaşi punct, paraleli cu aceeaşi direcţie, având acelaşi suport. Pentru aceştia, suma este tot un vector alunecător.

Problemele staticii solidului ne arată astfel că vectorul alunecător nu poate fi folosit decât ca element pentru definirea unei mărimi măsurabile, mai generale decât el şi care să poată caracteriza fenomenul de echilibru al corpurilor solide.

Scanned with OKEN Scanner

In acest scop, vom observa că specia vectorilor alunecători nu este măsurabilă, deoarece relaţia $\overline{u}\,\overline{m} = 0$ nu este invariantă faţă de operaţia de adunare

$$\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2\,; \quad \overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2.$$

Să considerăm obiectul geometric format din n vectori alunecători

$$(A_1,\ \overline{u}_1),\quad (A_2,\ \overline{u}_2),\ldots,\quad (A_n,\ \overline{u}_n), \tag{107,IV}$$

având punctele de aplicaţie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pe n suporturi $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi coordonatele vectoriale $(\overline{u}_1, \overline{m}_1), (\overline{u}_2, \overline{m}_2), \ldots, (\overline{u}_n, \overline{m}_n)$ faţă de o origine dată arbitrar O. Mai precis, obiectul geometric format din reuniunea tuturor obiectelor geometrice prin care au fost definiţi vectorii alunecători $(A_1, \overline{u}_1), \ldots (A_n, \overline{u}_n)$.

Vom numi acest obiect geometric *sistem de vectori alunecători*. Vom asocia acestui obiect geometric o mărime geometrică introducând o relaţie de echivalenţă, înafară bine înţeles de aceea a vectorilor alunecători, obţinută prin translaţia fiecăruia pe suportul respectiv. Vom folosi în acest scop rezultatele experimentale din Statica solidelor privitoare la compunerea forţelor concurente, sau paralele, deci vom admite că putem înlocui vectorii cu suporturi concurente, paralele sau confundate prin suma lor, în particular putem suprima sau introduce orice pereche de vectori opuşi.

Prin introducerea în sistem a unor perechi de vectori alunecători opuşi şi compunerea lor cu diverşi vectori din sistem, înfăţişarea sistemelor se schimbă; deasemenea şi coordonatele vectoriale.

Totuşi, dacă notăm

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i\,; \quad \overline{m} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i\,; \tag{108,IV}$$

aceste două mărimi, reprezentând sumele geometrice ale vectorilor liberi şi ale momentelor vectorilor din sistem în raport cu O, *nu se schimbă,* fiindcă lor li se adaugă de fapt mărimi nule.

Două sisteme de vectori S_1 şi S_2, care se obţin unul din altul prin introducerea sau eliminarea unor perechi de vectori alunecători opuşi şi prin compunerea vectorilor alunecători cu suporturi concurente, paralele sau confundate se numesc *sisteme echivalente.*

Un sistem de vectori alunecători este figura geometrică formată de n segmente orientate $\overline{A_kB_k}$, având suporturile pe n drepte date $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi cărora li s'au asociat n vectori liberi $\overline{u}_k = \overline{A_kB_k}$. Prin urmare, dintr'un sistem *determinat* vom putea deduce o infinitate, deplasând segmentele $\overline{A_kB_k}$ pe suporturile lor prin translaţie. Toate aceste sisteme vor fi echivalente între ele, atât în sensul echipolenţei segmentelor orientate, cât şi în sensul noii definiţii introduse. *Mulţimea tuturor sistemelor de vectori alunecători din spaţiu este un obiect geometric, deoarece toate figurile sale au o proprietate comună,* proprietatea de definiţie.

Introducând relaţia de echivalenţă, definită mai sus, *acest obiect geometric se împarte în clase.* In fiecare clasă vor întra toate sistemele de vectori alunecători echivalente, deci care se deduc unul din altul prin întro-

Scanned with OKEN Scanner

ducerea sau eliminarea unor perechi de vectori alunecători opuşi şi prin compunerea vectorilor alunecători cu suporturi concurente, paralele sau confundate.

Fiecare din aceste clase va fi caracterizată printr'o mărime geometrică.

Vom numi *torsor* mărimea geometrică definită de clasa tuturor sistemelor de vectori alunecători echivalente cu un sistem dat.

Prin urmare torsorul este mărimea geometrică asociată obiectului geometric numit sistem de vectori alunecători. Mulţimea tuturor torsorilor constitue o specie de mărimi geometrice, deoarece aceste mărimi pot fi comparate între ele prin clasele ce le reprezintă.

Ca şi în cazurile celorlalte mărimi întroduse, adesea vom numi torsor chiar clasa de figuri pe care o reprezintă torsorul, după cum am numit vector $\overline{AB}$ segmentul orientat $\overline{AB}$, sau clasa tuturor segmentelor echipolente cu $\overline{AB}$.

Torsorul este reprezentat concret prin oricare din sistemele de vectori alunecători echivalente, din care a fost extras ca noţiune, tot aşa cum vectorul liber sau vectorul alunecător sunt reprezentate concret prin segmente orientate având caracteristicele comune ale clasei şi câte una în plus (punct de aplicaţie, de exemplu).

Noţiunea de torsor, astfel introdusă, ne permite să folosim în studiul sistemelor de vectori alunecători numai caracterele generale, aşa cum am procedat şi în cazul vectorilor liberi, fără a ne împiedica de o anumită configuraţie geometrică. Prin aceasta, Statica solidelor poate atinge toată generalitatea necesară, problema echilibrului sistemelor devenind independentă de *o anumită* distribuţie a forţelor.

§ 126. Torsorul

Torsorul este, pentru sistemele de vectori alunecători echivalente, ceeace este vectorul liber pentru segmentele orientate echipolente, adică mărimea geometrică reprezentativă.

Vom numi *coordonate vectoriale* ale unui torsor vectorul liber $\overline{u}$ şi bivectorul legat $\overline{m}$, daţi de expresiile (108;IV), deci *torsorul este o mărime compusă dintr'un vector liber şi un bivector legat:*

$$\overline{u}=\sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i\,;\qquad \overline{m}=\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_i \tag{108,IV}$$

Acestea se numesc în statică *rezultanta generală* $\overline{u}$ *şi momentul rezultant* $\overline{m}$ ale sistemului în raport cu un punct O.

Vom nota convenţional un torsor definit printr'un sistem de vectori alunecători dat

$$T=\sum_{i=1}^{n}(A_i\,,\ \overline{u}_i). \tag{109,IV}$$

Această sumă simbolică nu înseamnă decât reuniunea celor n vectori alunecători într'un sistem.

Scanned with OKEN Scanner

In cazul când sistemul se reduce la un singur vector alunecător $A\bar{u}$, coordonatele vectoriale ale torsorului satisfac relaţia (95,IV): $\bar{m}\bar{u}=0$, dar în general vom avea $\bar{m}\bar{u}\neq 0$.

Deoarece, prin aplicarea principiului de transmisibilitate şi compunere, sistemul îşi modifică aspectul, torsorul va fi definit prin coordonatele sale vectoriale $\bar{u}$, $\bar{m}$ şi îl vom nota $T(\bar{u}, \bar{m})$. Aceasta, deoarece *toate sistemele echivalente cu un sistem dat au aceleaşi coordonate vectoriale* (108,IV) *în raport cu un punct oarecare O.*

Coordonatele vectoriale ale torsorului depind de alegerea punctului O.

In adevăr, dacă luăm momentele în raport cu un alt punct O', vom avea, conform cu (100,IV)

$$\bar{m}'_i=\bar{m}_i-\bar{a}\times\bar{u}_i:$$

deci,

$$\bar{m}'=\sum_{i=1}^{n}\bar{m}'_i=\sum_{i=1}^{n}(\bar{m}_i-\bar{a}\times\bar{u}_i)=\bar{m}-\bar{a}\times\bar{u}.$$

Bine înţeles $\bar{u}'=\bar{u}$, astfel încât *formulele de transformare ale coordonatelor vectoriale ale torsorilor sunt aceleaşi ca şi ale unui singur vector alunecător:*

$$\bar{u}'=\bar{u};\ \bar{m}'=\bar{m}-\bar{a}\times\bar{u}. \qquad (110,IV)$$

Doi torsori $T(\bar{u}_1, \bar{m}_1)$ şi $T(\bar{u}_2, \bar{m}_2)$ sunt *egali* dacă au coordonatele vectoriale egale în raport cu un punct O, deci

$$T(\bar{u}_1, \bar{m}_1)=T(\bar{u}_2, \bar{m}_2), \text{ dacă } \bar{u}_1=\bar{u}_2 \text{ şi } \bar{m}_1=\bar{m}_2.$$

Această definiţie a egalităţii torsorilor este independentă de alegerea punctului O.

In adevăr, luând coordonatele în raport cu alt punct O', vom avea

$$\bar{u}_1=\bar{u}'_1 \text{ şi } \bar{u}_2=\bar{u}'_2;\ \text{dar } \bar{u}_1=\bar{u}_2,\ \text{deci } \bar{u}'_1=\bar{u}'_2=\bar{u}_1=\bar{u}_2,$$

ar

$$\bar{m}'_2=\bar{m}_2-\bar{a}\times\bar{u}_2;\ \text{dar } \bar{m}_2=\bar{m}_1,\ \text{deci } \bar{m}'_2=\bar{m}_1-\bar{a}\times\bar{u}_1=\bar{m}'_1;$$

prin urmare egalitatea se păstrează.

Egalitatea torsorilor, astfel definită, corespunde echivalenţei sistemelor de vectori alunecători. *Pentru ca doi torsori să fie egali este necesar şi suficient să reprezinte aceeaşi clasă de sisteme echivalente.* Ori, dacă aplicăm operaţiile elementare de reducere a sistemelor prin compunerea vectorilor concurenţi sau paraleli, coordonatele vectoriale nu se schimbă, cum am observat mai sus. Deaceea, putem substitui relaţiei de echivalenţă a figurilor, relaţia de egalitate a mărimilor geometrice

$$\bar{u}_1=\bar{u}_2,\ \bar{m}_1=\bar{m}_2.$$

Nu este inutil să subliniem încă odată esenţa metodei teoriei geometrice a mărimilor fizice, aplicată în Calculul vectorial:

Intr'o primă etapă se asociază obiectelor geometrice mărimi geometrice prin care aceste obiecte sunt determinate. *In a doua etapă se stabileşte măsurabilitatea acestor mărimi* prin definirea operaţiilor de adunare şi

Scanned with OKEN Scanner

amplificare cu un număr. In sfârşit, *în a treia etapă se substitue obiectelor geometrice mărimile corespunzătoare* în toate relaţiile geometrice în care intervin, *transformând operaţiile geometrice în operaţii de algebră vectorială*, prin întroducerea de noi operaţii.

Astfel am procedat în tot ce precedă şi, în particular, în cazul vectorilor şi sistemelor de vectori alunecători. Vom da ca exemplu de aplicare a acestor principii *suma a doi torsori* şi explicaţia definiţiei coordonatelor vectoriale ale torsorilor ca sume ale mărimilor $\bar{u}_i$ şi $\bar{m}_i$.

Suma a două sisteme de vectori alunecători este sistemul obţinut prin reuniunea celor două sisteme.

Torsorul acestui sistem este torsorul clasei tuturor sistemelor echivalente cu el.

Fie $(\bar{u}_1, \bar{m}_1)$ şi $(\bar{u}_2, \bar{m}_2)$ coordonatele vectoriale ale celor doi torsori $T(\bar{u}_1, \bar{m}_1)$ şi $T(\bar{u}_2, \bar{m}_2)$.

Sistemul S, suma sistemelor S_1 şi S_2, este format din vectori alunecători, asociaţi fiecare cu un bivector legat de un punct O şi un vector liber. Dacă însumăm aceste mărimi, obţinem pentru sistemul S mărimea $(\bar{u}_1, \bar{m}_1)$, pentru sistemul S_2 mărimea $(\bar{u}_2, \bar{m}_2)$, iar pentru sistemul S mărimea $(\bar{u}_1+\bar{u}_2, \bar{m}_1+\bar{m}_2)$. Orice sistem echivalent cu S va conduce la aceeaşi mărime, deci torsorul acestui sistem va avea coordonatele vectoriale

$$\bar{u}=\bar{u}_1+\bar{u}_2; \quad \bar{m}=\bar{m}_1+\bar{m}_2.$$

Invers, orice torsor $T(\bar{u}, \bar{m})$ conţine ca reprezentant sistemul $S=S_1+S_2$ şi, prin urmare, toate sistemele echivalente cu S, deci este unic determinat. Rezultă că *torsorul sumei celor două sisteme este* $T(\bar{u}, \bar{m})$, *ale cărui coordonate vectoriale în raport cu* O *sunt* $\bar{u}_1+\bar{u}_2$ *şi* $\bar{m}_1+\bar{m}_2$.

In particular, dacă se consideră un sistem oarecare ca suma vectorilor alunecători din care este compus, coordonatele vectoriale ale torsorului său vor fi suma coordonatelor vectoriale ale acestor vectori, aşa cum au fost definite anterior.

Din acest moment vom putea substitui operaţiilor de compunere a sistemelor, adunarea coordonatelor lor vectoriale, deci o operaţie de algebră vectorială.

Ţinând seama de cele spuse mai sus, *suma a doi torsori* se defineşte ca un torsor, care are coordonatele vectoriale egale cu suma coordonatelor celor doi torsori daţi.

Vom numi torsorul $T(\bar{u}, \bar{m})$ *suma torsorilor* $T(\bar{u}_1, \bar{m}_1)$ şi $T(\bar{u}_2, \bar{m}_2)$, punând

$$T(\bar{u}, \bar{m})=T(\bar{u}_1, \bar{m}_1)+T(\bar{u}_2, \bar{m}_2), \qquad (111,IV)$$

unde

$$\bar{u}=\bar{u}_1+\bar{u}_2 \quad \text{şi} \quad \bar{m}=\bar{m}_1+\bar{m}_2.$$

Torsorul $T(-\bar{u}, -\bar{m})$ se va numi *opusul* torsorului $T(\bar{u}, \bar{m})$.

Suma

$$T(\bar{u}, \bar{m})+T(-\bar{u}, -\bar{m})=T(0, 0),$$

defineşte un torsor având componentele vectoriale nule în raport cu punctul O.

Să observăm că aceste componente sunt nule, oricare ar fi punctul O, cum se deduce imediat din (110,IV). Punând $\bar{u}=0$, $\bar{m}=0$, deducem $\bar{u}'=0$, $\bar{m}'=0$, pentru orice punct O'.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, *dacă un torsor are coordonatele nule în raport cu un punct O, acestea rămân nule în raport cu orice alt punct O'.*

Vom numi *torsor nul* torsorul $T(0,0)$ având coordonatele nule în raport cu un punct O. Rezultă deci că torsorul nul are coordonatele nule în raport cu orice punct.

Orice sistem de vectori alunecători, care are torsorul nul, se numeşte *sistem echivalent cu zero,* sau *sistem nul.* Torsorul nul este definit prin clasa tuturor sistemelor de vectori alunecători nule şi este reprezentat prin oricare din aceste sisteme.

§ 127. Cuplul

Vom numi *torsor de vector nul* orice torsor având vectorul liber $\overline{u}=0$.

Momentul unui torsor de vector nul este acelaşi în orice punct al spaţiului.

In adevăr, dacă $\overline{u}=0$, relaţiile (110,IV), care dau variaţia momentului, arată că $\overline{m'}=\overline{m}$, pentru orice punct O'.

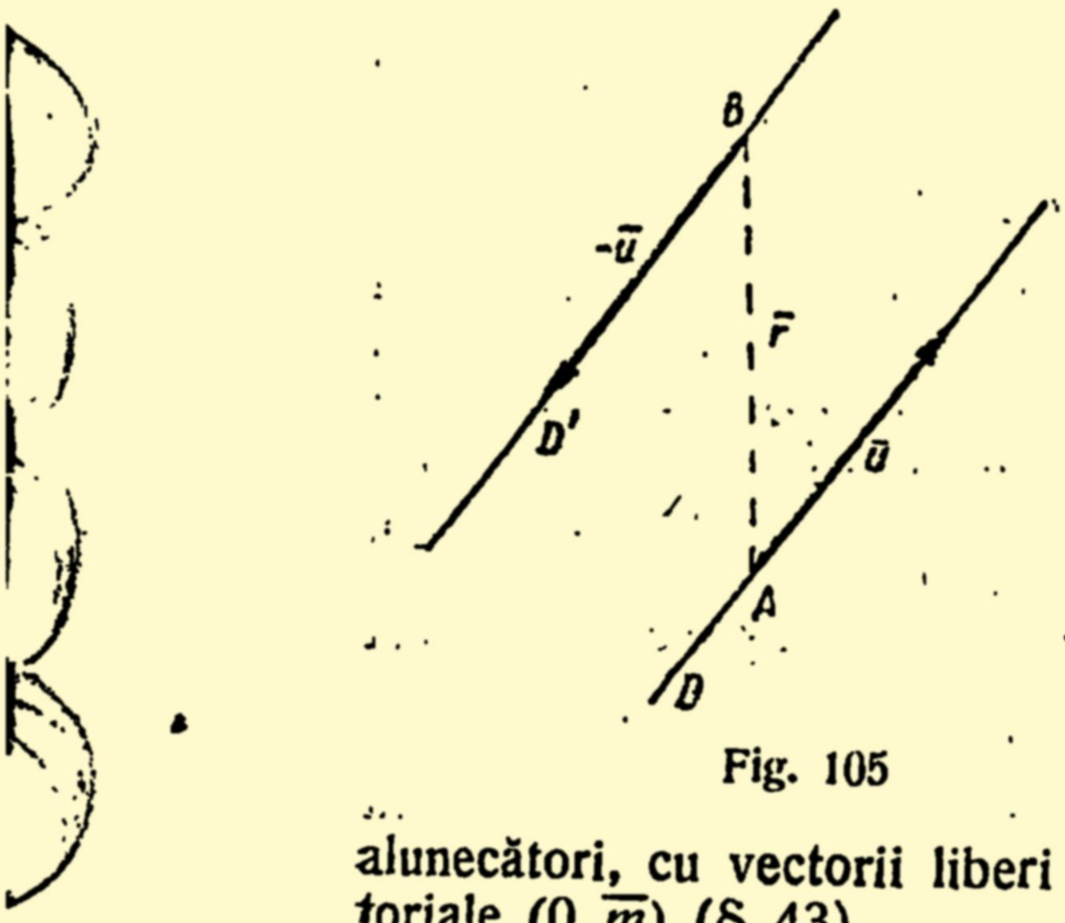


Fig. 105

Un sistem de doi vectori alunecători având vectorii liberi opuşi, este un exemplu de torsor de vector nul.

In adevăr, fie vectorii $(A,\overline{u})$ şi $(B,-\overline{u})$ (fig. 105). Torsorul $T=(A,\overline{u})\dotplus(B,-\overline{u})$ are vectorul liber nul, deci momentul său în raport cu un punct oarecare din spaţiu este constant.

Dacă luăm acest moment de exemplu în B, vom avea

$$\overline{m}=\overline{BA}\times\overline{u}=\overline{r}\times\overline{u}.$$

Vom spune că acest sistem de vectori alunecători, cu vectorii liberi opuşi, constitue *un cuplu* de coordonate vectoriale $(0,\overline{m})$ (§ 43).

Clasa tuturor cuplurilor având aceleaşi coordonate vectoriale $(0,\overline{m})$ defineşte *cuplul de moment* $\overline{m}$.

Mulţimea tuturor cuplurilor, având momentele oarecare, defineşte noţiunea de *cuplu*, care este un obiect geometric al spaţiului afin.

Torsorul de vector nul este definit de toate sistemele cu vectorul nul printre care intră toate cuplurile.

Toate cuplurile de moment $\overline{m}$ sunt echivalente între ele şi se subsumează clasei torsorului $T(0,\overline{m})$, care le conţine pe toate împreună cu alte sisteme echivalente cu ele.

Momentul $\overline{m}$ se numeşte *momentul cuplului* şi este reprezentabil printr'un *vector liber*, perpendicular pe planul cuplului.

Teoria elementară a cuplurilor, aşa cum este făcută în Statică, arată că, prin operaţiile elementare de introducere de vectori opuşi şi compunere, putem modifica un cuplu dat, făcând ca vectorii $(A,\overline{u})$ şi $(B,-\overline{u})$ să-şi

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALA
REGIONALA
IAȘI
417

schimbe suporturile, şi chiar planul cuplului poate fi înlocuit prin altul, paralel cu el.

Noţiunea de obiect geometric ne permite să considerăm cuplul în mulţimea sistemelor de vectori alunecători ca un obiect geometric particular. Deasemenea, acestui obiect geometric i se asociază o mărime geometrică, torsorul de vector nul $T(0, \overline{m})$, compusă dintr'un bivector $\overline{m}$ legat de punctul O şi din vectorul nul. Cum însă acest bivector este acelaşi în orice punct al spaţiului, deoarece $\overline{m}=\overline{m}'$, suntem conduşi la următorul rezultat: *Obiectului geometric cuplu i se asociază un bivector liber, momentul $\overline{m}$ al cuplului.*

Mărimea geometrică *torsor*, asociată oricărui sistem de vectori alunecători, care este o mărime compusă, se reduce în cazul cuplurilor la un bivector liber. Deaceea, *vom considera cuplul ca un bivector liber* în toate operaţiile cu cupluri. Evident, în cazul când intervin şi alte sisteme de vectori alunecători, vom reface mărimea $T(0, \overline{m})$, care este torsorul de vector nul, pentru a opera cu mărimi de aceeaşi specie. Mulţimea tuturor vectorilor alunecători, nu formează, cum am văzut, o specie măsurabilă. Definind torsorul şi operaţia de adunare, *torsorul este o mărime măsurabilă, iar mulţimea tuturor torsorilor este o specie măsurabilă.* Această specie conţine pe lângă cele trei specii particulare măsurabile, formate de vectorii alunecători concurenţi, paraleli sau cu acelaşi suport, şi specia particulară a cuplurilor (asimilând în această exprimare obiectele cu mărimile asociate).

§ 128. Automoment al unui torsor

Între coordonatele vectoriale ale unui vector alunecător există relaţia $\overline{u}\overline{m}=0$.

In cazul unui sistem de vectori alunecători, această relaţie nu se mai păstrează în general, dar produsul $\overline{u}\overline{m}$ caracterizează sistemul. In adevăr, *produsul scalar* $\overline{u}\overline{m}$ este independent de alegerea punctului O. Aceasta rezultă imediat din (110;IV) fiindcă avem:

$$\overline{u}'\overline{m}'=\overline{u}(\overline{m}-\overline{a}\times\overline{u})=\overline{u}\overline{m}.$$

Vom spune că acest produs scalar este un *invariant* al sistemului S de vectori alunecători şi deci, al torsorului de coordonate vectoriale $(\overline{u}, \overline{m})$.

Vom numi *automoment* al torsorului $T(\overline{u}, \overline{m})$ produsul scalar

$$A=\overline{u}\overline{m}, \qquad (112,IV)$$

De fapt, automomentul este o mărime asociată sistemului S, dar ţinând seama de convenţia făcută de a reprezenta sistemul prin torsorul său, vom asocia automomentul torsorului. Expresia automomentului, în funcţie de coordonatele vectoriale ale vectorilor sistemului, se obţine imediat. Fie $(\overline{u}_i, \overline{m}_i)$ coordonatele lui $(A_i, \overline{u}_i)$ în raport cu O. Vom avea:

$$A=\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{m}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{u}_i\overline{m}_j.$$

In această sumă, termenii $\overline{u}_i\overline{m}_i$ sunt nuli pentru fiecare vector în parte, iar

Scanned with OKEN Scanner

ceilalţi intervin de două ori sub forma $\overline{u}_i\overline{m}_j$ şi $\overline{u}_j\overline{m}_i$. Dacă impunem condiţia $i<j$, vom putea scrie

$$A=\sum_{i<j}\sum(\overline{u}_i\overline{m}_j+\overline{u}_j\overline{m}_i)=\sum_{i<j}\sum\mathfrak{M}(A_i\overline{u}_i,\ A_j\overline{u}_j), \qquad (113,IV)$$

dacă ţinem seama de (104,IV). Prin urmare:

Automomentul unui torsor este suma comomentelor tuturor perechilor de vectori alunecători ale oricărui sistem de vectori alunecători ce reprezintă torsorul, luate odată şi numai odată.

Vectorul liber $\overline{u}$ şi automomentul A constitue *cei doi invarianţi ai unui torsor.*

Aceste două mărimi, din care prima vectorială, iar a doua scalară, sunt independente de alegerea punctului O faţă de care se calculează coordonatele vectoriale.

Din expresia $A=\overline{m}\overline{u}$, deducem

$$\frac{A}{u}=\overline{m}\cdot\frac{\overline{u}}{u}=\text{pr.}\,\overline{m}\ \text{pe}\ \overline{u}=\text{const},$$

deci: *proiecţia momentului torsorului în raport cu un punct O pe direcţia vectorului liber $\overline{u}$ este constantă, independentă de punctul O şi egală cu raportul automomentului la modulul vectorului liber* (fig. 106).

§ 129. Momentul unui torsor în raport cu o axă. Funcţia caracteristică

Fiind dat un sistem de vectori alunecători $(A_i\overline{u}_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, vom defini *momentul acestui sistem în raport cu o axă* ca suma momentelor vectorilor $(A_i\overline{u}_i)$ în raport cu acea axă.

Dacă $\overline{\omega}$ este versorul axei şi O un punct oarecare al suportului său, vom avea

$$M=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(A_i\overline{u}_i,\ 0\overline{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_i\overline{\omega}=\overline{m}\,\overline{\omega}, \qquad (114,IV)$$

unde $\overline{m}$ este momentul torsorului $T(\overline{u},\overline{m})$.

Vom numi *moment al torsorului* $T(\overline{u},\overline{m})$ în raport cu axa Δ de versor $\overline{\omega}$ produsul scalar $M=\overline{m}\overline{\omega}$, reprezentând proiecţia momentului torsorului pe axă (fig. 106).

Momentul torsorului este independent de alegerea punctului O pe axa Δ.

In adevăr, luând alt punct O', vom scrie:

$$\overline{m}'=\overline{m}-\overline{a}\times\overline{u},\quad\text{unde}\quad\overline{a}=\lambda\overline{\omega}$$

şi deci

$$\overline{m}'\overline{\omega}=(\overline{m}-\overline{a}\times\overline{u})\overline{\omega}=\overline{m}\omega;$$

deoarece $\overline{OO'}=\lambda\overline{\omega}$.

Expresia (114,IV) a momentului sistemului $(A_i\overline{u}_i)$ în raport cu axa Δ este

Scanned with OKEN Scanner

de fapt *suma comomentelor tuturor vectorilor alunecători ai sistemului cu versorul* $\bar{\omega}$ *al axei* Δ.

Putem considera, mai general, un sistem oarecare $(A\ \bar{u}_i)$ şi un vector alunecător $(O, \bar{v})$ oarecare.

Vom numi *funcţie caracteristică* a sistemului $S(A_i, \bar{u}_i)$ suma comomentelor vectorilor sistemului S cu vectorul alunecător oarecare $(O, \bar{v})$, dat prin punctul de aplicaţie O şi prin vectorul liber $\bar{v}$.

Momentul sistemului în raport cu o axă Δ *este deci valoarea pe care o ia funcţia sa caracteristică, dacă* $(O, \bar{v})$ *este versorul axei* Δ.

Momentul sistemului în raport cu o axă, care are direcţia vectorului liber $\bar{u}$ al sistemului, va avea expresia

$$M = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_i \frac{\bar{u}}{u} = \bar{m} \frac{\bar{u}}{u} = \frac{A}{u}.$$

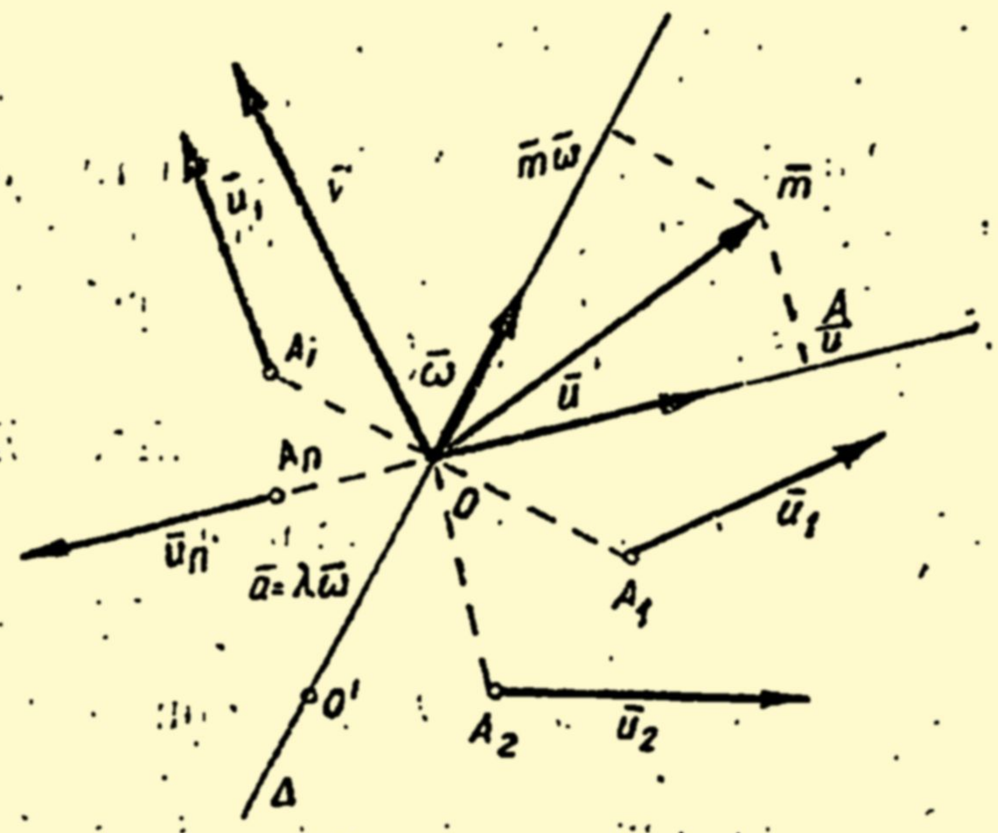


Fig. 106

Deci putem interpreta proiecţia momentului torsorului pe direcţia vectorului liber ca momentul sistemului în raport cu o axă de direcţie $\bar{u}$ şi trecând prin punctul O.

§ 130. Funcţia caracteristică şi echivalenţa sistemelor

Două sisteme de vectori alunecători, echivalente, pot avea aspecte geometrice foarte diferite, deşi au prin definiţie acelaşi torsor $T(\bar{u}, \bar{m})$.

Noţiunea de funcţie caracteristică permite să stabilim echivalenţa a două sisteme direct, fără a calcula coordonatele vectoriale ale torsorilor lor.

Fiind dat sistemul de vectori alunecători $S(A_i\ \bar{u}_i)\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ şi un vector alunecător arbitrar $(O, \bar{v})$, funcţia caracteristică a sistemului S, care este prin definiţie, suma comomentelor tuturor vectorilor din S cu vectorul $(O, \bar{v})$, va depinde de acest vector alunecător şi, evident, de sistemul însuşi. Vom nota deci

$$\Phi(O, \bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(A_i\ \bar{u}_i, O\bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{OA}_i, \bar{u}_i, \bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i\ \bar{u}_i\ \bar{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{m}_i\right)\bar{v} = \bar{m}\bar{v}. \tag{1.15,IV}$$

unde $\bar{r}_i = \overline{OA}_i$.

In această expresie momentele sunt luate în raport cu un punct O al vectorului alunecător variabil $(O, \bar{v})$.

Două sisteme echivalente S *şi* S^* *au aceeaşi funcţie caracteristică.*

In adevăr, notând cu $\Phi_S(O, \bar{v})$ funcţia corespunzătoare sistemului S^*, vom

Scanned with OKEN Scanner

avea

$$\Phi_{S^*}(O, \overline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i^* \overline{v} = \overline{m}^* \overline{v} ;$$

dar $\overline{m}^* = \overline{m}$ prin ipoteză, deoarece sistemele sunt echivalente, deci

$$\Phi_{S^*}(O, \overline{v}) = \Phi_S(O, \overline{v}), \qquad (116,IV)$$

pentru orice vector $(O, \overline{v})$.

Două sisteme, care au aceeaşi funcţie caracteristică, sunt echivalente.

Fie două sisteme S şi S^*, pentru care funcţiile caracteristice $\Phi_S(O, \overline{v})$ şi $\Phi_{S^*}(O, \overline{v})$ sunt egale pentru orice vector $(O, \overline{v})$. Aceste funcţii pot avea forme diferite când sunt calculate pe sistemele date, dar din aplicarea relaţiei (116,IV) avea, ţinând seama de (115,IV),

$$\overline{m}^* \overline{v} = \overline{m} \overline{v} ,$$

de unde $(\overline{m}^* - \overline{m})\overline{v} = 0$ pentru orice $\overline{v}$, ceeace nu este posibil decât pentru

$$\overline{m}^* = \overline{m}$$

într'un punct *arbitrar* O. Cele două sisteme au acelaşi moment rezultant în *orice* punct O.

Să deplasăm acest punct O în altul O'. Vom avea conform cu (110,IV):

$$\overline{m}' = \overline{m} - \overline{a} \times \overline{u} ; \quad \overline{m}^{*\prime} = \overline{m}^* - \overline{a} \times \overline{u}^* ,$$

unde $\overline{u}$ şi $\overline{u}^*$ sunt vectorii liberi (rezultanţi) ai celor două sisteme. Insă cum

$$\overline{m}' = \overline{m}^{*\prime} \quad \text{şi} \quad \overline{m} = \overline{m}^* ,$$

scăzând membru cu membru cele două egalităţi, vom avea

$$\overline{a} \times (\overline{u}^* - \overline{u}) = \overline{0} ,$$

pentru orice $\overline{a} = \overline{OO'}$. Deducem obligatoriu

$$\overline{u}^* = \overline{u} .$$

Cele două sisteme S şi S^* având torsorii egali,

$$T(\overline{u}, \overline{m}) = T(\overline{u}^*, \overline{m}^*) ,$$

sunt echivalente.

Putem deci enunţa propoziţia următoare: *Condiţia necesară şi suficientă ca două sisteme de vectori alunecători S şi S^* să fie echivalente este ca ele să aibă aceeaşi funcţie caracteristică.*

Mai precis, ţinând seama de formele diferite pe care le pot lua expresiile acestor funcţii, ar trebui spus: *ca funcţiile lor caracteristice să fie egale pentru orice vector alunecător $(O, \overline{v})$.*

Din expresia (115,IV) se vede imediat că, dacă se înlocueşte $(O, \overline{v})$ printr'un vector alunecător de acelaşi suport $(O, \lambda \overline{v})$, vom avea

$$\Phi_S(O, \lambda \overline{v}) = \lambda \Phi_S(O, \overline{v}) . \qquad (117,IV)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, în enunţul teoremei precedente asupra echivalenţei sistemelor *putem folosi numai versori*, deoarece

$$\Phi_S\left(O, \frac{\overline{v}}{v}\right) = \frac{1}{v}\Phi_S(O, \overline{v}),$$

astfel încât, dacă

$$\Phi_S\left(O, \frac{\overline{v}}{v}\right) = \Phi_{S^*}\left(O, \frac{\overline{v}}{v}\right),$$

atunci şi

$$\Phi_S(O, \overline{v}) = \Phi_{S^*}(O, \overline{v}). \qquad (118,IV)$$

Ori, valoarea unei funcţii caracteristice pentru un versor alunecător $\left(O, \frac{\overline{v}}{v}\right)$ este momentul sistemului în raport cu axa Δ, definită de acest versor.

Am obţinut astfel următorul rezultat: *Condiţia necesară şi suficientă ca două sisteme de vectori alunecători S şi S^* să fie echivalente este ca momentele lor în raport cu orice axă Δ să fie egale.*

Semnificaţia *metrică* a funcţiei caracteristice, pusă în evidenţă de formula (115,IV), este următoarea: *Funcţia caracteristică $\Phi_S(O, \overline{v})$ pentru un versor oarecare $\overline{v}$ reprezintă momentul sistemului S în raport cu axa Δ, definită de acest versor.*

Această proprietate ne-a permis să stabilim rezultatul precedent şi următorul: *Condiţia necesară şi suficientă ca doi vectori alunecători să fie egali, este ca momentele lor în raport cu orice axă Δ să fie egale.*

Considerând aceşti vectori ca două sisteme particulare S şi S^*, dacă vectorii sunt egali, ei vor constitui implicit şi două sisteme echivalente. Invers, dacă doi vectori alunecători constitue două sisteme echivalente, ei sunt egali, *In* adevăr, două sisteme echivalente au acelaşi torsor $T(\overline{u}, \overline{m}) = T(\overline{u}^*, \overline{m}^*)$. deci $\overline{u} = \overline{u}^*$ şi $\overline{m} = \overline{m}^*$.

Prin urmare, cei doi vectori au aceleaşi coordonate vectoriale în raport cu punctul O şi deci vor fi egali. Doi vectori alunecători egali sunt deci echivalenţi, şi reciproc. Ori, condiţia necesară şi suficientă ca doi vectori să constitue două sisteme echivalente este, conform cu teorema precedentă, ca momentele lor în raport cu orice axă Δ să fie egale. Prin urmare, cu aceeaşi condiţie, cei doi vectori vor fi şi egali, adică vor reprezenta aceeaşi clasă de segmente orientate, alunecătoare pe un acelaşi suport.

Funcţia caracteristică joacă un rol important în studiul sistemelor de vectori alunecători, deoarece ne dă posibilitatea de a caracteriza printr'o mărime echivalenţa sistemelor.

Cum două sisteme echivalente aparţin unei aceleaşi clase, deci au acelaşi torsor, *funcţia caracteristică este o mărime scalară cu ajutorul căreia se stabileşte egalitatea a doi torsori.*

Este important de observat că *funcţia caracteristică este variabilă cu vectorul $(\overline{O}, \overline{v})$, deci este o funcţie de un vector alunecător variabil. Funcţiile de vectori* extind funcţiile de una sau mai multe variabile din Analiză şi au aplicaţii fizice şi geometrice importante, care îşi găsesc locul în Analiza vectorială şi în Teoria câmpurilor.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste funcții se introduc și în Algebra vectorială. Astfel, formele liniare, biliniare și pătratice de vectori (§ 110) sunt funcții de vectori și sunt caracterizate prin proprietăți, care decurg din forma lor simplă, deci din structura lor algebrică.

In particular, funcțiile liniare, cele mai simple dintre aceste funcții, joacă un rol important prin faptul că pun în evidență anumite mărimi fizice sau geometrice.

Vom numi *funcție liniară* de vectorul variabil $\overline{v}$ o mărime $L(\overline{v})$, care are următoarele două proprietăți:

$$\begin{aligned} &L(\overline{v}+\overline{w})=L(\overline{v})+L(\overline{w}), && \textit{(aditivitate);}\\ &L(\lambda\overline{v})=\lambda L(\overline{v}), && \textit{(omogenitate).} \end{aligned} \tag{119,IV}$$

Funcția caracteristică a unui sistem S de vectori alunecători este o funcție liniară scalară de vectorul alunecător $(O,\overline{v})$.

In adevăr, fie $\overline{u}$ și $\overline{m}$ coordonatele vectoriale ale torsorului $T(\overline{u},\overline{m})$ al sistemului S în raport cu baza O, și $\Phi_S(O,\overline{v})$ funcția caracteristică a lui S în raport cu această bază.

Vom avea:

$$\Phi_S(O,\overline{v}+\overline{w})=\overline{m}(\overline{v}+\overline{w})=\overline{m}\overline{v}+\overline{m}\overline{w},$$

deci

$$\Phi_S(O,\overline{v}+\overline{w})=\Phi_S(O,\overline{v})+\Phi_S(O,\overline{w}).$$

Deasemenea

$$\Phi_S(O,\lambda\overline{v})=\overline{m}(\lambda\overline{v})=\lambda(\overline{m}\overline{v}),$$

deci

$$\Phi_S(O,\lambda\overline{v})=\lambda\Phi_S(O,\overline{v}),$$

ceeace demonstrează proprietatea enunțată.

§ 131. Reducerea sistemelor de vectori alunecători

In clasa sistemelor echivalente cu un sistem dat intră sisteme cu un număr mai mare sau mai mic de vectori. Fiind dat un sistem S, aparținând unei clase de sisteme, deci având un torsor determinat, prin aplicarea principiului de transmisibilitate și a unor operații elementare deduse din el, ca adunarea unui sistem nul de vectori concurenți, compunerea vectorilor alunecători cu suporturi concurente, etc., sistemul poate fi modificat, astfel încât să conțină un număr mai mic de vectori.

Această observație sugerează problema *reducerii* unui sistem de vectori alunecători la forma cea mai simplă.

Spunem că un sistem de vectori alunecători a fost redus, dacă a fost înlocuit cu un sistem echivalent conținând un număr minim de vectori alunecători.

Reducerea sistemelor revine, de fapt, la determinarea celui mai simplu sistem aparținând clasei corespunzătoare unui torsor dat.

Această reducere poate fi efectuată în diferite moduri:

a) *Orice sistem de vectori alunecători poate fi redus la un sistem format din doi vectori alunecători.*

Scanned with OKEN Scanner

... Fie, în adevăr, I un punct oarecare din spaţiu şi P un plan ce nu trece prin I. Să notăm cu A' punctul în care suportul vectorului $(A,\overline{u})$ întâlneşte planul P. Unind I cu A', putem transporta vectorul $(A,\overline{u})$ în A' pentru a-l

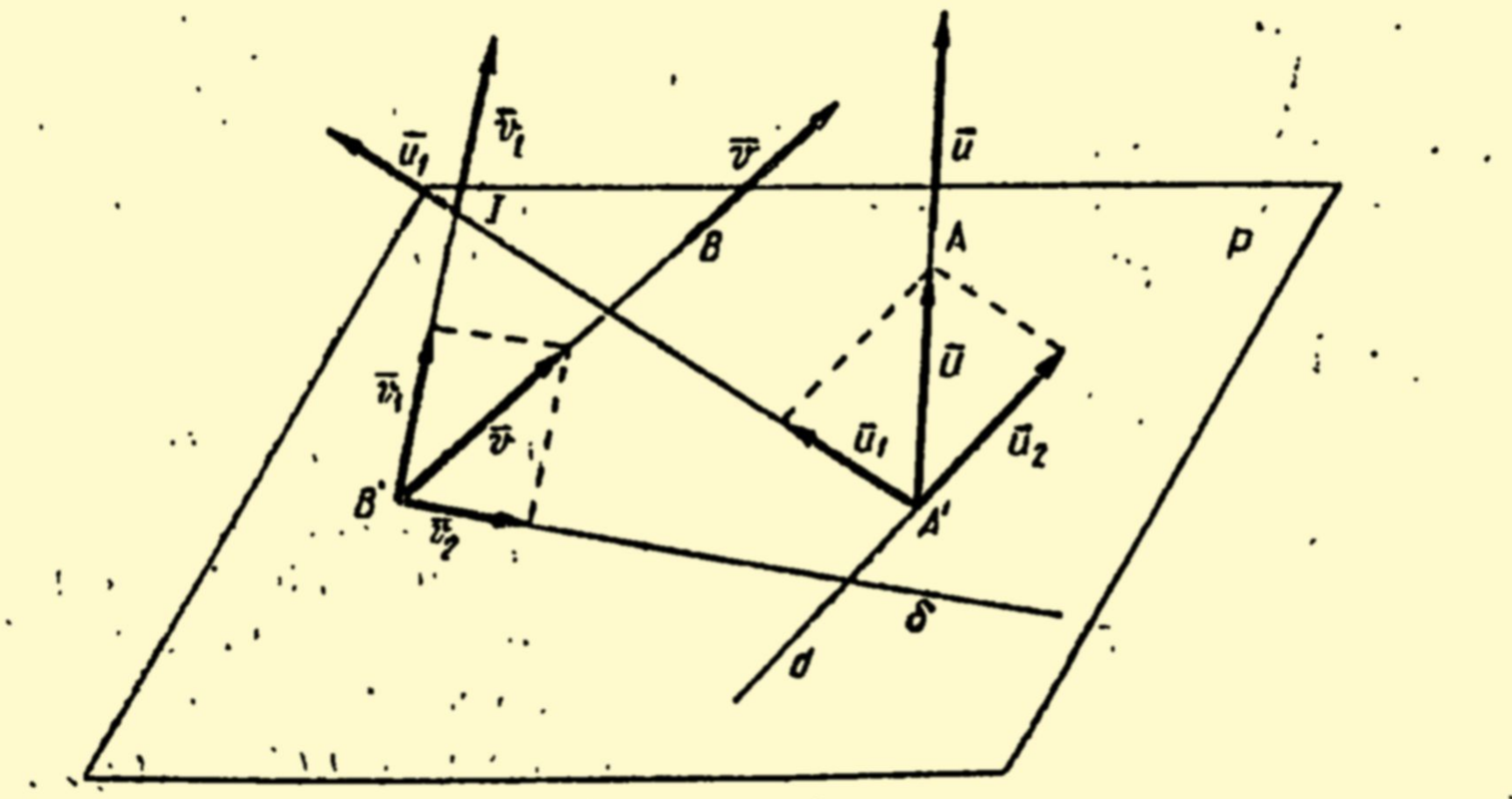


Fig. 107

descompune după direcţia $A'I$ şi după direcţia dreptei d de intersecţie a planului format de $A'I$ şi $A'A$ cu planul P. Vom obţine astfel vectorii alunecători $(A',\overline{u}_1)$ şi $(A',\overline{u}_2)$. Vectorul $(A,\overline{u})$ s'a descompus în doi vectori (fig. 107):

$$(A,\overline{u})=(I,\overline{u}_1)+(A',\overline{u}_2).$$

Astfel, orice vector alunecător $(A,\overline{u})$ este echivalent cu sistemul format de $(I,\overline{u}_1)$ şi $(A',\overline{u}_2)$. In cazul când $(A,\overline{u})$ este paralel cu planul P, este suficient să introducem doi vectori opuşi, concurenţi cu $(A,\overline{u})$, din care să compunem unul cu acesta pentru a-i modifica direcţia.

Continuând operaţia asupra altui vector $(B,\overline{v})$, etc. vom obţine două sisteme: unul format din vectori concurenţi în I, iar celălalt din vectori cuprinşi în planul P. Sistemul de vectori concurenţi în I se reduce la un vector unic $(I,\overline{U})$. Sistemul de vectori din planul P poate fi redus, fie la un vector unic, fie la un cuplu, cum este uşor de văzut ţinând seama că suporturile sunt concurente câte două sau eventual paralele.

In cazul când sistemul din planul P se reduce la un vector unic $(J,\overline{V})$, unde J este un punct din planul P, reducerea este terminată. In cazul când acest sistem se reduce la un cuplu, vom considera punctul K de intersecţie al lui $(I,\overline{U})$ cu planul P, vom deplasa cuplul astfel încât unul din vectori să treacă prin K şi vom compune acest vector cu $(I,\overline{U})$. Prin aceasta *sistemul este redus la doi vectori.* (Să se examineze şi cazul când $\overline{V} \parallel P$. Exerciţiu).

Evident, *este posibil ca sistemul să se reducă şi la un singur vector alunecător,* în condiţiile pe care le vom preciza ulterior.

b) *Orice sistem de vectori alunecători S poate fi redus la un vector alunecător şi la un cuplu.*

In adevăr, presupunem sistemul S redus la doi vectori alunecători $(O,\overline{U})$, şi $(I,\overline{V})$ (fig. 108).

Scanned with OKEN Scanner

Fie J punctul în care suportul lui $(O,\overline{U})$ întâlnește un plan P în care se găsește $(I,\overline{V})$. Introducând în J doi vectori opuși $\overline{V}$ și $-\overline{V}$, putem compune pe $(O,\overline{U})$, mutat în J, cu $(J,\overline{V})$. Vom avea

$$(J,\overline{U})+(J,\overline{V})=(J,\overline{W}).$$

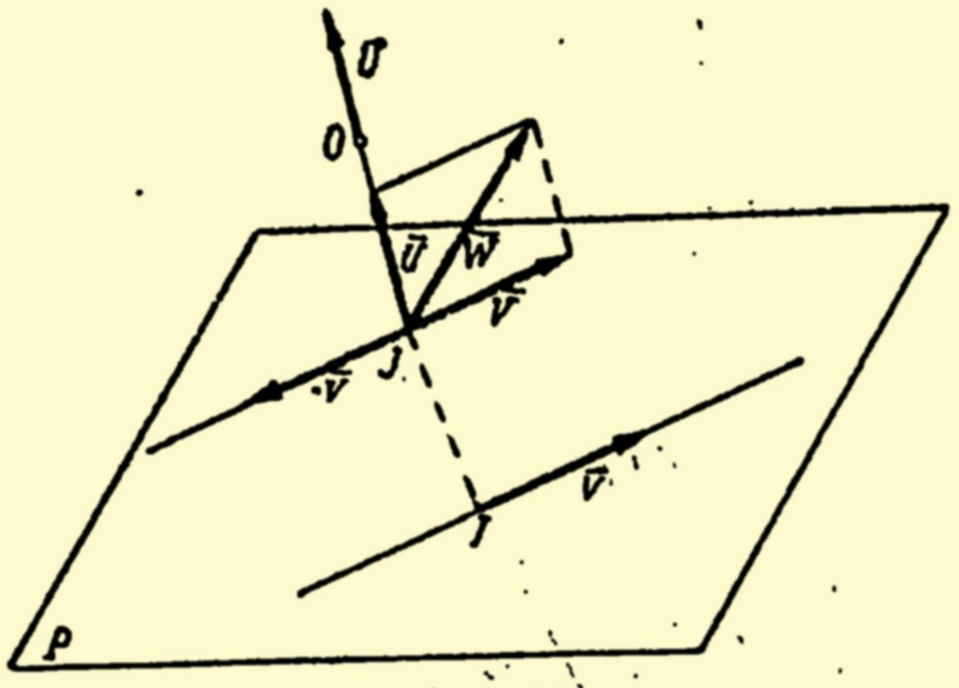


Fig. 108

Sistemul se va compune din $(J,\overline{W})$ și cuplul

$$C=(I,\overline{V})+(J,-\overline{V}),$$

situat în planul P.

In cazul când $(O,\overline{U})$ este paralel cu planul P, este suficient să începem prin a introduce în O doi vectori opuși $\overline{V}$ și $-\overline{V}$. Vom compune $(O,\overline{U})+(O,\overline{V})=(O,\overline{W})$. vectorul $(O,\overline{W})$ fiind paralel cu planul P și vom complecta sistemul prin cuplul

$$C=(I,\overline{V})+(O,-\overline{V}),$$

care însă nu se mai găsește în planul P.

Pentru a reduce un sistem la un cuplu și un vector alunecător este suficient să cunoaștem torsorul sistemului prin coordonatele sale.

Utilizarea coordonatelor vectoriale conduce rapid la reducerea urmărită.

In adevăr, fie $T(\overline{u},\overline{m})$ torsorul unui sistem S; O fiind un punct oarecare din spațiu, sistemul S poate fi redus la un vector ce trece prin O și la un cuplu. Pentru aceasta este suficient să construim un sistem având același torsor. Punând

$$T(\overline{u},\overline{m})=T(\overline{u},0)+T(0,\overline{m})$$

torsorul $T(\overline{u},0)$ corespunde unui sistem având momentul nul în raport cu O, iar torsorul $T(0,\overline{m})$ corespunde unui sistem având vectorul liber nul.

Primul sistem este echivalent cu un vector alunecător unic trecând prin O, deoarece momentul acestui vector în raport cu O este nul.

Al doilea sistem este echivalent cu un cuplu de moment $\overline{m}$.

Prin urmare, reducerea sistemului se poate face astfel (fig. 109).

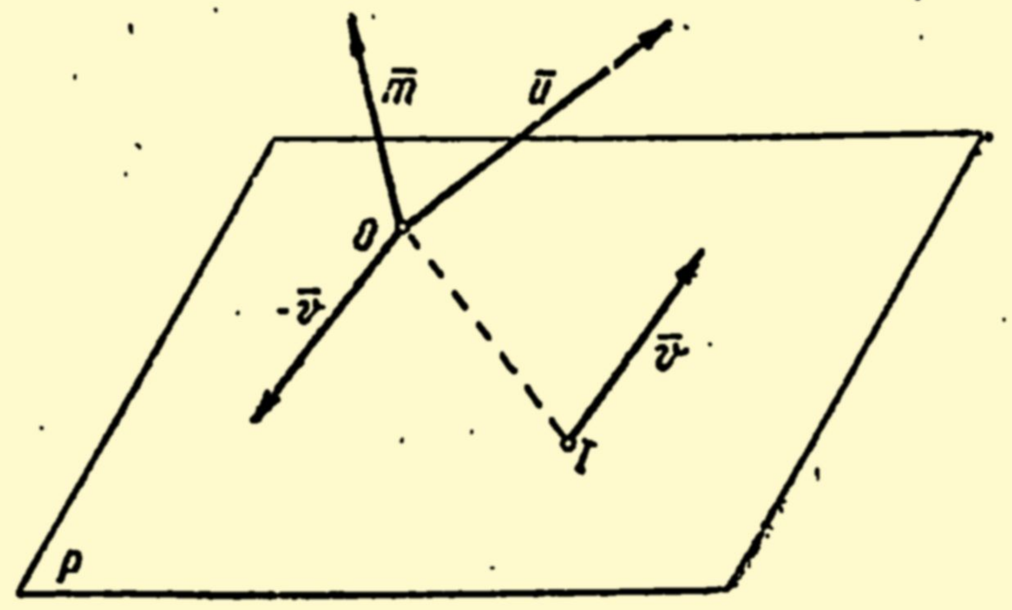


Fig. 109

In punctul O se aplică un vector $\overline{u}$ și se așează un moment $\overline{m}$. In planul P perpendicular pe $\overline{m}$ se determină în mod unic un vector alunecător $\overline{v}$, al cărui moment în raport cu O este egal cu $\overline{m}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se adaugă un vector $-\bar{v}$ în punctul O, formându-se cuplul $(I,\bar{v})+(O,-\bar{v})$. Sistemul $(O,\bar{u})+(I,\bar{v})+(O,-\bar{v})$ este echivalent cu S şi este compus dintr'un vector $(O,\bar{u})$ şi un cuplu de moment $\bar{m}$, astfel încât putem enunţa următorul rezultat:

Orice sistem S de vectori alunecători de torsor $T(\bar{u},\bar{m})$ este reductibil la un vector egal cu vectorul $\bar{u}$, trecând printr'un punct dat O şi la un cuplu de moment $\bar{m}$, situat într'un plan care trece prin O, perpendicular pe $\bar{m}$.

Când un sistem de vectori alunecători a fost redus la un vector $\bar{u}$ în O şi la un cuplu C, punctul O se numeşte *baza* reducerii.

Este evident că reducerea depinde de punctul de bază. Prin schimbarea bazei, vectorul alunecător $(O,\bar{u})$ se schimbă într'un alt vector echipolent $(O',\bar{u})$, iar cuplul devine un cuplu C' de moment

$$\bar{m}'=\bar{m}-\bar{a}\times\bar{u};\quad \bar{a}=\overline{OO'}.$$

Oricare ar fi baza aleasă pentru reducere, vectorul liber şi automomentul, (cei doi invarianţi ai sistemului), îşi păstrează valorile, astfel încât avem

$$\bar{u}=\bar{u}' \text{ şi } \bar{m}\bar{u}=\bar{m}'\bar{u}'.$$

Putem face observaţia că dacă faţă de o singură bază momentul este perpendicular pe vectorul liber $\bar{u}$, atunci această proprietate se păstrează în orice bază.

§ 132. Reducere canonică. Axă centrală

Păstrând aceeaşi bază, sistemul redus poate fi modificat.

In adevăr, dacă vectorul alunecător $(O,\bar{u})$ este transportat din O în alt punct J, torsorul îşi schimbă momentul în raport cu O. Pentru a-l restabili, este necesar să introducem un nou cuplu de moment $\bar{m}_1$, astfel încât

$$\bar{\mu}+\bar{m}_1=\bar{m},$$

unde $\bar{\mu}$ este momentul vectorului $(J,\bar{u})$ în raport cu O.

Se poate pune atunci problema de a înlocui cuplul C prin altul, al cărui moment să aibă direcţia vectorului liber $\bar{u}$, deci de a face o *reducere în raport cu o bază dată O, astfel încât cuplul să aibă un moment de direcţia lui $\bar{u}$* (fig. 110).

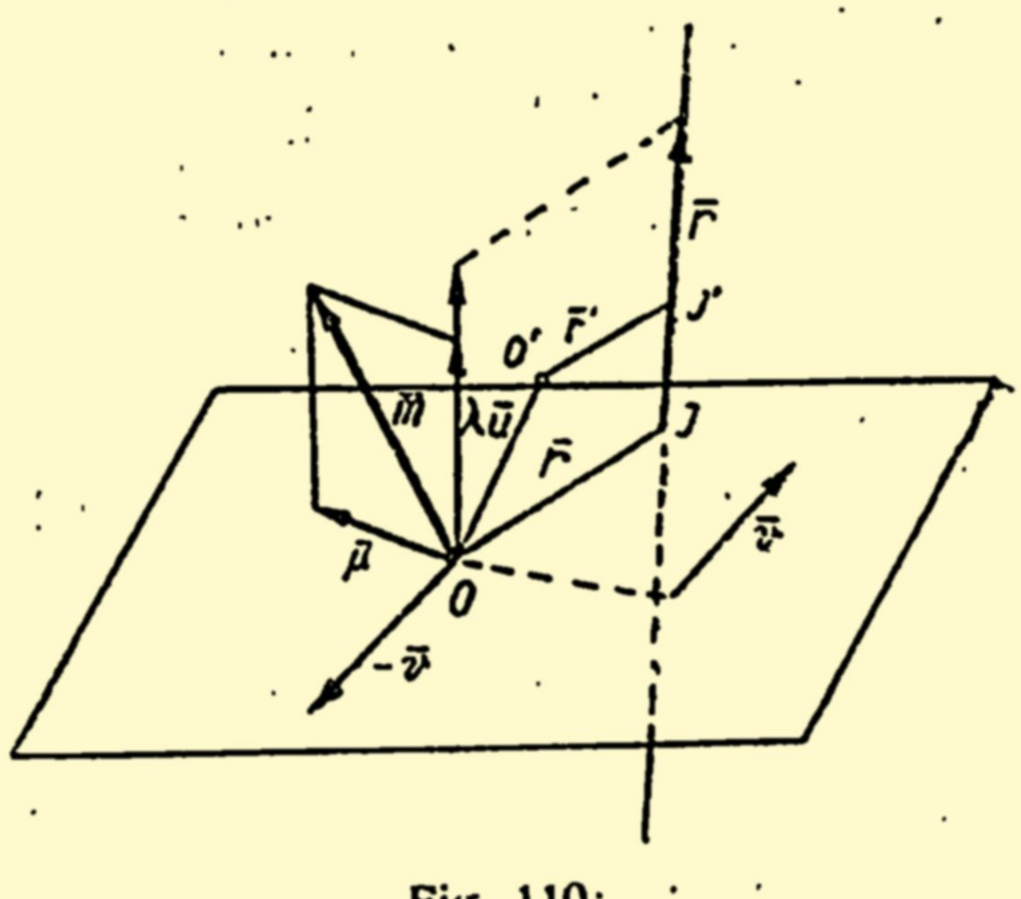


Fig. 110

Prin urmare: sistemul trebue redus la un cuplu de moment $\lambda\bar{u}$ şi la un vector alunecător convenabil $(J,\bar{u})$, astfel încât

$$\left.\begin{aligned} &T(\bar{u},\bar{m})=T(\bar{u},\bar{\mu})+T(O,\lambda\bar{u});\\ &\bar{m}=\bar{\mu}+\lambda\bar{u};\quad \bar{\mu}\bar{u}=0, \end{aligned}\right\} \qquad (120,IV)$$

unde λ este un parametru scalar.

Scanned with OKEN Scanner

Inmulţind scalar cu $\bar{u}$ expresia lui $\overline{m}$, vom avea:

$$\bar{u},\overline{m} = A = \bar{\mu}\bar{u} + \lambda u^2 = \lambda u^2,$$

de unde

$$\lambda = \frac{A}{u^2}.$$

Odată determinat parametrul λ, putem exprima componenta $\bar{\mu}$ a lui $\overline{m}$:

$$\bar{\mu} = \overline{m} - \frac{A}{u^2}\bar{u}.$$

Se vede că $\overline{m}$ este astfel descompus după două direcţii perpendiculare.

Formulele (120,IV), care dau descompunerea torsorului, devin:

$$T(\bar{u},\overline{m}) = T\left(\bar{u},\overline{m} - \frac{A}{u^2}\bar{u}\right) + T\left(0,\frac{A}{u^2}\bar{u}\right). \qquad (121,IV)$$

Se vede că atât vectorul alunecător, cât şi cuplul sunt determinaţi, deoarece nu există decât un vector alunecător de coordonate vectoriale, în raport cu un punct O, date, iar cuplul are momentul determinat, prin urmare reducerea este unică.

Vom numi *reducere canonică* această reducere a sistemului la un vector alunecător, egal cu vectorul liber al sistemului şi la un cuplu de moment paralel cu $\bar{u}$.

Rezultatul obţinut se enunţă astfel:

Un sistem de vectori alunecători este reductibil în mod unic în raport cu o bază O la un cuplu de moment $\frac{A}{u^2}\bar{u}$, *paralel cu vectorul liber* $\bar{u}$ *al sistemului şi la un vector alunecător* $(J,\bar{u})$ *egal cu* $\bar{u}$, *determinat prin vectorul de poziţie* $\overline{OJ} = \bar{r} = \frac{1}{u^2}(\bar{u}\times\overline{m})$.

Suportul vectorului alunecător $(J,\bar{u})$ se numeşte *axa centrală a sistemului.*

Axa centrală este independentă de baza O faţă de care se face reducerea canonică.

In adevăr, dacă schimbăm baza în punctul O', reducerea se face conform cu (121,IV) astfel:

$$T(\bar{u},\overline{m'}) = T\left(\bar{u},\overline{m'} - \frac{A}{u^2}\bar{u}\right) + T\left(0,\frac{A}{u^2}\bar{u}\right). \qquad (122,IV)$$

Fie $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$ vectorii de poziţie ai punctelor J şi J' de aplicaţie ale vectorilor alunecători $(J,\bar{u})$, $(J',\bar{u}')$ în cele două reduceri.

Conform cu formula (99,IV), vom scrie:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{u^2}(\bar{u}\times\bar{\mu}) = \frac{1}{u^2}\left[\bar{u}\times\left(\overline{m} - \frac{A}{u^2}\bar{u}\right)\right] = \frac{1}{u^2}(\bar{u}\times\overline{m}); \\ \bar{r}' &= \frac{1}{u^2}(\bar{u}\times\bar{\mu}') = \frac{1}{u^2}\left[\bar{u}\times\left(\overline{m'} - \frac{A}{u^2}\bar{u}\right) = \frac{1}{u^2}(\bar{u}\times\overline{m'}).\right. \end{aligned}\right\} \qquad (123,IV)$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă,

$$\overline{JJ'} = -\bar{r} + \overline{OO'} + \bar{r}' = \frac{1}{u^2}(\bar{u} \times \overline{m'}) - \frac{1}{u^2}(\bar{u} \times \bar{m}) + \bar{a} = \bar{a} - \frac{\bar{u} \times (\bar{a} \times \bar{u})}{u^2} = \frac{(\bar{a}\,\bar{u})}{u^2}\bar{u}.$$

Aceasta arată că punctul J' se găseşte pe suportul vectorului alunecător $(J, \bar{u})$ şi prin urmare, axa centrală este aceeaşi şi pentru baza O'.

Semnificaţia sa deosebită în structura sistemelor de vectori alunecători rezultă din faptul că, în reducerea canonică în raport cu punctele axei centrale, momentul sistemului $\bar{m}$ se reduce la momentul cuplului, deci este paralel cu vectorul liber $\bar{u}$.

Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători este locul punctelor pentru care momentul sistemului este paralel cu vectorul liber rezultant $\bar{u}$.

Pentru a stabili această propoziţie, să facem schimbarea bazei oarecare O, faţă de care s'a executat o reducere canonică, într'un punct O' pe axa centrală.

Vom avea o reducere de forma (122,IV), în care

$$\overline{m'} = \bar{m} - \bar{a} \times \bar{u},$$

$$\bar{a} = \overline{OO'} = \overline{OJ} + \overline{JO'} = \bar{r} + \lambda\bar{u};$$

deci

$$\overline{m'} = \bar{m} - \bar{r} \times \bar{u}.$$

Înlocuind pe $\bar{r}$ prin expresia sa (123,IV), $\overline{m'}$ devine:

$$\overline{m'} = \bar{m} - \frac{1}{u^2}(\bar{u} \times \bar{m}) \times \bar{u} = \bar{m} - \left(\bar{m} - \frac{\bar{m}\bar{u}}{u^2}\bar{u}\right) = \frac{A}{u^2}\bar{u} \qquad (124,IV)$$

Prin urmare, în punctele axei centrale, momentul sistemului se reduce la momentul cuplului din reducerea canonică, iar $\bar{\mu} = 0$.

Reciproc, dacă momentul sistemului în raport cu un punct O' este paralel cu vectorul liber $\bar{u}$, punctul O' este pe axa centrală.

In adevăr, fie $\overline{OO'} = \bar{a}$, punctul O fiind pe axa centrală. Notând cu $\bar{m} = \lambda\bar{u}$ momentul în O şi cu $\overline{m'} = \lambda'\bar{u}$ momentul în O', din relaţia $\overline{m'} = \bar{m} - \bar{a} \times \bar{u}$ deducem

$$\lambda'\bar{u} = \lambda\bar{u} - \bar{a} \times \bar{u}$$

deci

$$(\lambda - \lambda')\bar{u} = \bar{a} \times \bar{u},$$

relaţie care nu poate avea loc, dacă $\bar{u} \neq 0$, decât pentru

$$\bar{a} = 0, \quad \lambda = \lambda'$$

$$\bar{a} = \mu\bar{u}, \quad \lambda = \lambda'$$

In ambele cazuri O' se va găsi deci pe axa centrală, care conţine punctul O şi este locul geometric căutat.

In raport cu punctele axei centrale, un sistem de vectori alunecători se reduce la un cuplu de moment $\frac{A}{u^2}\bar{u}$, *paralel cu axa centrală şi la un vector alunecător* $\bar{u}$ *având această axă ca suport* (fig. 111).

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, ținând seamă de expresia (124,IV) a lui $\overline{m}'$, reducerea (123,IV) devine:

$$T\left(\overline{u}, \frac{A}{u^2}\overline{u}\right) = T(\overline{u}, 0) + T\left(0, \frac{A}{u^2}\overline{u}\right). \qquad (125,IV)$$

Să observăm că modulul momentului cuplului în această reducere este

$$\left|\frac{A}{u^2}\overline{u}\right| = \frac{A}{u},$$

deci egal cu raportul invarianților sistemului.

Putem considera că *această ultimă reducere canonică unică realizează cea mai simplă expresie a unui sistem* astfel încât toate sistemele unei clase de sisteme echivalente sunt reductibile la acest tip caracteristic. Pentru acest motiv putem considera că *sistemul astfel redus reprezintă concret torsorul întregii clase.*

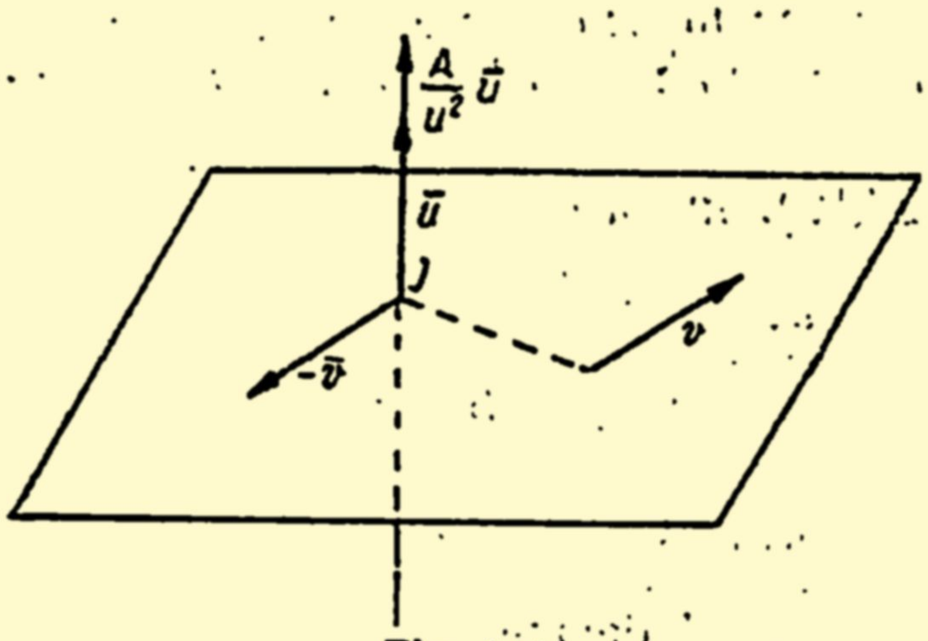


Fig. 111

Vom putea conveni, din acest punct de vedere, să numim torsor un sistem format dintr'un vector alunecător $(J, \overline{u})$ *și un cuplu având momentul paralel cu* $\overline{u}$. Prin aceasta asociem unei mărimi cea mai simplă figură a clasei de figuri, căreia îi este asociată.

Axa centrală a acestui sistem este chiar suportul vectorului $(J, \overline{u})$ și pentru aceasta este numită *axa torsorului.*

Din cele expuse rezultă că *orice sistem de vectori alunecători este reductibil la un torsor* (în sensul convenției făcute).

Această reducere, valabilă în cazul general, ia forme particulare în cazul când unul din invarianți este nul. Să observăm, în adevăr, că reducerea unui sistem la torsorul său este sintetizată prin cei doi invarianți A și $\overline{u}$.

Să presupunem $A=0$. In acest caz, expresia (125,IV) se reduce la primul său termen $T(\overline{u}, 0)$: *sistemul este reductibil la un vector alunecător unic, situat pe axa centrală, numit rezultanta sistemului.*

Se vede și invers, că pentru ca sistemul să se reducă la un vector unic, trebue să avem $A=0$, deci ca $\overline{m}\,\overline{u}=0$; prin urmare, ca momentul rezultant într'un punct să fie perpendicular pe vectorul liber rezultant $\overline{u}$. Deci:

Condiția necesară și suficientă ca un sistem să fie reductibil la un vector unic este ca automomentul său să fie nul, iar vectorul liber să fie $\overline{u} \neq 0$.

Dacă $\overline{u}=0$, axa centrală nu mai poate fi determinată, deoarece expresia (123,IV) a lui $\overline{r}$ nu are sens. In acest caz, însă, prima reducere la un vector și un cuplu arată că sistemul se reduce la un cuplu de moment $\overline{m}$. Acest moment este independent de punctul de bază O.

Prin urmare, *orice sistem de vector nul este reductibil la un cuplu.*

In rezumat, *invarianții determină modul de reducere a sistemelor de vectori alunecători:*

Scanned with OKEN Scanner

1) $A\neq 0$; $\overline{u}\neq 0$ *torsor pe axa centrală;*
2) $A=0$; $\overline{u}\neq 0$ *vector alunecător unic;*
3) $A\neq 0$; $\overline{u}=0$ *cuplu.*

Ecuația vectorială a axei centrale este

$$\overline{\rho}=\frac{1}{u^2}(\overline{u}\times\overline{m})+\lambda\overline{u}, \qquad (126,IV)$$

unde $\overline{\rho}$ este vectorul de poziție al unui punct curent al axei, considerat dintr'un punct oarecare O de bază, iar $\overline{m}$ este momentul sistemului în raport cu punctul O. Ea se obține imediat din reducerea canonică (121,4), punând în evidență vectorul $\overline{r}=\overline{OJ}$ dat de (123,IV) și considerând axa ca suportul vectorului $(J,\overline{u})$.

Observația 1. *Existența axei centrale poate fi pusă în evidență și cu ajutorul unei proprietăți de minim a momentului rezultant.* Căutăm locul geometric al punctelor P din spațiu, pentru care $\overline{m}_P$ să aibă modulul minim; presupunem că $\overline{u}\neq\overline{0}$.

Deoarece $\overline{m}_P-\overline{m}_Q=\overline{PQ}\times\overline{u}$,

rezultă că

$$|\overline{m}_P-\overline{m}_Q|\leq|\overline{PQ}|\,\overline{u};$$

deci vectorul $\overline{m}_P$ este o funcție continuă de punctul P, în orice domeniu al spațiului.

Pe de altă parte avem $|\overline{m}_P|\geqq\left|\overline{m}_P\frac{\overline{u}}{u}\right|=\frac{1}{u}|A|$.

Observăm că momentele rezultante $\overline{m}_p$ și $\overline{m}_{p'}$, în două puncte P și P' situate pe o paralelă la $\overline{u}$ sunt egale, vom studia variația momentelor $\overline{m}_p$ când punctul P variază într'un plan α perpendicular pe $\overline{u}$.

Fie O un punct fix al planului α și P un punct variabil în același plan.

Avem

$$|\overline{m}_p-\overline{m}_o|=|\overline{PO}|\,u$$

deoarece vectorii $\overline{PO}$ și $\overline{u}$ sunt rectangulari. Rezultă că $|\overline{m}_p|\to\infty$, când $P\to\infty$ în planul α. In consecință, oricare ar fi numărul real $R>0$, există un cerc C (interior plus frontieră), de centru O și de rază suficient de mare, astfel încât $|\overline{m}_p|>R$ pentru toate punctele P exterioare cercului C. Deci minimul lui $|\overline{m}_p|$ pentru toate punctele P ale planului α este același cu minimul aceluiași modul, când P variază în C.

Funcția $|\overline{m}_p|$ de punctul P fiind continuă, când P variază în domeniul închis și mărginit C, își atinge minimul său cel puțin într'un punct P_0 al domeniului închis și mărginit C.

Dacă acest minim $|\overline{m}_{P_0}|=\frac{1}{u}|A|$, vom arăta că el este atins într'un singur punct P_0 al planului α.

In adevăr, în acest caz vectorul $\overline{m}_{P_0}$ este paralel cu $\overline{u}$. Dacă ar mai exista un al doilea punct P_0' astfel ca $|\overline{m}_{P_0}|=\frac{1}{u}|A|$, atunci $\overline{m}_{P_0}=\pm\overline{m}_{P_0'}$.

Dacă $\overline{m}_{P_0}=\overline{m}_{P_0'}$, rezultă că $\overline{P_0P_0'}\times\overline{u}=0$, deci vectorul $\overline{P_0P_0'}=0$.

Dacă $\overline{m}_{P_0}=-\overline{m}_{P_0'}$, înmulțind scalar în ambii membri cu vectorul $\overline{u}$, avem $A=-A$, deci $A=0$, deci $\overline{m}_{P_0}=\overline{m}_{P_0'}=0$, iar P_0 coincide cu P_0' căci și în acest caz $\overline{P_0P_0'}\times\overline{u}=0$.

Rămâne deci de demonstrat că efectiv minimul modulului $|\overline{m}_P|$ este $\frac{1}{u}|A|$.

Vom arăta că ipoteza că acest minimum este strict superior valorii $\frac{1}{u}|A|$ ne con-

Scanned with OKEN Scanner

duce la o contradicție. Să presupunem că există un punct P_1, în care funcția $|\overline{m}_P|$, își atinge minimul său.

$$|\overline{m}_{P_1}| = \frac{1}{u}|A|.$$

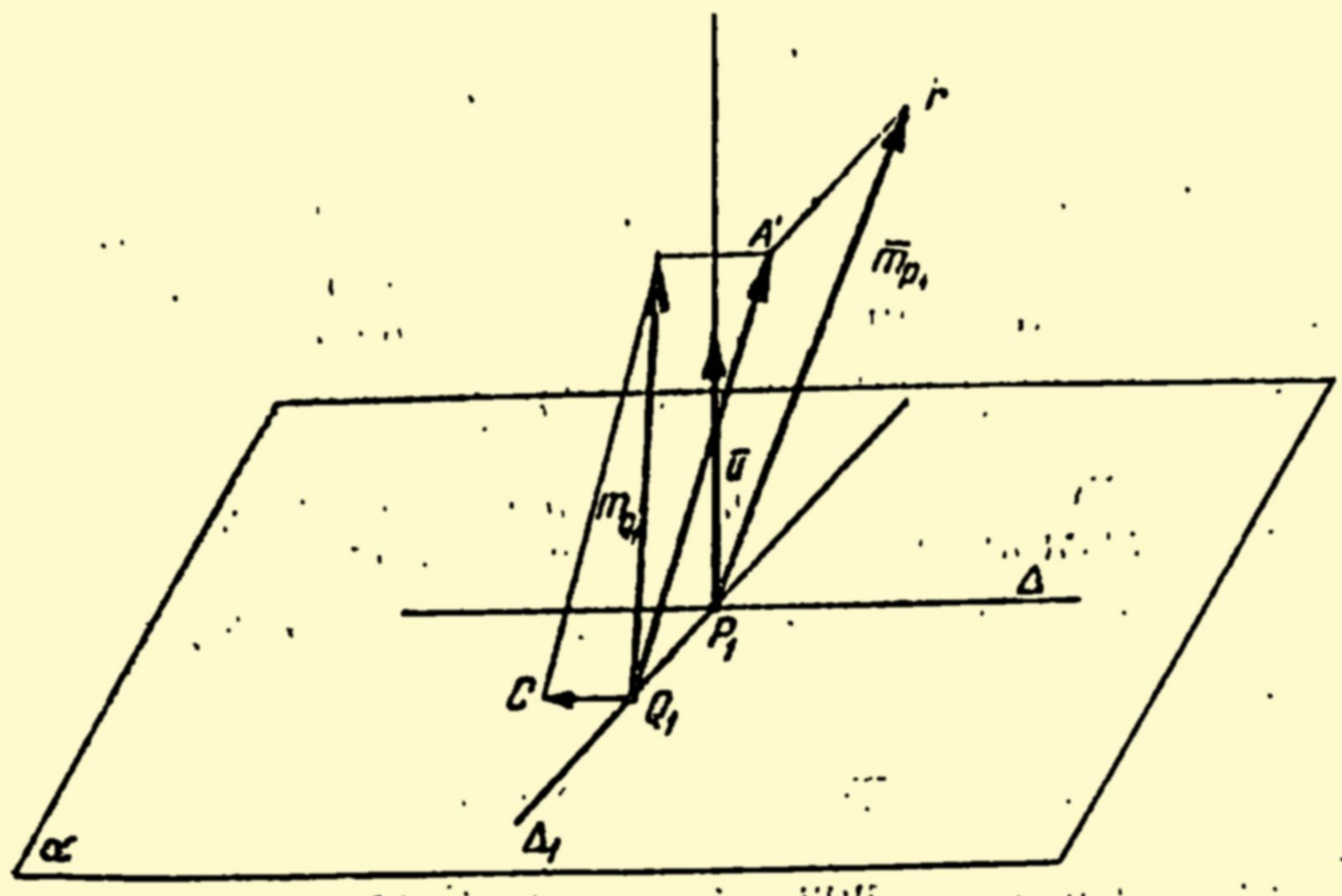


Fig. 112

Vectorii $\overline{m}_{P_1}$ și $\overline{u}$ (dus prin P_1) determină un plan perpendicular pe α și care intersectează pe acesta după o dreaptă Δ (fig. 112). Fie Δ_1 perpendiculara pe Δ dusă în P_1 în planul α. Momentul față de un punct Q_1 de pe Δ_1 al vectorului $\overline{u}$ dus prin P_1 este situat în planul α și paralel cu Δ. Vom alege Q_1 pe acea semidreaptă de pe Δ_1, pentru care acest moment face cu $\overline{m}_{P_1}$ un unghi obtuz.

Deoarece

$$\overline{m}_{Q_1} = \overline{m}_{P_1} + |\overline{Q_1P_1} \times \overline{u} = \overline{m}_{P_1} + \overline{Q_1C}$$

și unghiul $A'Q_1C$ este obtuz, se poate alege Q_1 suficient de aproape de P_1 astfel ca $|\overline{Q_1C}$ să fie suficient de mic și deci astfel ca

$$|\overline{m}_{Q_1}| < |\overline{m}_{P_1}|$$

ceeace contrazice ipoteză că $|\overline{m}_{P_1}|$ realizează minimul modulului $|\overline{m}_P|$ și teorema este complect demonstrată. Interesul acestei demonstrații constă în faptul că ea evită utilizarea dublului produs vectorial.

Observația 2. *Dacă întreg sistemul de vectori alunecători (T) suferă o mișcare de șurub dealungul axei centrale, distribuția momentelor în spațiu nu se schimbă.*

Pentru a demonstra această proprietate caracteristică axei centrale este suficient să verificăm că:

$m_P = m_Q$ dacă $\overline{PQ}$ este paralel cu axa centrală;

$|\overline{m}_P| = |\overline{m}_Q|$ dacă punctele P și Q sunt obținute unul din celălalt printr'o rotație în jurul axei centrale (fig. 113).

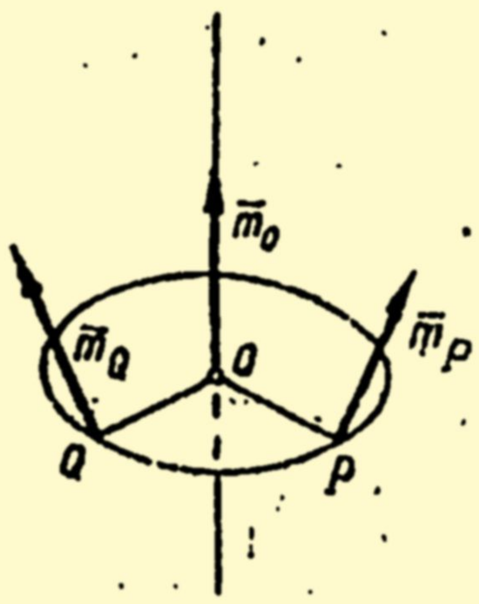


Fig. 113

Prima proprietate este evidentă. Pentru cea de a doua observăm că $\overline{m}_P = \overline{m}_O - \overline{OP} \times \overline{u}$, deci

$$|\overline{m}_P|^2 = |\overline{m}_O|^2 + |\overline{OP}|^2 \overline{u}^2,$$

iar

$$|\overline{OQ}| = |\overline{OP}|.$$

Deasemenea

$$|\overline{m}_Q|^2 = |\overline{m}_O|^2 = |\overline{OQ}|^2 \overline{u}^2.$$

Deci

$$\overline{m}_P = |\overline{m}_Q|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sistemul (T) este fix, se vede că momentele $\overline{m}_p$ pot fi asociate, astfel ca să descrie hiperboloizi riglați și de rotație în jurul axei centrale. Prin fiecare punct din spațiu trece un hiperboloid și numai unul[1]).

§ 133. Torsori particulari.

Reducerea la un vector unic prezintă importanță deosebită în Statică, deoarece ea este realizabilă în două cazuri foarte frecvente în aplicații.

1. Cazul vectorilor concurenți. *Orice sistem de vectori alunecători, concurenți într'un punct O, se reduce la un vector unic, care trece prin acest punct.*

In adevăr, să calculăm coordonatele vectoriale ale torsorului acestui sistem în raport cu punctul O. Vom avea:

$$\overline{u}=\sum_i \overline{u}_i\,;\quad \overline{m}=0,$$

Prin urmare, $A=\overline{m}\overline{u}=0\,;\ \overline{u}\neq 0$, deci sistemul se reduce la un vector unic.

Acesta trece prin O, fiindcă putem construi imediat un sistem echivalent cu cel dat și redus la vectorul $(O, \overline{u})$. Coordonatele vectoriale ale acestui sistem în raport cu O sunt $\overline{u}$ și $\overline{m}=0$, deci el este echivalent cu sistemul dat.

2. Cazul sistemelor de vectori paraleli. *Orice sistem de vectori paraleli este reductibil la un vector unic sau la un cuplu.*

Să notăm cu $\overline{\omega}$ versorul direcției comune a tuturor vectorilor sistemului, punând

$$\overline{u}_i=p_i\overline{\omega}.$$

Fie A_i punctul de aplicație al vectorului $(A_i, \overline{u}_i)$. Să calculăm coordonatele vectoriale ale torsorului sistemului în raport cu un punct O:

$$\left.\begin{aligned}\overline{u}&=\sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i=\overline{\omega}\sum_{i=1}^{n}p_i,\\ \overline{m}&=\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_i=\sum_{i=1}^{n}p_i\overline{OA}_i\times\overline{\omega}.\end{aligned}\right\}\qquad (127,IV)$$

Vom avea imediat

$$A=\overline{m}\overline{u}=\overline{\omega}\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\overline{OA}_i\times\overline{\omega}\right)=0.$$

Deci, *momentul rezultant este perpendicular pe direcția $\overline{\omega}$, comună tuturor vectorilor sistemului.*

Acesta se va reduce la un vector unic sau la un cuplu, după cum $\overline{u}\neq 0$, sau $\overline{u}=0$.

---

[1]) Pentru o demonstrație pur analitică a proprietăților precedente, a se vedea *G. C. Suslov*, Mecanica rațională, vol. I, București, Ed. Tehnică, 1951, p. 27.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă

$$p=\sum_{i=1}^{n} p_i=0,$$

atunci $\overline{u}=0$ şi deci sistemul se reduce la un cuplu.

Dacă $p\neq 0$, putem determina baricentrul sistemului de puncte A_i, în care presupunem aplicate ponderele p_i.

Notând cu G acest baricentru, ştim că vom avea

$$\overline{OG}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\overline{OA_i}}{\sum p_i}, \qquad (128,IV)$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\overline{OA_i}=p\overline{OG}.$$

Expresia momentului rezultant (127,IV) devine

$$\overline{m}=p\overline{OG}\times\overline{\omega}=\overline{OG}\times p\overline{\omega}=\overline{OG}\times\overline{u}.$$

Prin urmare, sistemul format dintr'un vector alunecător $\overline{u}$, trecând prin baricentrul G al sistemului dat, va avea acelaşi torsor ca şi acesta, deoarece coordonatele sale vectoriale sunt $\overline{u}$ şi $\overline{m}$ în raport cu O.

Aceasta dovedeşte echivalenţa sistemului de vectori paraleli, de vector liber $\overline{u}\neq 0$, deci $p\neq 0$, cu un vector unic (G, u) trecând prin baricentrul sistemului.

Baricentrul G poartă numele de *centrul vectorilor paraleli*.

Modul în care s'a obţinut reducerea sistemului de vectori paraleli la un vector unic arată că centrul vectorilor paraleli este independent de direcţia comună $\overline{\omega}$ a vectorilor sistemului. Această observaţie ne permite să stabilim următorul rezultat:

Fiind dat un sistem de vectori paraleli, de vector liber $\overline{u}\neq 0$, centrul vectorilor paraleli G nu se schimbă dacă rotim toţi vectorii sistemului, păstrându-i paraleli şi dacă îi amplificăm cu acelaşi factor scalar.

Sistemul este în fiecare caz echivalent cu un vector unic, ce trece prin G.

In adevăr, vectorul de poziţie $\overline{OG}$, dat de formula (128,IV), nu depinde de $\overline{\omega}$ şi dacă schimbăm p_i în λp_i expresia sa rămâne aceiaşi.

§ 134. Reducerea unui sistem de vectori alunecători la doi vectori alunecători şi dreptele de moment nul

Am văzut că un sistem S de vectori alunecători poate fi redus la doi vectori. Vom adânci această teoremă, şi anume vom impune condiţia ca unul dintre vectori să fie purtat pe o dreaptă dată Δ. Fie $(\Delta, \overline{x})$ vectorul alunecător purtat pe Δ, iar $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ coordonatele vectoriale faţă de un punct O ale

Scanned with OKEN Scanner

unui versor alunecător pe Δ. Coordonatele vectoriale ale lui $(\Delta, \bar{x})$ vor fi $(x\bar{\alpha}, x\bar{\beta})$. Deoarece sistemul (S)—$(\Delta, \bar{x})$ se reduce la un vector unic, vom avea

$$(\bar{u} - x\bar{\alpha})(\bar{m} - x\bar{\beta}) = 0,$$

deci, ţinând seama de faptul că $\bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$, şi că $\bar{u}\bar{m} = A$, avem

$$x(\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha}) - A = 0.$$

Observând că $\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha} = \Phi_S\left(\Delta, \frac{\bar{x}}{x}\right) \neq 0$, obţinem

$$x = \frac{A}{\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha}}; \qquad (129,IV)$$

deci coordonatele vectorului sunt

$$\frac{A\bar{\alpha}}{\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha}}; \quad \frac{A\bar{\beta}}{\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha}}. \qquad (130,IV)$$

Al doilea vector al sistemului va avea drept coordonate vectoriale

$$\bar{u} - \frac{A\bar{\alpha}}{\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha}}, \quad \bar{m} - \frac{A\bar{\beta}}{\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\alpha}}. \qquad (131,IV)$$

Se vede imediat că vectorul (131,IV) nu este nul dacă Δ nu este paralel cu $\bar{u}$. Să notăm cu Δ_c dreapta suport a vectorului alunecător (131,IV). Dacă vectorul iniţial este purtat pe dreapta Δ_c, atunci vectorul al doilea este purtat pe dreapta Δ. Deci $(\Delta_c)_c = \Delta$. Dreptele Δ şi Δ_c se numesc *drepte conjugate*. Se verifică imediat că ele nu sunt concurente.

Se impune deci studiul dreptelor pentru care

$$\bar{u}\bar{\beta} + \bar{m}\bar{\imath} = 0. \qquad (132,IV)$$

În coordonate tetraedrice, (v. § 137), formula (130,IV) devine

$$t_a v_\alpha + t_b v_\beta + t_c v_\gamma + t_\alpha v_a + t_\beta v_b + t_\gamma v_c = 0. \qquad (133,IV)$$

O dreaptă oarecare din spaţiu depinde de patru parametri. Deci, dreptele ale căror coordonate sunt legate prin relaţia (132,IV) sau (133,IV) depind de trei parametri şi formează o configuraţie denumită *complex de drepte*.

Atât formula (132,IV), cât şi formula (133,IV) ne arată că dreptele complexului se bucură de proprietatea că *momentul sistemului faţă de o axă purtată pe una oarecare dintre ele este nul*. Din acest motiv complexul poartă denumirea de *complexul dreptelor de moment nul*.

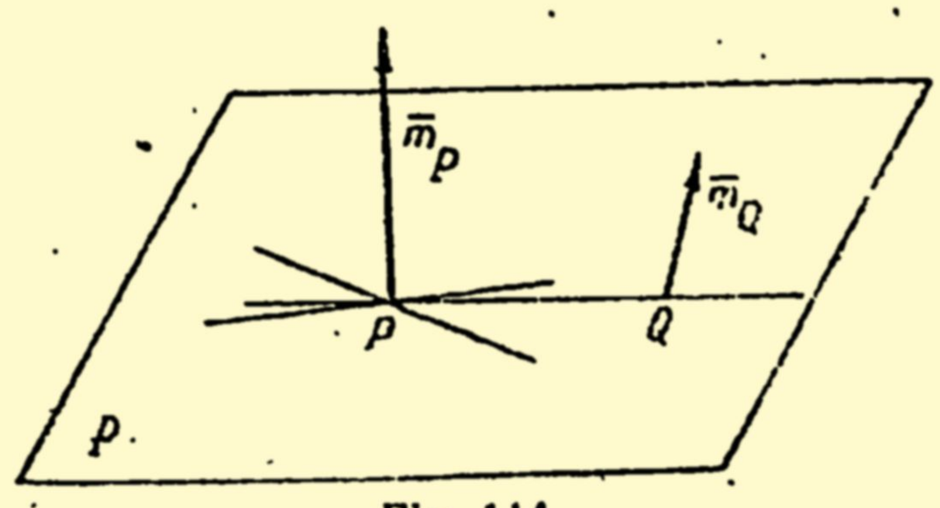


Fig. 114

Printr'un punct P trec o infinitate de drepte ale complexului, toate perpendiculare pe $\bar{m}_P$ şi formând deci un plan, planul p perpendicular în P pe $\bar{m}_P$ (fig. 114).

Vom arăta că nu există în planul p alte drepte de moment nul decât cele care trec prin P. Fie Q un alt punct al planului. Dreapta PQ este o dreaptă de moment nul, deci $\bar{m}_Q \overline{QP} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ar mai exista o dreaptă de moment nul, care să treacă prin Q, atunci $\overline{m}_Q$ ar fi perpendicular pe planul p și deci $\overline{m}_Q$ ar fi paralel cu $\overline{m}_P$; însă din relația

$\overline{m}_Q = \overline{m}_P + \overline{QP} \times \overline{u}$, combinată cu $\overline{m}_Q = \lambda \overline{m}_P$, se deduce că $k\overline{m}_P = \overline{QP} \times \overline{u}$; deci $\overline{m}_P \overline{u} = A = 0$, contrar ipotezei că $A \neq 0$.

Invers, dreptele de moment nul, situate într'un plan p, ori sunt concurente într'un punct P, ori sunt paralele. Fie Q (fig. 115) un punct arbitrar al planului p și $\overline{m}_Q$ momentul rezultant în Q. Dacă $\overline{m}_Q$ este perpendicular pe planul p, dreptele de moment nul ale planului p sunt dreptele care trec prin Q. Dacă $\overline{m}_Q$ nu este perpendicular pe planul p, există o dreaptă Δ și numai una, care să fie pe moment nul și care să treacă prin Q, și anume intersecția planului p cu planul perpendicular pe $\overline{m}_Q$ în Q. Se consideră un alt punct R nesituat pe Δ, se repetă construcția în punctul R și dreapta Δ', astfel obținută, intersectează pe Δ în P. Dreptele de moment nul ale planului p trec prin P, de unde $\overline{m}_P$ este perpendicular pe p. Dacă dreapta Δ' este paralelă cu Δ, toate dreptele de moment nul din planul p vor fi paralele între ele. In acest caz planul p, ori trece prin axa centrală și atunci dreptele de moment nul sunt perpendiculare pe axa centrală, ori p este paralel cu axa centrală și dreptele de moment nul fac un unghi constant cu axa centrală. Punctul P este deci aruncat la infinit în direcția comună a dreptelor de moment nul.

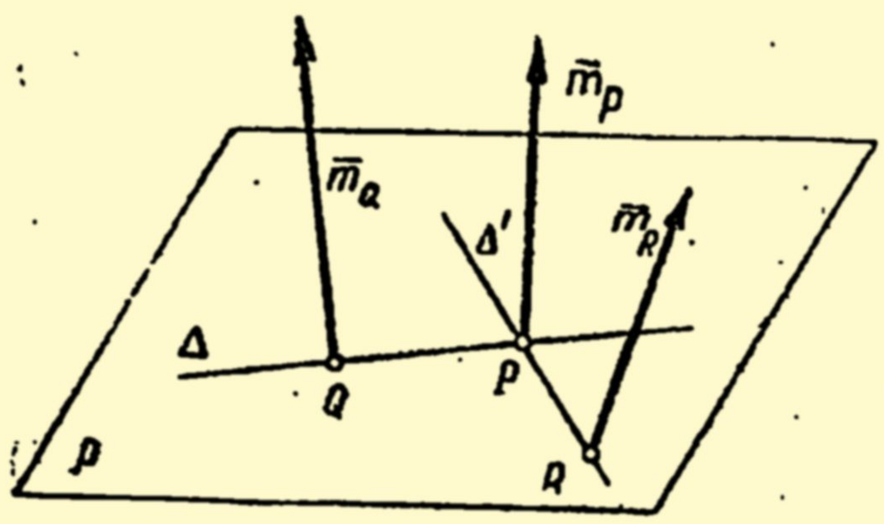


Fig. 115

In rezumat, *fiecărui punct P, la distanță finită sau infinită, îi corespunde un singur plan p, care se găsesc toate dreptele de moment nul ce trec prin P și fiecărui plan p îi corespunde un singur punct P, prin care trec toate dreptele de moment nul ale planului p.*

Planul p se numește *planul polar* al punctului P față de complexul dreptelor de moment nul, iar punctul P se numește *polul* planului p.

Studiul amănunțit al acestei polarități și al complexului însuși este o problemă de geometrie afină, iar sistemul analitic adecuat este acel al coordonatelor tetraedrice (v. § 137).

Drepte conjugate. Fie Δ o dreaptă, *care nu este dreaptă de moment nul*, P și Q două puncte pe dreaptă, iar p și q planele lor polare (fig. 116). Aceste plane se intersectează după dreapta Δ_c. Fie R un punct oarecare situat pe Δ_c. Deoarece dreptele PR

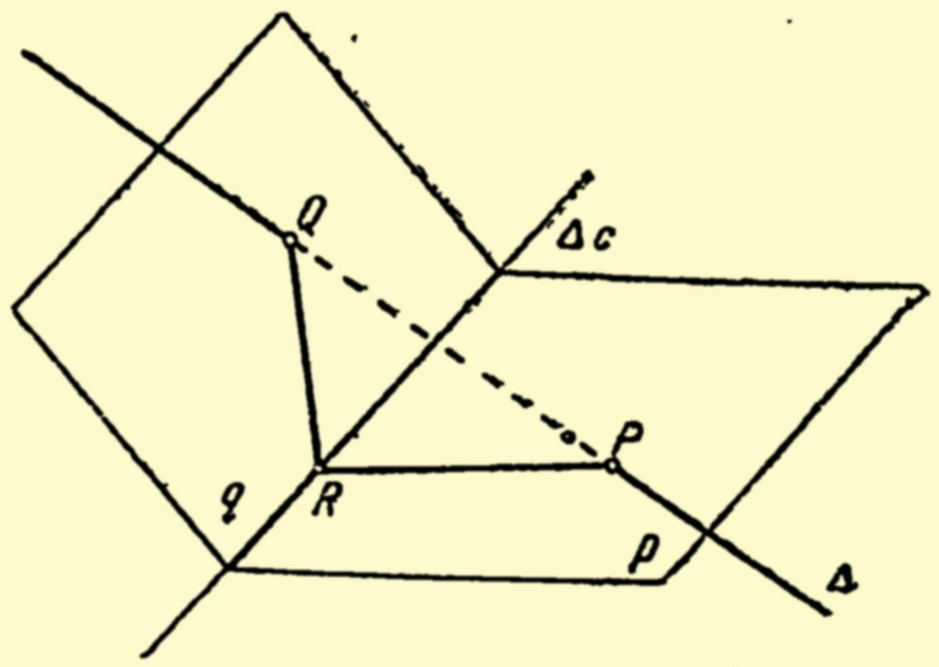


Fig. 116

Scanned with OKEN Scanner

şi QR sunt drepte de moment nul, planul QRP va admite drept pol tocmai punctul R. Deducem următoarele rezultate:

Dacă un plan se roteşte în jurul dreptei Δ, *polul său descrie dreapta* Δ_c.

Invers, dacă un punct P *descrie dreapta* Δ, *planul său polar se roteşte în jurul dreptei* Δ_c.

Dreptele Δ şi Δ_c sunt drepte conjugate faţă de complexul dreptelor de moment nul.

*§ 135. Vectori alunecători în spaţiul afin

Proprietăţile vectorilor alunecători, stabilite în cele ce precedă, sunt bazate în general pe noţiunea de moment în raport cu un punct, folosită sub forma metrică a vectorului reprezentativ al produsului vectorial

$$\overline{m} = \overline{OA} \times \overline{u} = \overline{r} \times \overline{u}.$$

Totuşi, după cum am observat în § 120, vectorul alunecător este o mărime afină, compusă dintr'un vector liber şi un bivector legat, aplicat într'un punct oarecare O, ambele mărimi fiind contravariante.

Coordonatele vectoriale, în raport cu un punct de bază O, sunt deci mărimi afine, şi vom continua să folosim noţiunea de moment cu semnificaţia de bivector legat.

Condiţia $\overline{m}\,\overline{u} = 0$ are deasemenea o semnificaţie afină, deoarece produsul scalar

$$\overline{m}\,\overline{u} = (\overline{r} \times \overline{u})\,\overline{u} = \overline{r}\,\overline{u}\,\overline{u} = 0$$

este de fapt un produs mixt, deci un trivector, care este o mărime afină.

Comomentul a doi vectori alunecători este o mărime afină, deoarece:

$$\mathfrak{M}(A\overline{u},\ B\overline{v}) = (\overline{BA},\ \overline{u},\ \overline{v})$$

este un trivector, deci mărimea asociată paralelipipedului format de $\overline{BA}$, $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ aşezaţi în B.

Putem da o interpretare geometrică mai legată de sistemul format de cei doi vectori alunecători $A\overline{u}$ şi $B\overline{v}$, acestei mărimi fundamentale pentru sistemele de vectori alunecători.

In adevăr, să fixăm vectorii $A\overline{u}$ şi $B\overline{v}$ pe suporturile lor. Figura formată de segmentele orientate

$$\overline{AA'} = \overline{u}, \quad \overline{BB'} = \overline{v}$$

situate pe două drepte oarecare D şi L' din spaţiu, *considerată ca o figură generică,* dă naştere unui obiect geometric, definit exclusiv de aceste segmente situate pe dreptele D şi D' (fig. 117).

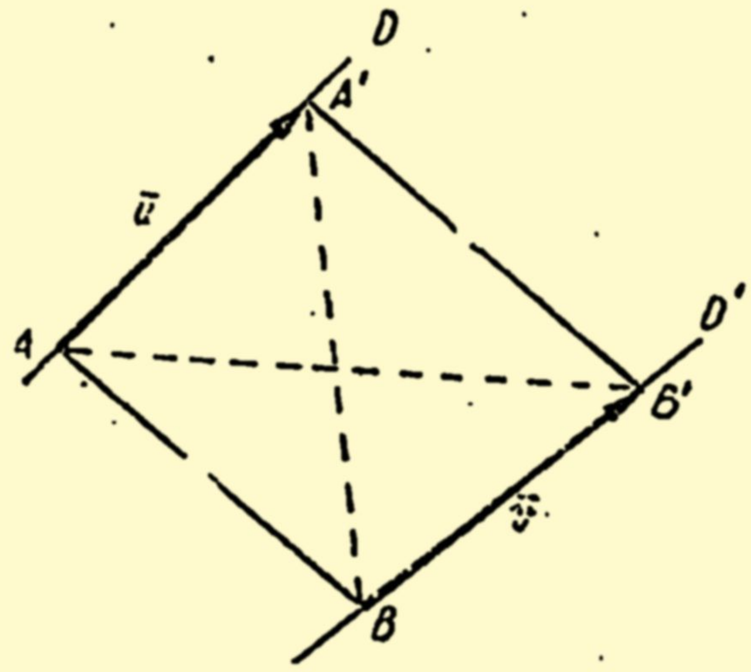


Fig. 117

Unind în toate modurile cele patru puncte A, A', B, B' se formează un tetraedru. Să asociem acestui obiect

geometric volumul orientat al tetraedrului $AA'BB'$. Tetraedrul va fi orientat ca triedrul ce are ca muchii:

1) dreapta care uneşte originea unuia din cei doi vectori cu originea celuilalt;
2) dreapta care uneşte această origine cu extremitatea celuilalt vector;
3) dreapta care uneşte această origine cu extremitatea vectorului considerat.

Alegând ca origine, de exemplu, punctul A, triedrul va fi $\overline{AB}$, $\overline{AB'}$, $\overline{AA'}$, iar volumul tetraedrului va fi $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului format de aceşti trei vectori. Vom avea, deci:

$$\frac{1}{6}(\overline{AB}, \overline{AB'}, \overline{AA'}) = \frac{1}{6}(\overline{AB}, \overline{AB} + \overline{BB'}, \overline{AA'}) =$$

$$= \frac{1}{6}(\overline{AB}, \overline{BB'}, \overline{AA'}) = \frac{1}{6}(\overline{AB}, \bar{v}, \bar{u}) =$$

$$= \frac{1}{6}(\overline{BA}, \bar{u}, \bar{v}) \qquad = \frac{1}{6}\mathfrak{M}(A\bar{u}, B\bar{v}).$$

Este uşor de văzut că obţinem acelaşi rezultat folosind ca origine punctul B. Prin urmare: *Comomentul a doi vectori alunecători $A\bar{u}$, $B\bar{v}$ reprezintă de şase ori volumul orientat al tetraedrului format pe aceşti vectori.* Vom numi acest volum orientat *momentul scalar* al celor doi vectori alunecători.

Momentul scalar a doi vectori alunecători este pentru sistemul format de aceşti vectori o mărime analoagă cu bivectorul pentru sistemul format de doi vectori legaţi de un acelaşi punct O.

După cum bivectorul caracteriza orientarea elementului plan şi măsura acest element, tot aşa *momentul scalar caracterizează orientarea relativă a celor doi vectori, sau a tetraedrului format de ei, şi măsoară acest tetraedru. Condiţia necesară şi suficientă ca cei doi vectori alunecători să fie coplanari este ca momentul lor scalar să fie nul.* In cazul vectorilor liberi, din anularea bivectorului rezultă coliniaritatea celor doi vectori.

Din definiţia torsorului, rezultă că şi această mărime are caracter afin, coordonatele sale vectoriale fiind sume de coordonate vectoriale ale vectorilor alunecători. El este o mărime compusă deasemenea dintr'un vector liber şi un bivector legat de un punct arbitrar O, deci este *o mărime asociată sistemului S şi unui punct O,* determinată prin coordonatele vectoriale în acest punct:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i; \qquad \bar{m} = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_i = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i \times \bar{u}_i].$$

Caracterul afin al torsorului reiese limpede în cazul particular al torsorului de vector nul, care este mărimea asociată cuplului.

In adevăr, acestui obiect geometric i sa asociază un bivector liber, deci o mărime plană, corespunzătoare semnificaţiei fizice a cuplului.

Automomentul unui sistem de vectori alunecători S este, atât prin definiţia sa (112, IV), cât şi prin semnificaţia sa (113, IV), o mărime afină.

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, produsul scalar $A = \overline{m}\overline{u}$ este un produs mixt între un vector şi un bivector, iar formula

$$A = \sum_i \sum_j \mathfrak{M}(A_i\overline{u}_i, A_j\overline{u}_j) = \sum_i \sum_j [\overline{A_jA_i}, \overline{u}_i, \overline{u}_j]$$

arată că *automomentul unui sistem de vectori alunecători reprezintă, de şase ori, suma momentelor scalare ale tuturor vectorilor sistemului, luaţi câte doi.*

Alături de automoment se foloseşte şi noţiunea de *moment scalar al sistemului,* ca generalizare a momentului scalar a doi vectori alunecători.

Momentul scalar al unui sistem S este suma momentelor scalare ale vectorilor săi, luaţi câte doi în toate modurile posibile, odată şi numai odată.

Noţiunea de moment scalar se extinde şi la două sisteme S *şi* S', fiind definită ca suma momentelor scalare ale perechilor formate luând un vector din S şi un vector din S', odată şi numai odată.

Cei doi invarianţi ai unui torsor, $\overline{u}$ şi A, sunt deasemenea mărimi afine, independente de baza O.

Faptul că torsorul este o mărime compusă dintr'un vector şi un bivector ambii contravarianţi, permite extensiunea în spaţiul afin a tuturor mărimilor formate din aceştia prin operaţia de produs. Astfel, produsul scalar devine produs mixt sau exterior, iar mărimile astfel formate sunt trivectori, deci pseudo-scalari. De exemplu, momentul unui torsor $T(\overline{u}, \overline{m})$ în raport cu o axă Δ, definit anterior ca mărime metrică, deoarece este format printr'un produs scalar ce reprezintă o proiecţie şi foloseşte un versor, poate fi înlocuit prin trivectorul $\overline{m}\overline{\omega}$ format prin produsul mixt dintre bivectorul $\overline{m}$ şi versorul alunecător $(O, \overline{\omega})$, situat pe o dreaptă Δ.

Ori, acest trivector este funcţia caracteristică a sistemului, astfel încât vom putea spune: *funcţia caracteristică* $\Phi(O, \overline{v})$ *a sistemului* S *este o mărime afină,* care înlocueşte în spaţiul afin momentul sistemului în raport cu o axă oarecare Δ.

Prin urmare, mărimile de bază ale sistemelor de vectori alunecători sunt afine şi *teoria acestor sisteme, considerate ca obiecte geometrice, poate fi desvoltată în spaţiul afin* cu ajutorul mărimilor geometrice afine asociate.

*§ 136. Torsorul şi noţiunea de câmp de mărimi

Vectorul alunecător, considerat ca mărime asociată unui segment orientat $\overline{AB}$, aşezat pe o dreaptă Δ, a necesitat introducerea unei alte mărimi, torsorul, având un caracter complex, deoarece este format din reunirea unui vector *liber* şi a unui bivector *legat*.

Este necesar să examinăm în amănunt structura acestei mărimi şi, totodată, motivele pentru care este substituită vectorului alunecător.

Vom face observaţia că dacă dreapta Δ ar fi considerată izolată de spaţiul ambiant, ca un spaţiu cu o dimensiune, autonom, *vectorul alunecător* $\overline{AB} = (A\,\bar{u})$, *ar fi în acest spaţiu un vector liber.* Cum însă dreapta Δ, suportul lui $(A, \bar{u})$, este o figură a spaţiului afin, este necesar, în primul rând, să fie determinat acest suport în spaţiu şi apoi să se ia în consideraţie un vector liber pe Δ.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede deci că vectorul alunecător, ca mărime, va fi caracterizat printr'o mărime asociată dreptei Δ și printr'o a doua mărime asociată segmentului $\overline{AB}$ orientat, și liber pe Δ. Prin urmare: *vectorul alunecător este o mărime compusă și complexă, care sintetizează o mărime asociată dreptei Δ și o mărime asociată segmentului orientat $\overline{AB}$.*

Pentru determinarea poziției dreptei Δ în spațiu vom introduce cel mai simplu mijloc de reper, adică un punct de bază O. Pentru a putea asocia o mărime de poziție dreptei Δ, analoagă cu vectorul de poziție al unui punct, este necesar să luăm în considerație obiectul geometric format de Δ și de punctul O. Acest obiect geometric se găsește în planul format de O și Δ, iar pentru determinarea acestui plan este necesar să cunoaștem un bivector oarecare din el.

Un astfel de bivector, format numai cu elemente aparținând obiectului geometric O, Δ, se obține unind O cu două puncte oarecare M, N ale lui Δ. Bivectorul căutat este $(\overline{OM}, \overline{ON})$.

Pentru determinarea dreptei Δ în planul $\overline{OM}, \overline{ON}$ este suficient să cunoaștem direcția sa, deoarece, cum am arătat în § 122, problema revine la construcția afină a unui triunghi OMN de arie dată, având latura MN de direcție dată Δ. Direcția dreptei Δ este dată, în particular, prin vectorul liber $\bar{u} = \overline{AB}$. Prin urmare, pentru determinarea dreptei Δ vom putea folosi în loc de vectorul $\overline{MN}$ vectorul liber $\bar{u} = \overline{AB}$.

Astfel, dreapta Δ este determinată de bivectorul $(\overline{OA}, \overline{OB})$ și vectorul liber $\bar{u}$, iar vectorul $(\Delta, \overline{AB})$ alunecător pe ea se obține în același timp folosind tot vectorul liber $\bar{u} = \overline{AB}$. Prin urmare, *vectorul alunecător $(\Delta, \overline{AB})$ este determinat prin mărimea asociată obiectului geometric (O, Δ) și segmentului orientat $\overline{AB}$, adică printr'un bivector $\bar{m}$ legat de punctul O și un vector liber $\bar{u} = \overline{AB}$.*

Considerate separat, aceste două mărimi constitue coordonatele vectoriale ale vectorului alunecător $(\Delta, \overline{AB})$. *Ele constitue, însă, o mărime unitară, torsorul $T(\bar{u}, \bar{m})$, care sintetizează vectorul alunecător și este mărimea asociată segmentului orientat AB situat pe suportul Δ în spațiul cu trei dimensiuni.*

Aceste observații explică structura vectorului alunecător, arată dece acesta este o mărime complexă și compusă și în același timp pun în evidență torsorul ca mărime asociată obiectului geometric format de punctul O și de figura (Δ, AB).

Din punct de vedere geometric, *torsorul este o mărime de poziție, analoagă cu vectorul de poziție al unui punct M din spațiu. El este mărimea asociată obiectului geometric format de $(\Delta, \overline{AB})$, complectat cu punctul de bază O.*

Considerațiile făcute se extind imediat la un sistem S de vectori alunecători, cu observația ca în acest caz torsorul nu mai poate determina în mod unic un sistem de vectori alunecători, ci întreaga clasă de sisteme echivalente care au același torsor. Totuși, *torsorul este o mărime de poziție și pentru sistemele S reduse la forma canonică*, după cum rezultă din teorema de reducere canonică (§ 132).

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul S, redus în mod unic la un cuplu de moment $\frac{A}{u^2}\bar{u}$, paralel cu vectorul liber $\bar{u}$ şi la un vector alunecător $(J, \bar{u})$, egal cu $\bar{u}$ şi situat pe axa centrală, este determinat prin torsorul său $T(\bar{u}, \bar{m})$. Trebue să observăm, însă, că această reducere presupune spaţiul metric.

Analogia tensorului cu vectorul de poziţie justifică şi faptul că bivectorul $\overline{m}$ este legat de punctul O, deoarece vectorul de poziţie $\bar{r}=OM$ este deasemenea legat de baza O.

Este, însă, important să examinăm semnificaţia fizică a sistemelor de vectori alunecători, consideraţi ca forţe aplicate corpului solid. Statica teoretică şi aplicată, de exemplu în construcţii, foloseşte ca mărime fundamentală momentul rezultant al unui sistem de forţe *în raport cu un punct* dat şi urmăreşte variaţia acestui moment dela un punct O la altul O'. Cu alte cuvinte, *momentul rezultant, spre deosebire de rezultanta generală, nu este o mărime constantă, asociată sistemului de forţe, ci o mărime variabilă cu punctul din spaţiu, în care este calculată.*

Aceeaşi observaţie este deci valabilă şi pentru torsorul unui sistem de vectori alunecători şi ţinând seama de semnificaţia fizică a acestei mărimi, trebue luată în consideraţie ca o proprietate caracteristică.

Când o mărime este determinată în fiecare punct M al unui domeniu D din spaţiu, vom spune că această mărime este o *funcţie de punctul M*, definită în domeniul D.

Pentru a înţelege mai bine sensul acestei definiţii este necesar să observăm că de fapt suntem puşi în faţa unei mulţimi de mărimi, care au diverse valori în diversele puncte ale domeniului D. *Aceste mărimi aparţin toate unei aceleiaşi specii de mărimi, ceeace ne permite să le privim în totalitatea lor şi să înţelegem prin "mărime determinată în fiecare punct al domeniului D", mulţimea de mărimi aparţinând acelei specii şi corespunzătoare punctelor M ale domeniului D.*

Torsorul este o funcţie de un punct O', care descrie întreg spaţiul.

In adevăr, am văzut că putem calcula momentul $\bar{m}'$ într'un punct oarecare O', când cunoaştem momentul într'un punct O prin formula (100,IV)

$$\overline{m}'=\overline{m}-\bar{a}\times\bar{u},$$

unde $\bar{a}=\overline{OO'}$. Dacă alegem punctul O ca bază, $\overline{OO'}=\bar{a}$ este vectorul de poziţie al punctului *variabil* O' în raport cu O, iar O poate fi ales arbitrar în spaţiu. Deci, fiecărui punct O' îi corespunde o valoare $\bar{m}'$ a coordonatei $\bar{m}$ a torsorului $T(\bar{u}, m)$.

Când o mărime este unic determinată în fiecare punct al unui domeniu D din spaţiu, se spune că această mărime determină un *câmp*. Vom numi *câmp de mărimi*, mulţimea tuturor valorilor luate de o mărime, care este funcţie de punctul M într'un domeniu D din spaţiu. *Mărimile unui câmp sunt toate de aceeaşi specie.*

Putem considera direct un domeniu D din spaţiu şi o specie de mărimi determinate în fiecare punct M al domeniului D. Mulţimea acestor mărimi constituie un câmp definit în domeniul D, iar corespondenţa dintre mărimile câmpului şi punctele domeniului se va numi *funcţie de punct*, definită în domeniul D.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm, în particular, mulţimea valorilor pe care le ia torsorul $T(\bar{u}, \bar{m})$ al unui sistem S de vectori alunecători, când punctul O' descrie întreg spaţiul. În fiecare punct O' avem un torsor determinat. Prin urmare:

Mulţimea valorilor torsorului unui sistem de vectori alunecători S în toate punctele spaţiului formează un câmp definit în tot spaţiul, iar torsorul este o mărime, funcţie de punct, definită deasemenea în tot spaţiul.

Putem considera din punctul de vedere nou introdus şi vectorul liber $\bar{u}$. Mulţimea segmentelor orientate $\overline{AB}$, care au ca mărime asociată un vector dat $\bar{u}=\overline{AB}$ poate fi considerată ca o mulţime de vectori legaţi; fiecare vector $\overline{AB}$ având originea dată în A şi extremitatea în B, astfel ca $\overline{AB}=\bar{u}$.

Mulţimea vectorilor legaţi $\bar{u}=\overline{AB}$ face parte dintr'o specie, aceea a vectorilor legaţi. Ea constitue un câmp de vectori, definit în tot spaţiul şi având valori constante.

Putem deci substitui unui vector liber, considerat ca o clasă de segmente orientate, un câmp de vectori definit în tot spaţiul. Cu alte cuvinte:

Orice vector liber determină un câmp constant de vectori definit în tot spaţiul.

Torsorul unui sistem de vectori alunecători determină un câmp compus dintr'un câmp de bivectori şi un câmp constant de vectori, definit în tot spaţiul. Ca funcţie de punct, torsorul are proprietăţile de liniaritate pe care le-am pus în evidenţă pentru funcţia caracteristică. Să notăm cu $\overline{m}(\bar{r})$ momentul torsorului în punctul M, de vector de poziţie $\bar{r}=\overline{OM}$, iar cu $\overline{m}_0$ momentul în punctul O. Vom scrie, deci

$$\overline{m}(\bar{r})=\overline{m}(O)-(\bar{r},\bar{u})=\overline{m}_0-(\bar{r},\bar{u})$$

Să punem:

$$\bar{\mu}(\bar{r})=\overline{m}(\bar{r})-\overline{m}_0=-(\bar{r},\bar{u}).$$

Vom avea

$$\bar{\mu}(\bar{r}_1+\bar{r}_2)=-(\bar{r}_1+\bar{r}_2,\bar{u})=-(\bar{r}_1,\bar{u})-(\bar{r}_2,\bar{u}).$$

Deci

$$\bar{\mu}(\bar{r}_1+\bar{r}_2)=\bar{\mu}(\bar{r}_1)+\bar{\mu}(\bar{r}_2).$$

Deasemenea

$$\bar{\mu}(\lambda\bar{r})=\lambda\bar{\mu}(\bar{r}).$$

Se vede că $\bar{\mu}(\bar{r})$ este o funcţie liniară în sensul definiţiei liniarităţii, analoagă cu un polinom omogen de gradul întâi (fără termen liber). Vom spune că $\bar{\mu}(\bar{r})$ este o *funcţie liniară bivectorială.*

Momentul $\overline{m}(\bar{r})$ este deasemenea o funcţie liniară bivectorială, neomogenă.

§ 137. Coordonatele tetraedrice ale vectorului alunecător

Mulţimea vectorilor alunecători formează o specie de mărimi, deoarece putem compara doi vectori alunecători oarecare dar, aşa cum am observat dela început, această specie nu este măsurabilă.

Introducerea torsorului ca mărime asociată unui sistem de vectori alunecători ne-a permis să constituim o specie măsurabilă, specia torsorilor. În acelaşi timp, considerarea claselor de sisteme echivalente, corespunzând unui torsor, a pus în evidenţă posibilitatea reducerii sistemelor la doi vectori alunecători.

Scanned with OKEN Scanner

Putem considera deci sistemele de vectori alunecători ca definind mărimi, fără a le asocia în prealabil torsorii respectivi. Mărimea corespunzătoare unui sistem va fi reprezentată geometric prin sistemul de doi vectori la care poate fi redus sistemul considerat şi o vom denumi la fel pentru simplificare.

Cum introducerea torsorului a arătat că specia sistemelor de vectori alunecători este măsurabilă, *se pune problema, dacă nu este posibil să punem în evidenţă un sistem de unităţi ale acestei specii, cu ajutorul cărora să măsurăm toate mărimile speciei.* Aceste unităţi trebue să fie, evident, vectori alunecători, constituind un sistem de bază.

Orice vector alunecător $(A, \bar{u})$ *este echivalent cu un sistem de doi vectori alunecători, dintre care unul trece printr'un punct fix oarecare* I *din spaţiu, iar celălalt se găseşte într'un plan* P *oarecare din spaţiu, care nu conţine punctul* I (vezi şi § 131).

In adevăr, fie A' punctul în care suportul lui $(A, \bar{u})$ întâlneşte planul P (fig. 118). Unind I cu A', putem transporta vectorul $(A, \bar{u})$ în A', pentru a-l descompune după direcţia $A'I$ şi după direcţia dreptei de intersecţie a planului format de $A'I$ şi $A'A$ cu planul P, obţinând astfel vectorii $(A', \bar{u}_1)$ şi $(A', \bar{u}_2)$.

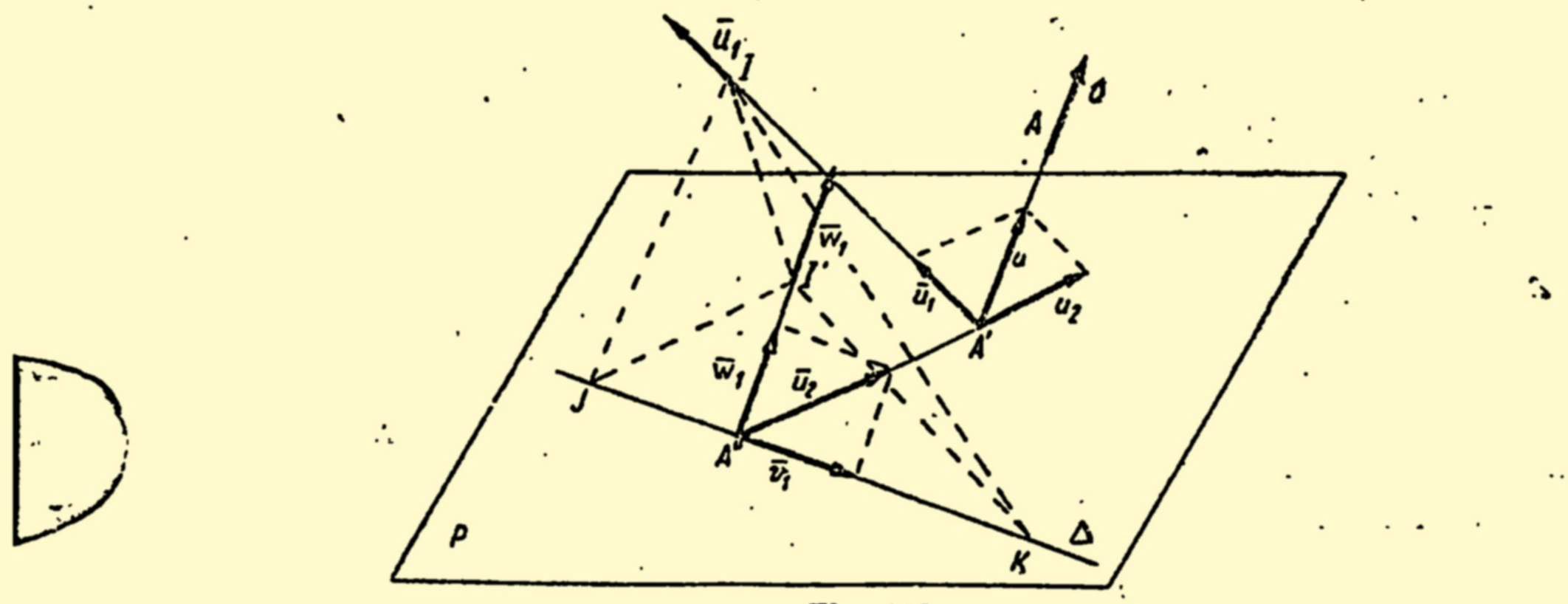


Fig. 118

Se arată uşor că şi în cazul când vectorul este paralel cu planul P, descompunerea este posibilă adăugând doi vectori alunecători, opuşi şi concurenţi cu $(A, \bar{u})$,

In planul P putem continua descompunerea vectorului $(A', \bar{u}_2)$, luând arbitrar un punct I' şi o dreaptă Δ, care nu trece prin I'. Fie A'' intersecţia suportului lui $(A', \bar{u}_2)$ cu Δ. Vectorul $(A', \bar{u}_2)$ poate fi mutat în $(A'', \bar{u}_2)$ unde se descompune după direcţiile $A''I'$ şi Δ, descompunere din care obţinem vectorii (A'', w_1) şi $(A'', \bar{v}_1)$.

In consecinţă, vom putea pune pe $(A, \bar{u})$ sub forma

$$(A, \bar{u}) = (I, \bar{u}_1) + (A'', \bar{v}_1) + (I', \bar{w}_1).$$

Suma înseamnă, ca în cazul sistemelor de vectori alunecători, că cei trei vectori formează împreună un sistem echivalent cu vectorul dat $(A, \bar{u})$.

Această descompunere este unică, după cum rezultă uşor din operaţiile prin care este obţinută, fiecare din acestea fiind unică.

Scanned with OKEN Scanner

Putem folosi punctele I și I' ca origini pentru două sisteme fundamentale la care să raportăm vectorii $(I, \overline{u}_1)$ și $(I', \overline{w}_1)$, primul în spațiu și al doilea în plan.

Pentru aceasta este suficient să considerăm pe Δ două puncte arbitrare J, K. Direcțiile II', IJ, IK formează un triedru, iar direcțiile $I'J$, $I'K$ un sistem de referință în planul P. La aceste sisteme putem raporta vectorii $(I, \overline{u}_1)$ și $(I', \overline{w}_1)$, astfel încât vectorul alunecător inițial $(A, \overline{u})$ se va găsi descompus în șase vectori alunecători având ca suporturi muchiile acestui tetraedru.

Cum atât punctul I, cât și planul P, precum și punctul I' și dreapta Δ din acest plan au fost alese arbitrar, putem spune:

Orice vector alunecător $(A, \overline{u})$ poate fi descompus în șase vectori alunecători având ca suporturi muchiile unui tetraedru oarecare din spațiu, descompunerea fiind unică.

Un vector alunecător are deci șase componente în raport cu un sistem de referință tetraedric.

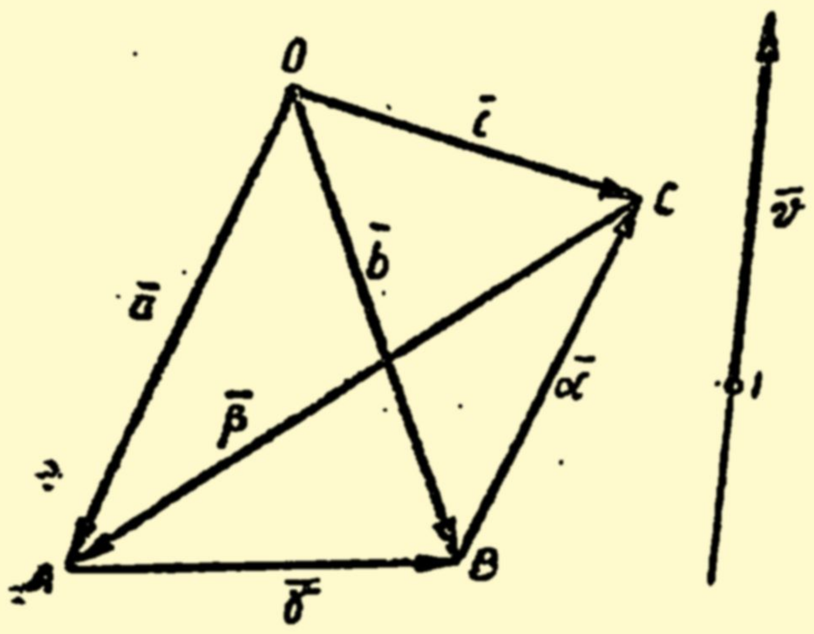


Fig. 119

Coordonatele vectoriale $\overline{u}, \overline{m}$ ale unui vector alunecător conduc la același rezultat, dacă se consideră componentele scalare ale lui $\overline{u}$ și $\overline{m}$ în raport cu un sistem de referință fundamental, format de un triedru.

Putem, deci, da și pentru vectorii alunecători o expresie analoagă cu aceea a vectorilor liberi, raportați la un sistem de referință.

Vom numi *tetraedrul OABC fundamental* pentru descompunerea vectorilor alunecători din spațiu, dacă raportăm toți aceștii vectori la $OABC$ (fig. 119).

Vom nota convențional

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a};\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b};\quad \overrightarrow{OC}=\vec{c};$$

$$\overrightarrow{BC}=\vec{\alpha};\quad \overrightarrow{CA}=\vec{\beta};\quad \overrightarrow{AB}=\vec{\gamma}. \qquad (134,IV)$$

Pentru simplificarea notației nu vom mai pune în evidență, nici originea, nici suportul *vectorilor alunecători fundamentali* astfel întroduși, deși ar trebui să scriem de exemplu $(O, \vec{a})$ sau $(B, \vec{\alpha})$ etc.

Expresia vectorului alunecător $(I, \overline{v})$ va fi

$$(I, \overline{v})=v_a\vec{a}+v_b\vec{b}+v_c\vec{c}+v_\alpha\vec{\alpha}+v_\beta\vec{\beta}+v_\gamma\vec{\gamma}, \qquad (135,IV)$$

unde v_a, v_b, v_c sunt componentele scalare pe direcțiile $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, iar $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ componentele scalare pe direcțiile $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Pentru determinarea componentelor scalare, v_a, v_b, v_c, v_α, v_β, v_γ, vom proceda într'un mod analog ca pentru vectorii liberi. Să calculăm momentele lui $(I, \overline{v})$ cu vectorii fundamentali, de exemplu

$$m(I\overline{v}, O\vec{a})=\overline{OI}\,\overline{v}\vec{a}. \qquad (136,IV)$$

Observăm că prin descompunerea făcută, vectorul $(I, \overline{v})$ este echivalent cu

Scanned with OKEN Scanner

un sistem de vectori alunecători, exprimat prin relaţia simbolică (135,IV). Deci comomentul (136,IV) nu este decât funcţia caracteristică a acestui sistem.

Vom avea deci:

$$\Phi_\Sigma(0, \bar{a}) = \mathfrak{M}(v_a\bar{a}, \bar{a}) + \mathfrak{M}(v_b\bar{b}, \bar{a}) + \mathfrak{M}(v_c\bar{c}, \bar{a}) + \mathfrak{M}(v_\alpha\bar{\alpha}, \bar{a}) + \\ + \mathfrak{M}(v_\beta\bar{\beta}, \bar{a}) + \mathfrak{M}(v_\gamma\bar{\gamma}, \bar{a}).$$

Ori, comomentul a doi vectori alunecători coplanari este nul, deci în membrul al doilea singurul termen, care nu se anulează este

$$\mathfrak{M}(v_a\bar{a}, \bar{a}) = v_a\mathfrak{M}(\bar{a}, \bar{a}).$$

Ori, $\mathfrak{M}(\bar{a}, \bar{a})$ este volumul orientat al paralelipipedului format de vectorii $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{u}$ şi $\overline{OA} = \bar{a}$; deci

$$\mathfrak{M}(\bar{u}, \bar{a}) = \mathfrak{M}(B\bar{a}, O\bar{a}) = \overline{OB}\,\bar{u}\,\bar{a} = \bar{b}\bar{u}\bar{a} = \bar{a}\bar{b}\bar{u}.$$

Acest volum reprezintă de fapt de şase ori volumul tetraedrului $\overline{OA}$ $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ sau volumul paralelipipedului format de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$; ceeace se vede dealtfel şi din expresia $\bar{a}\bar{b}\bar{u}$, dacă punem $\bar{u} = -\bar{b} + \bar{c}$. Vom avea:

$$\mathfrak{M}(\bar{a}, \bar{a}) = \bar{a}\bar{b}\bar{u} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

Cu aceste observaţii, vom putea scrie

$$\Phi_\Sigma(0, \bar{a}) = \Phi_\Sigma(\bar{a}) = \mathfrak{M}(I\bar{v}, \bar{a}) = v_a\bar{a}\bar{b}\bar{c},$$

de unde

$$v_a = \frac{\Phi_\Sigma(\bar{a})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{\mathfrak{M}(I\bar{v}, \bar{a})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

Un calcul analog va conduce la valorile celorlalte componente, astfel încât vom avea:

$$\left.\begin{aligned} v_a &= \frac{\Phi_\Sigma(\bar{\alpha})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{\mathfrak{M}(I\bar{v}, \bar{\alpha})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad v_b = \frac{\Phi_\Sigma(\bar{\beta})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad v_c = \frac{\Phi_\Sigma(\bar{\gamma})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \\ v_\alpha &= \frac{\Phi_\Sigma(\bar{a})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad v_\beta = \frac{\Phi_\Sigma(\bar{b})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad v_\gamma = \frac{\Phi_\Sigma(\bar{c})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \end{aligned}\right\} \quad (137,IV)$$

Vom numi scalarii v_a, v_b, v_c, v_α, v_β, v_γ *coordonatele sau componentele tetraedrice ale vectorului alunecător* $(I, \bar{v})$ în raport cu tetraedrul fundamental *OABC*.

Aceste coordonate determină complect vectorul alunecător. Putem face observaţia că expresiile lor, conţinând numai produse mixte, deci numai volume, pot fi considerate ca având un caracter afin, adică nu necesită introducerea noţiunilor metrice, deşi am folosit produsul vectorial. Funcţia caracteristică permite deci studiul vectorilor alunecători în spaţiul afin[1]).

[1]) *G. Bouligand*, Leçons de Géométrie vectorielle, Paris, 1924, p. 87, foloseste această funcţie pentru studiul vectorilor alunecători înainte de a introduce consideraţii de geometrie metrică.

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele tetraedrice determină în mod unic orice vector alunecător. Ele nu sunt independente. Calculând comomentul vectorului $(\overline{Iv})$ cu el însuşi, servindu-ne de descompunerea (135,IV), de proprietăţile de aditivitate ale funcţiei caracteristice şi de faptul că comomentul a doi vectori alunecători concurenţi este nul, rezultă că

$$v_a v_\alpha + v_b v_\beta + v_c v_\gamma = 0. \qquad (137',IV)$$

Expresiile (122,IV) arată că aceste componente sunt proporţionale cu momentele vectorului $(I, \overline{v})$ în raport cu cele şase axe determinate de muchiile tetraedrului fundamental.

Este suficient să observăm că, de exemplu,

$$\mathfrak{M}(\overline{Iv}, \overline{a}) = \mathfrak{M}(\overline{Iv}, O\overline{a}) = a\mathfrak{M}\left(\overline{Iv}, O\frac{\overline{a}}{a}\right),$$

ultima expresie fiind produsul scalarului a cu momentul lui $\overline{Iv}$ în raport cu axa de versor $\frac{\overline{a}}{a}$.

Prin urmare, un vector alunecător este determinat prin momentele sale în raport cu cinci axe formate cu muchiile $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, ale tetraedrului fundamental. Cel de al şaselea moment rezultă din relaţia (137',IV).

In particular, orice vector alunecător nul va avea coordonatele tetraedrice nule, deci momentele în raport cu cele şase axe nule.

*) § 138. Coordonatele tetraedrice ale torsorilor

Introducerea descompunerii tetraedrice permite să considerăm orice sistem S de vectori alunecători $A_1\overline{u}_1$, $A_2\overline{u}_2, \ldots, A_n\overline{u}_n$ ca descompus în şase vectori alunecători, având ca suporturi respectiv muchiile tetraedrului fundamental. Vectorii având acelaşi suport se pot însuma, astfel încât: *orice sistem de vectori alunecători este echivalent cu un sistem format din şase vectori alunecători, având ca suporturi muchiile tetraedrului fundamental.*

Dacă ţinem seama de expresiile (137,IV) ale componentelor tetraedrice ale unui vector alunecător oarecare, vectorul $A_k\overline{u}_k$, a cărui expresie se deduce din (135,IV), se poate pune sub forma:

$$(A_k\overline{u}_k) = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}[\mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{\alpha})\bar{a} + \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{\beta})\bar{b} + \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{\gamma})\bar{c} +$$

$$+ \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{a})\bar{\alpha} + \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{b})\bar{\beta} + \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{c})\bar{\gamma}]. \qquad (138,IV)$$

Expresia simbolică (109,IV) a torsorului

$$T = \sum_{k=1}^{n}(A_k, \overline{u}_k)$$

ia deci forma următoare:

$$T = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\left[\bar{a}\sum_1^n \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{\alpha}) + \bar{b}\sum_1^n \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \beta) + \bar{c}\sum_1^n \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{\gamma}) + \right.$$

$$\left. + \bar{\alpha}\sum_1^n \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{a}) + \bar{\beta}\sum_1^n \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{b}) + \bar{\gamma}\sum_1^n \mathfrak{M}(A_k\overline{u}_k, \bar{c})\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținând însă seama de expresia funcției caracteristice (115,IV) a unui sistem de vectori alunecători, observăm că

$$\sum_{1}^{n} \mathfrak{M}(A_k \bar{u}_k, \bar{a}) = \Phi_S(B, \bar{u}) = \Phi_S(\bar{u}), \text{ etc.}$$

Torsorul T va avea deci expresia

$$T = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}[\Phi_S(\bar{u})\,\bar{a} + \Phi_S(\bar{\beta})\,\bar{b} + \Phi_S(\bar{\gamma})\,\bar{c} + \Phi_S(\bar{\alpha})\,\bar{u} + \\ + \Phi_S(\bar{b})\,\bar{\beta} + \Phi_S(\bar{c})\,\bar{\gamma}], \qquad (139,IV)$$

analoagă cu aceea a unui singur vector alunecător $(A_k, \bar{u}_k)$.

Vom numi expresiile

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \frac{\Phi_S(\bar{\alpha})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad t_b = \frac{\Phi_S(\bar{\beta})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad t_c = \frac{\Phi_S(\bar{\gamma})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \\ t_\alpha &= \frac{\Phi_S(\bar{a})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad t_\beta = \frac{\Phi_S(\bar{b})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \quad t_\gamma = \frac{\Phi_S(\bar{c})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}; \end{aligned}\right\} \qquad (140,IV)$$

coordonatele tetraedrice ale torsorului T în raport cu tetraedrul fundamental $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ (fig. 120).

Ca și coordonatele vectoriale $\bar{u}$, $\bar{m}$, coordonatele tetraedrice nu definesc un anumit sistem de vectori alunecători, ci clasa tuturor sistemelor echivalente cu un sistem dat, deci torsorul clasei. Astfel în fig. 120, sistemul este considerat redus la doi vectori alunecători $(O, \bar{u})$ și $(I, \bar{v})$.

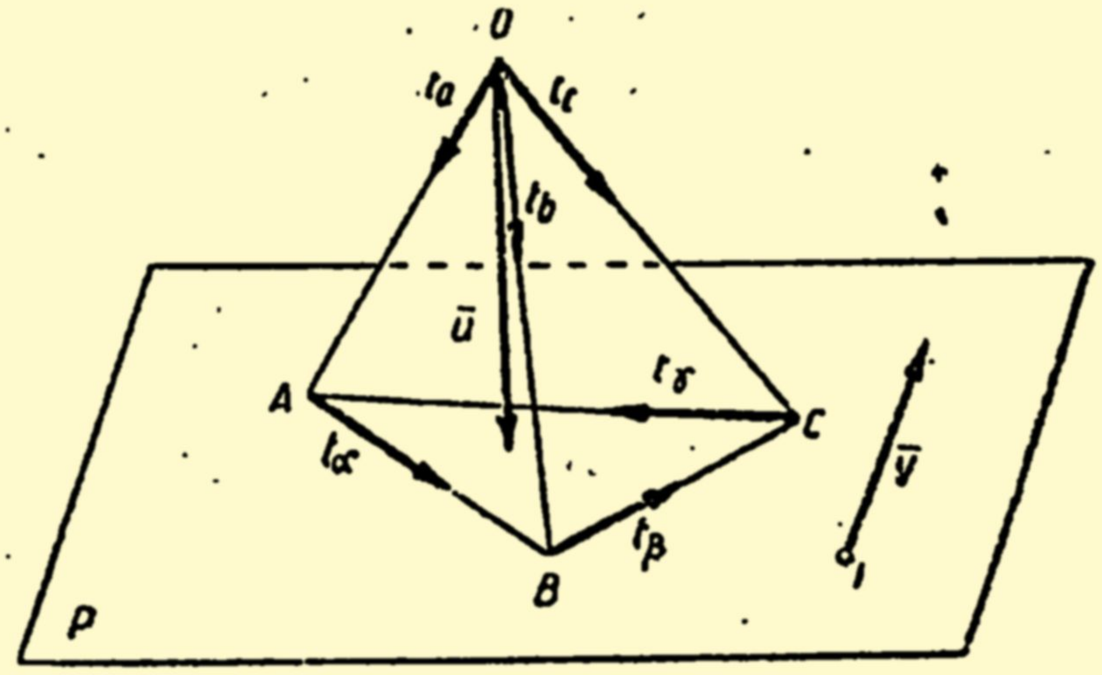


Fig. 120

Două sisteme echivalente având aceeași funcție caracteristică, $\Phi_S(\bar{\alpha})$, $\Phi_S(\bar{\beta})$, $\Phi_S(\bar{\gamma})$, $\Phi_S(\bar{a})$, $\Phi_S(\bar{b})$, $\Phi_S(\bar{c})$, vor avea aceleași valori pentru ambele sisteme; coordonatele tetraedrice vor fi aceleași pentru torsorii lor, deci aceste sisteme au același torsor. Aceasta justifică numele de coordonate tetraedrice date xpresiilor (140,IV), care definesc astfel torsorul.

Am numit *sistem nul*, sau echivalent cu zero, orice sistem de torsor nul: $\bar{m} = 0$, $\bar{u} = 0$, în raport cu orice punct O (§ 126).

Expresia (115,IV) a funcției caracteristice arată că vom avea

$$\Phi_S(I, \bar{v}) \equiv 0,$$

pentru orice vector alunecător $(I\bar{v})$.

Invers, dacă funcția caracteristică a unui sistem este nulă pentru orice vector alunecător $I\bar{v}$, acest sistem va avea torsorul nul, deoarece este echi-

Scanned with OKEN Scanner

valent cu orice alt sistem nul. Prin urmare: *Condiţia necesară şi suficientă ca un sistem să fie echivalent cu zero este ca funcţia sa caracteristică să fie identic nulă.*

Coordonatele tetraedrice ale torsorului nul sunt deci nule, ca o consecinţă a acestei propoziţii în mod necesar.

Pe de altă parte, dacă aceste coordonate tetraedrice sunt nule, expresia (139,IV) a torsorului T are toţi termenii nuli. Cum această expresie reprezintă un sistem de şase vectori alunecători, aceştia vor fi toţi nuli separat şi deci torsorul însuşi va avea coordonatele vectoriale $\bar{u}=0$ şi $\bar{m}=0$, adică va fi nul. Prin urmare:

Condiţia necesară şi suficientă ca un sistem de vectori alunecători să fie nul, este ca torsorul său să aibă coordonatele tetraedrice nule:

$$\Phi_S(\bar{\alpha})=\Phi_S(\beta)=\Phi_S(\bar{\gamma})=\Phi_S(\bar{a})=\Phi_S(\bar{b})=\Phi_S(\bar{c})=0 \qquad (141,IV)$$

în raport cu un tetraedru $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{b}$, $\bar{\gamma}$.

Cu alte cuvinte, *funcţia caracteristică trebue să fie nulă numai pentru cei şase vectori fundamentali.*

Ţinând seama de faptul că orice funcţie caracteristică este proporţională cu un moment în raport cu o axă, putem enunţa propoziţia: *Condiţia necesară şi suficientă ca un sistem de vectori alunecători să fie nul este ca momentele sale în raport cu cele şase axe determinate de muchiile tetraedrului fundamental să fie nule.*

Vom deduce imediat condiţiile de echivalenţă a sistemelor de vectori alunecători: S şi S^*.

Două sisteme echivalente având prin definiţie acelaşi torsor, sistemul format prin scăderea lor, adică sistemul constituit de S şi $-S^*$, va avea torsorul nul. Dacă notăm cu Φ_S şi Φ_{S^*} cele două funcţii caracteristice, coordonatele celor doi torsori vor fi

$$\Phi_S(\bar{a}),\ \Phi_S(\bar{b}),\ \Phi_S(\bar{c}),\ \Phi_S(\bar{\alpha}),\ \Phi_S(\bar{\beta}),\ \Phi_S(\bar{\gamma}),$$

$$\Phi_{S^*}(\bar{a}),\ \Phi_{S^*}(\bar{b}),\ \Phi_{S^*}(\bar{c}),\ \Phi_{S^*}(\bar{\alpha}),\ \Phi_{S^*}(\bar{\beta}),\ \Phi_{S^*}(\bar{\gamma}).$$

Torsorul sistemului $S-S^*$, echivalent cu zero, va avea drept coordonate diferenţele $\Phi_S(\bar{a})-\Phi_{S^*}(\bar{a})$, etc., deci:

Condiţia necesară şi suficientă ca două sisteme să fie echivalente, este ca torsorii lor să aibă coordonatele tetraedrice egale, în raport cu un tetraedru fundamental oarecare; deci,

$$\begin{aligned}
&\Phi_S(\bar{a})=\Phi_{S^*}(\bar{a});\quad \Phi_S(\bar{b})=\Phi_{S^*}(\bar{b});\quad \Phi_S(\bar{c})=\Phi_{S^*}(\bar{c});\\
&\Phi_S(\bar{\alpha})=\Phi_{S^*}(\bar{\alpha});\quad \Phi_S(\bar{\beta})=\Phi_{S^*}(\bar{\beta});\quad \Phi_S(\bar{\gamma})=\Phi_{S^*}(\bar{\gamma}).
\end{aligned} \qquad (142,IV)$$

Expresia (139,IV) a torsorului unui sistem $S(A_k\bar{u}_k)$; $(k=1, 2, \ldots, n)$ ne permite să dăm funcţiei caracteristice a oricărui sistem echivalent cu S, deci având acelaşi torsor, *o formă canonică*, în care intervin numai coordonatele tetraedrice ale torsorului. In adevăr, sistemul S va avea funcţia caracteristică

Scanned with OKEN Scanner

egală cu aceea a oricărui sistem echivalent cu el, în particular egală cu aceea a sistemului de şase vectori aşezaţi pe muchiile tetraedrului, a cărui expresie este (139,IV). Fiind dat un vector alunecător oarecare $(I, \bar{v})$, vom avea:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_S(I,\bar{v}) = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}[&\Phi_S(\bar{\alpha})\mathfrak{M}(\bar{a},I\bar{v}) + \Phi_S(\bar{\beta})\mathfrak{M}(\bar{b},I\bar{v}) + \Phi_S(\bar{\gamma})\mathfrak{M}(\bar{c},I\bar{v}) + \\ &+ \Phi_S(\bar{a})\mathfrak{M}(\bar{\alpha},I\bar{v}) + \Phi_S(\bar{b})\mathfrak{M}(\bar{\beta},I\bar{v}) + \Phi_S(\bar{c})\mathfrak{M}(\bar{\gamma},I\bar{v}).\end{aligned}\right\} \quad (143,IV)$$

Dacă notăm cu Σ sistemul format de acest vector unic $I,\bar{v}$ şi ţinem seama de expresiile (137,IV) ale componentelor sale tetraedrice, vom putea scrie

$$\mathfrak{M}(\bar{a},I\bar{v}) = \mathfrak{M}(I\bar{v},\bar{a}) = \Phi_\Sigma(\bar{a}), \text{ etc.}$$

deci expresia funcţiei caracteristice va fi:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_S(I\bar{v}) = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}[&\Phi_S(\bar{\alpha})\Phi_\Sigma(\bar{a}) + \Phi_S(\bar{\beta})\Phi_\Sigma(\bar{b}) + \Phi_S(\bar{\gamma})\Phi_\Sigma(\bar{c}) + \\ &+ \Phi_S(\bar{a})\Phi_\Sigma(\bar{\alpha}) + \Phi_S(\bar{b})\Phi_\Sigma(\bar{\beta}) + \Phi_S(\bar{c})\Phi_\Sigma(\bar{\gamma})].\end{aligned}\right\} \quad (144,IV)$$

In această expresie intervin exclusiv coordonatele tetraedrice ale sistemului şi ale vectorului alunecător în raport cu tetraedrul fundamental.

Dacă întroducem aceste coordonate, ţinând seama de (137,IV) şi (140,IV), expresia (144,IV) devine:

$$\Phi_S(I,\bar{v}) = (t_a v_\alpha + t_b v_\beta + t_c v_\gamma + t_\alpha v_a + t_\beta v_b + t_\gamma v_c)\cdot(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) \quad (145,IV)$$

Din această formulă se vede că funcţia caracteristică a unui sistem este o funcţie scalară de componentele tetraedrice ale vectorului alunecător $I\bar{v}$, liniară în aceste componente.

In cazul particular, când sistemul S se reduce la un singur vector alunecător $(P,\bar{u})$, funcţiunea caracteristică devine comomentul vectorilor $(P,\bar{u})$ şi $(I,\bar{v})$. Dacă notăm cu u_a, u_b, u_c, u_α, u_β, u_γ, coordonatele tetraedrice ale lui $P\bar{u}$, vom avea

$$\Phi_S(I\bar{v}) = \mathfrak{M}(P\bar{u},I\bar{v}) = [u_a v_\alpha + u_b v_\beta + u_c v_\gamma + u_\alpha v_a + u_\beta v_b + u_\gamma v_c]\ [\bar{a}\bar{b}\bar{c}). \quad (146,IV)$$

Din simetria acestei formule deducem că funcţia caracteristică Φ_Σ a sistemului format de $I\bar{v}$, are aceeaşi expresie ca $\Phi_S(I\bar{v})$, când este calculată pentru vectorul $P\bar{u}$, deci

$$\Phi_S(I\bar{v}) = \Phi_\Sigma(P\bar{u}).$$

In general, *componentele tetraedrice ale unui sistem de vectori alunecători sunt sumele componentelor tetraedrice ale vectorilor $A_i\bar{u}_i$, care constituie sistemul.*

Este suficient să observăm că

$$t_a = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\Phi_S(\bar{\alpha}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}(A_k\bar{u}_k,\bar{\alpha})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \sum_{k=1}^{n} u_{ka},$$

dacă notăm, conform cu (137,IV) cu u_{ka} componenta în raport cu $\bar{a}$ a vectorului alunecător $A_k\bar{u}_k$.

Scanned with OKEN Scanner

In mod analog, vom avea

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \sum_1^n u_{ka}; \quad t_b = \sum_1^n u_{kb}; \quad t_c = \sum_1^n u_{kc} \\ t_\alpha &= \sum_1^n u_{k\alpha}; \quad t_\beta = \sum_1^n u_{k\beta}; \quad t_\gamma = \sum_1^n u_{k\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (147,IV)$$

Deducem imediat că, *dacă un sistem este suma a două sisteme, componentele torsorului său vor fi egale cu suma componentelor torsorilor celor două sisteme.*

Deci, dacă

$$S = S_1 + S_2$$

şi dacă notăm componentele torsorilor respectivi:

$$T(t_a, t_b, t_c, t_\alpha, t_\beta, t_\gamma); \quad T(t_{a_1}, t_{b_1}, t_{c_1}, t_{\alpha_1}, t_{\beta_1}, t_{\gamma_1}); \quad T(t_{a_2}, t_{b_2}, t_{c_2}, t_{\alpha_2}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_2}),$$

vom avea

$$t_a = t_{a_1} + t_{a_2}; \ldots t_\alpha = t_{\alpha_1} + t_{\alpha_2}; \cdots$$

Funcţia caracteristică a sistemului S se bucură de aceeaşi proprietate:

$$\Phi_S(\bar{v}) = \Phi_{S_1}(\bar{v}) + \Phi_{S_2}(\bar{v}) \qquad (148,IV)$$

*§ 139. Comomentul a două sisteme de vectori alunecători

Fiind date două sisteme S şi Σ de vectori, putem considera comomentele fiecărui vector dintr'unul din ele cu fiecare vector din celălalt.

Vom numi *comoment al celor două sisteme* suma comomentelor obţinute, asociind un vector dintr'unul, odată şi numai odată, cu fiecare vector din celălalt.

Dacă notăm cu $A_i\bar{u}_i$ şi $B_k\bar{v}_k$ vectorii celor două sisteme S şi Σ, comomentul acestor sisteme are expresia

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{M}(A_i\bar{u}_i, B_k\bar{v}_k) = \mathfrak{M}(T_S, T_\Sigma), \qquad (149,IV)$$

unde notăm cu T_S, T_Σ torsorii celor două sisteme. Evident, vom avea

$$\mathfrak{M}(T_S, T_\Sigma) = \mathfrak{M}(T_\Sigma, T_S).$$

Comomentul celor două sisteme se poate exprima cu ajutorul funcţiilor caracteristice, punând:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}(T_S, T_\Sigma) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(A_i\bar{u}_i, B_k\bar{v}_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} \Phi_S(B_k\bar{v}_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{M}(B_k\bar{v}_k, A_i\bar{u}_i)\right] = \sum_{i=1}^{m} \Phi_\Sigma(A_i\bar{u}_i). \end{aligned}\right\} \qquad (150,IV)$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind expresia (143,IV) a funcției caracteristice a unui vector alunecător oarecare, vom putea scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\Phi_S(B_k\bar{v}_k)=\frac{1}{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}\sum_{k=1}^{n}[\Phi_S(\bar{\alpha})\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{a})+\Phi_S(\bar{\beta})\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{b})+$$

$$+\Phi_S(\bar{\gamma})\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{c})+\Phi_S(\bar{a})\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{\alpha})+\Phi_S(\bar{b})\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{\beta})+$$

$$+\Phi_S(\bar{c})\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{\gamma})]=\frac{1}{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}\Big[\Phi_S(\bar{a})\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{a})+\dots\Big].$$

Cum însă,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{M}(B_k\bar{u}_k,\bar{a})=\Phi_\Sigma(\bar{a}),\quad\text{etc.},$$

formula (150,IV) devine:

$$\mathfrak{M}(T_S,T_\Sigma)=\frac{1}{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}[\Phi_S(\bar{a})\Phi_\Sigma(\bar{a})+\Phi_S(\bar{\beta})\Phi_\Sigma(\bar{b})+\Phi_S(\bar{\gamma})\Phi_\Sigma(\bar{c})+\Phi_S(\bar{a})\Phi_\Sigma(a)+$$

$$+\Phi_S(\bar{b})\Phi_\Sigma(\bar{\beta})+\Phi_S(\bar{c})\Phi_\Sigma(\bar{\gamma})]\qquad(151,IV)$$

Evident, același rezultat se obține prin calculul sumei

$$\sum_{i=1}^{m}\Phi(A_i\bar{u}_i).$$

Comparând formulele (151,IV) și (144,IV), putem interpreta pe aceasta din urmă ca reprezentând comomentul sistemului S și al sistemului format de vectorul alunecător unic $\bar{Iv}$, deci

$$\mathfrak{M}(T_S,\bar{Iv})=\Phi_S(\bar{Iv}).\qquad(152,IV)$$

Funcția caracteristică $\Phi_S(\bar{Iv})$ a unui sistem de vectori alunecători S reprezintă comomentul celor două sisteme formate de S și $\bar{Iv}$.

In cazul când sistemul $\sum$ coincide cu S, expresia comomentului devine

$$\mathfrak{M}(T_S,T_S)=\frac{2}{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}[\Phi_S(a)\Phi_S(\bar{a})+\Phi_S(\bar{\beta})\Phi_S(\bar{b})+\Phi_S(\bar{\gamma})\Phi_S(\bar{c})].\qquad(153,IV)$$

și reprezintă *dublul automomentului sistemului S*, deoarece este suma comomentelor tuturor perechilor de vectori alunecători din sistem, luate de două ori.

Reducerea la un vector unic exprimată cu funcția caracteristică. Am văzut că pentru ca un sistem să se reducă la un vector unic, este necesar și suficient ca automomentul său să fie nul, iar vectorul liber $\bar{u}$ să fie diferit de zero.

Expresia (153,IV) a automomentului unui sistem ne va da deci această condiție necesară și suficientă exprimată cu ajutorul funcției caracteristice, dacă vom ține seama și de formula (139,IV) a torsorului. Vom avea deci

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_S(\bar{a})\Phi_S(\bar{a})+\Phi_S(\bar{\beta})\Phi_S(\bar{b})+\Phi_S(\bar{\gamma})\Phi(\bar{c})=0;\\&\Phi_S(\bar{a})\bar{a}+\Phi_S(\bar{b})\bar{b}+\Phi_S(\bar{c})\bar{c}+\Phi_S(\bar{\alpha})\bar{\alpha}+\Phi_S(\bar{\beta})\bar{\beta}+\Phi_S(\bar{\gamma})\bar{\gamma}\neq 0.\end{aligned}\right\}\qquad(154,IV)$$

Scanned with OKEN Scanner

In cazul descompunerii tetraedrice, relațiile (154,IV) exprimă reductibilitatea sistemului la un vector unic.

In ultima sumă vectorii vor fi considerați ca liberi în adunare.

Prima condiție (154,IV) reamintește produsul scalar, exprimat cu ajutorul componentelor torsorului. Ținând seama de (140,IV), ca devine

$$t_a t_\alpha + t_b t_\beta + t_c t_\gamma = 0.$$

EXERCIȚII

1. Dealungul muchiilor unui tetraedru regulat acționează șase forțe egale, în sensul indicat în fig. 121. Să se determine automomentul și axa centrală.

Indicație. Se va observa că forțele dirijate dealungul laturilor triunghiului ABC

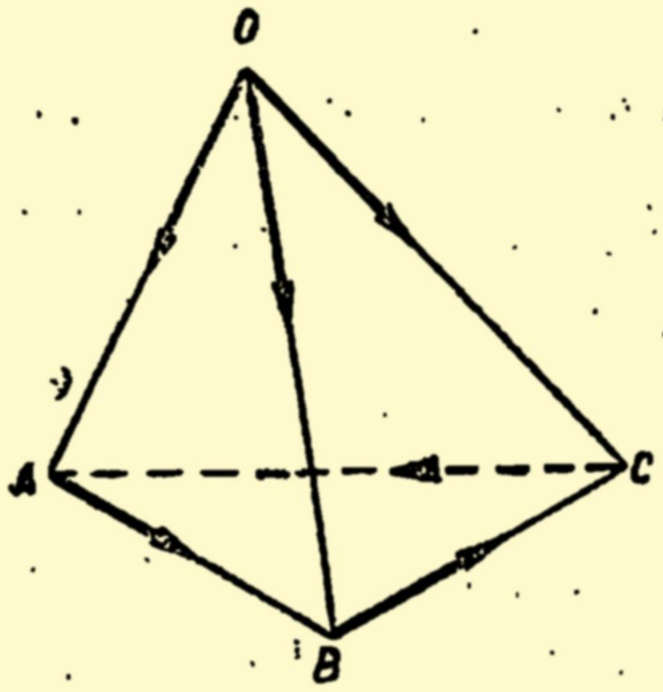


Fig. 121.

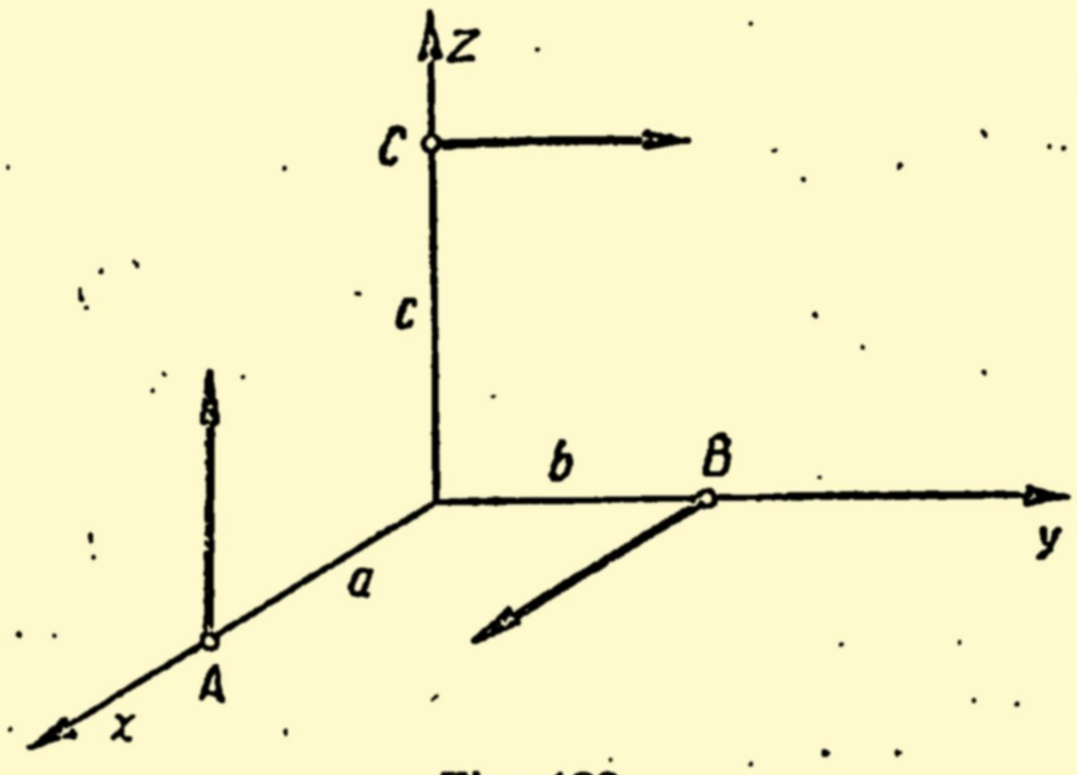


Fig. 122.

formează un cuplu și că rezultanta forțelor, care pornesc din O este dirijată pe înălțimea din O a tetraedrului regulat.

2. Se dă un triedru ortogonal și trei forțe egale în modul, dispuse în sensul indicat în fig. 122. Să se găsească relația dintre a, b, c, pentru ca aceste forțe să se reducă la o forță unică.

3. Dealungul muchiilor unui cub acționează 12 forțe egale în modul, având sensurile din fig. 123. Să se determine automomentul și axa centrală.

4. Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de vectori alunecători să fie echivalent cu zero este ca momentul rezultant al sistemului să fie nul față de trei puncte necoliniare.

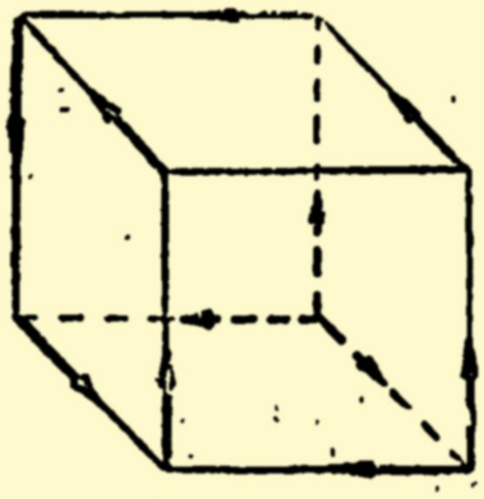


Fig. 123.

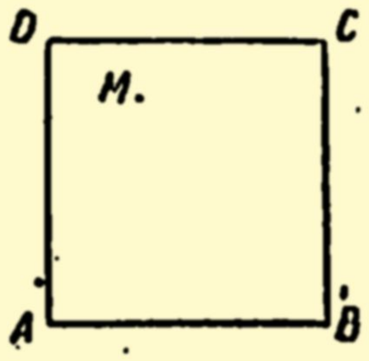


Fig. 124.

Indicație. Notând cu O, M, N cele trei puncte, avem $\overline{m}_M = \overline{m}_O + \overline{MO} \times \overline{u}$: $\overline{m}_N = \overline{m}_O + \overline{NO} \times \overline{u}$; deci $\overline{MO} \times \overline{u} = \overline{0}$ și $\overline{NO} \times \overline{u} = \overline{0}$. Dacă $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{OM}$ și $\overline{ON}$ ar fi coliniare. Deci $\overline{u} = 0$.

5. O placă pătrată de latură a și de greutate p, orizontală, se sprijină în punctele A, B și M, astfel încât presiunile în A și B să fie $\frac{p}{4}$ și $\frac{p}{5}$. Să se determine poziția punctului M și presiunea în acest punct (fig. 124).

Scanned with OKEN Scanner

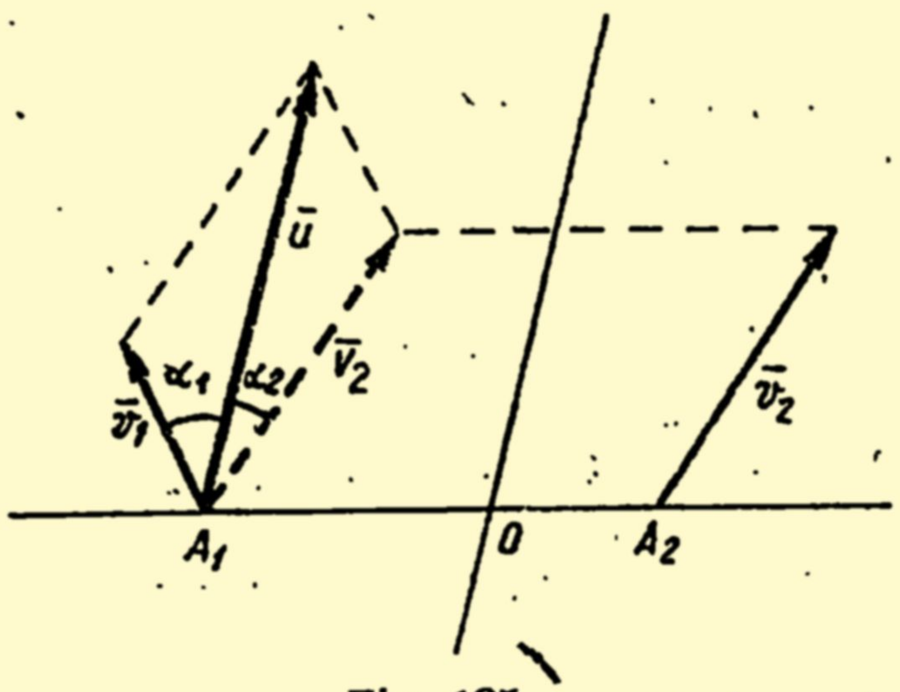
Indicație. Se va găsi că distanța dela M la AB este $\frac{10}{11}a$, iar la AD este $\frac{5}{11}a$. Presiunea în M este $\frac{11}{20}p$.

6. Să se determine axa centrală a unui sistem de doi vectori alunecători neconcurenți $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ (fig. 125).

Indicație. Axa centrală este perpendiculară pe perpendiculara comună suporturilor lor într'un punct O, astfel că

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

7. De-alungul muchiilor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ ale unei jumătăți de paralelipiped acționează



Eig. 125.

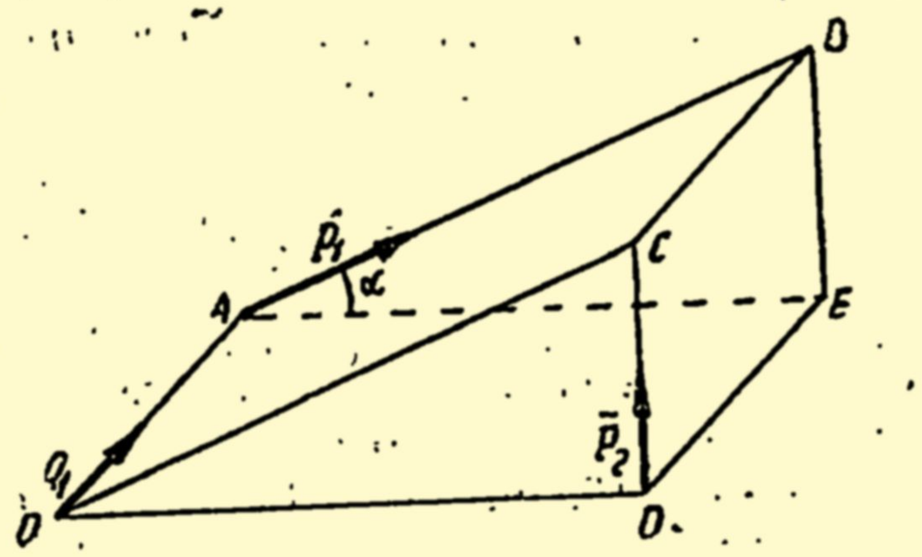


Fig. 126.

forțele $\overline{P}_1$ și P_2. Să se înlocuiască sistemul format de acești doi vectori alunecători printr'un vector $\overline{Q}_1$, de-alungul lui $\overline{OA}$ și un al doilea vector $\overline{Q}_2$ (fig. 126).

Indicație. Avem $Q_2^2 = P_1^2 + 3P_2^2 + a_1^2$, iar direcția vectorului $\overline{Q}_2$ trece prin C în planul ACD și face cu CD un unghi α al cărei cosinus este $\frac{2P_2}{Q_2}$.

8. Dacă comomentul a doi torsori este nul și dacă în același timp rezultantele lor generale sunt rectangulare, axele lor centrale sunt concurente și rectangulare.

Indicație. Fie $T_1(\overline{u}_1, \overline{m}_1)$ și $T_2(\overline{u}_2, \overline{m}_2)$, cu $\overline{u}_1\overline{u}_2 = 0$ și $\overline{u}_1\overline{m}_2 + \overline{u}_2\overline{m}_1 = 0$. Coordonatele vectoriale ale celor două axe centrale sunt $\left(\overline{u}_1, \overline{m}_1 - \frac{A_1}{u_1^2}\overline{u}_1\right)$ și, $\left(\overline{u}_2, \overline{m}_2 - \frac{A_2}{u_2^2}\overline{u}_2\right)$. iar relația de concurență

$$\overline{u}_1\left(\overline{m}_2 - \frac{A_2}{u_2^2}\overline{u}_2\right) + \overline{u}_2\left(\overline{m}_1 - \frac{A_1}{u_1^2}\overline{u}_1\right) = 0.$$

9. Axele a trei torsori T_1, T_2, T_3, a căror sumă este echivalentă cu zero, admit o singură perpendiculară comună.

Indicație. Fie $T_1(\overline{u}_1\,\overline{m}_1)$, $T_2(\overline{u}_2, \overline{m}_2)$ și $T_3(\overline{u}_3, \overline{m}_3)$, cu $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_3 = \overline{0}$ și $\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 = \overline{0}$. Se observă că fiecare dintre torsorii T_1, T_2, T_3 admit față de torsorul T de coordonate vectoriale

$$T(\overline{u}_2 \times \overline{u}_3 + \overline{u}_3 \times \overline{u}_1 + \overline{u}_1 \times \overline{u}_2,$$
$$\overline{u}_1 \times \overline{m}_2 + \overline{u}_2 \times \overline{m}_3 + \overline{u}_3 \times \overline{m}_1 - \overline{u}_1 \times \overline{m}_3 - \overline{u}_2 \times \overline{m}_1 - \overline{u}_3 \times \overline{m}_2)$$

proprietatea care face obiectul exercițiului precedent.

10. Să se găsească coordonatele vectoriale ale versorului dreptei, care unește punctele $\overline{r}_1$ și $\overline{r}_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Se va găsi

$$\bar{a}=\frac{\bar{r}_2-\bar{r}_1}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|}, \qquad \bar{m}=\frac{\bar{r}_1\times\bar{r}_2}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|}.$$

11. Se dau două drepte ale căror versori au drept coordonate vectoriale $(\bar{a}, \bar{m})$ și $(\bar{b}, \bar{n})$. Să se găsească coordonatele vectoriale ale versorului perpendicularei comune.

Indicație. Se va găsi

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|}, \quad \bar{\beta}_1=\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|^3}(\bar{a}\bar{b})(\bar{b}\bar{m}+\bar{a}\bar{n})-\frac{(\bar{a}\bar{b}\bar{m})\bar{a}+(\bar{a}\bar{b}\bar{n})\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|^3}.$$

12. Fie D_1, D_2, D_3 trei trepte și Δ_1, Δ_2, Δ_3 perpendicularele lor comune. Să se arate că perpendiculare comune δ_1, δ_2, δ_3 la perechile (Δ_1, D_1), (Δ_2, D_2), (Δ_3, D_3) admit o singură perpendiculară comună (Configurația lui Morley-Petersen).

Indicație. Fie $(\bar{u}_i, \bar{m}_i)$ coordonatele vectoriale ale versorului lui D_i. Pe baza exercițiului precedent, coordonatele vectoriale ale lui Δ_1 vor fi

$$\bar{\alpha}_1=\frac{\bar{u}_2\times\bar{u}_3}{|\bar{u}_2\times\bar{u}_3|}, \quad \bar{\beta}=\frac{\bar{u}_2\times\bar{u}_3}{|\bar{u}_2\times\bar{u}_3|^3}[(\bar{u}_2\bar{u}_3)(\bar{u}_3\bar{m}_2+\bar{u}_2\bar{m}_3)]-\frac{(\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{m}_2)\bar{u}_2+(\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{m}_3)\bar{u}_3}{|\bar{u}_2\times\bar{u}_3|^3}.$$

Se calculează coordonatele vectoriale ale versorilor lui δ_1, δ_2 și δ_3 și se determină apoi coordonatele vectoriale ale perpendicularei comune între δ_1 și δ_2. Se vor găsi expresii simetrice față de indicii 1, 2, 3.

13. Fie $(\bar{u}_1, \bar{m}_1)$, $(\bar{u}_2\bar{m}_2)$ coordonatele vectoriale a doi versori concurenți. Să se demonstreze că

$$\bar{u}_1\times\bar{m}_1-\bar{u}_2\times\bar{m}_2=\frac{(\bar{m}_1\bar{m}_2\bar{u}_1)}{(\bar{u}_1\bar{m}_2)}\bar{u}_1+\frac{(\bar{m}_1\bar{m}_2\bar{u}_2)}{(\bar{u}_2\bar{m}_1)}\bar{u}_2.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață 3
Introducere 7

ALGEBRA VECTORIALĂ

Cap. I. Bazele Calculului vectorial 13

A. *Bazele teoriei geometrice a mărimilor fizice* 13
§ 1. Mărimile și măsura lor 13
§ 2. Mărimi geometrice 16
§ 3. Mărimi fizice și mărimi geometrice 19
§ 4. Invarianța mărimilor și legilor fizice . . . 21
§ 5. Mărimi fizice măsurabile cu o unitate . . . 23
§ 6. Teoria geometrică a mărimilor fizice și Calculul vectorial 25

B. *Bazele fizice ale calculului vectorial. Mărimi scalare și vectoriale* 28
§ 7. Mărimi fizice scalare 28
§ 8. Mărimi fizice orientate 30
§ 9. Vectori. Mărimi vectoriale 31
§ 10. Notații și definiții vectoriale 33
§ 11. Definiția proiectiv-afină a vectorilor . . . 35
§ 12. Adunarea vectorială 38
§ 13. Scăderea vectorială 42
§ 14. Amplificarea vectoriilor cu un număr . . . 43
§ 15. Măsura vectorilor coliniari. Versorul . . . 45
§ 16. Amplificarea vectorilor prin scalari . . . 47
§ 17. Vectorul de poziție 49
§ 18. Combinația liniară vectorială 51
* § 19. Vectorul de poziție și vectorul legat. Mărimi asociate figurilor geometrice 54
* § 20. Sistemele de referință și vectorii de poziție . . 56
* § 21. Mărimi libere și mărimi condiționate . . . 58
* § 22. Sensul segmentelor orientate ca mărime geometrică 60
Exerciții 63

C. *Bazele geometrice ale Calculului vectorial* 66
§ 23. Mărimile vectoriale și structura spațiului . . 66
§ 24. Vectori coliniari 68
§ 25. Vectori coplanari 70
§ 26. Vectori liniar independenți 73
§ 27. Reprezentarea vectorilor în spațiu 74
§ 28. Vectorii și numărul de dimensiuni ale spațiului . 76
§ 29. Triedrul fundamental 77
§ 30. Triedrul de referință. Coordonate carteziene. . . 78
§ 31. Spațiul vectorial. Spațiul afin 80
§ 32. Algebra liniară vectorială 83

Scanned with OKEN Scanner

*§ 33. Biplanul 87
*§ 34. Biplane liniar dependente şi independente. Triedrul fundamental 91
*§ 35. Vectori contravarianţi şi covarianţi în spaţiul afin . 94.
Exerciţii 97

Cap. II **Mărimile şi operaţiile Algebrei vectoriale** 100

A. *Operaţii vectoriale în spaţiul euclidian* 100
§ 36. Mărimi fizice bidimensionale şi tridimensionale . 100
§ 37. Element plan orientat 101
§ 38. Bivector. Produs vectorial 103
*§ 39. Dublul strat şi vectorul covariant 105
*§ 40. Vectori normali reprezentativi ai mărimilor geometrico-fizice 107
§ 41. Adunarea bivectorilor 108
§ 42. Operatii vectoriale ireductibile 110
§ 43. Exemple de mărimi fizice bivectoriale 115
§ 44. Mărimi fizice vectoriale determinate de mărimi bivectoriale 117
§ 45. Componente ortogonale 120
*§ 46. Proiecţia ortogonală, ca produs de mărimi geometrice 123
§ 47. Produs scalar a doi vectori 125
§ 48. Aplicatii ale produsului scalar 128
§ 49. Vectori şi componente ortogonale 129
§ 50. Componente şi proiecţii ortogonale ale elementelor plane orientate 131
§ 51. Triedrul orientat. Trivectorul 134
§ 52. Produsul mixt 135
§ 53. Componentele scalare în raport cu un triedru oarecare 138
§ 54. Vectori reciproci şi triedre reciproce 140
§ 55. Dublul produs vectorial 143
§ 56. Aplicatii ale dublului produs vectorial 145
§ 57. Aplicatii ale produselor multiple 149
§ 58. Regula tetraedrului. Suprafeţe poliedrale orientate 151
Nota I. Formula de desvoltare a dublului produs vectorial 153
Nota II. Aplicatiile vectorilor reciproci în teoria structurii cristalelor 156
Exerciţii 160

*B. *Operaţii vectoriale în spaţiul afin* 166
*§ 59. Produse de mărimi geometrice şi fizice . . . 166
*§ 60. Produsul scalar în spaţiul afin 170
*§ 61. Produsul scalar ca operaţie cu mărimi geometrice . 176
*§ 62. Produsul mărimilor prin scalari sau pseudo-scalari 180
*§ 63. Produsul vectorial şi aria orientată 185
*§ 64. Aria orientată ca mărime pseudo-scalară . . . 191
*§ 65. Mărimi scalare şi pseudo-scalare. Unităţi fundamentale şi derivate 194
*§ 66. Produsul vectorial 196
*§ 67. Trivectorul. Volumul orientat 201
*§ 68. Produsul mixt 207
*§ 69. Produse exterioare. Multivectori 209
*§ 70. Bivectori şi vectori covarianti. Isomorfism . . 212
*§ 71. Vectori covarianţi şi contravarianţi. Isomorfism prin dualitate 216
*§ 72. Pseudo-scalari şi pseudo-vectori. Densităţi şi capacităţi 220
*§ 73. Calculul vectorial ca teorie de mărimi geometrico-fizice 224
Nota I. Mărimi duale. 227
Nota II. Dublul produs vectorial 236
Exerciţii 242

Scanned with OKEN Scanner

Cap. III. Măsura mărimilor în spaţiul metric euclidian . . . 244

A. *Sisteme de referinţă ortogonale. Măsura mărimilor fizice* . 244
§ 74. Măsura mărimilor 244
§ 75. Măsura mărimilor vectoriale. Criteriul măsurii . 248
§ 76. Metoda analitică şi triedrul fundamental . . 252
§ 77. Sisteme de referinţă carteziene ortogonale . . 253
§ 78. Componentele şi măsura mărimilor vectoriale. . 255
§ 79. Produsul scalar şi relaţiile metrice . . . 258
§ 80. Produsul vectorial şi bivectorul în coordonate carteziene ortogonale 260
§ 81. Produsul mixt în coordonate carteziene ortogonale 264
§ 82. Vectori şi sisteme carteziene ortogonale în plan . 266
§ 83. Complimentul unui vector în plan 269
§ 84. Vectorii din plan şi reprezentarea complexă . . 272
§ 85. Schimbarea sistemului de referinţă ortogonal . 275
§ 86. Definiţia analitică a vectorilor în spaţiul metric euclidian 278
§ 87. Vectori şi transformări liniare ortogonale . . 280
§ 88. Expresia vectorială a transformărilor ortogonale şi a schimbărilor de sisteme de referinţă carteziene ortogonale 284
§ 89. Invarianţa produselor scalare şi vectoriale în transformările ortogonale 287
§ 90. Rotaţia şi oglindirea 290
§ 91. Metode vectoriale în Geometria analitică . . . 294
§ 92. Planul definit prin trei puncte 297
§ 93. Forma normală a ecuaţiei planului 298
§ 94. Ecuaţia sferei. Ecuaţia cilindrului circular . . 9
Notă. Vectorii în plan şi fenomenele periodice . 1
Exerciţii 304

B. *Sisteme de referinţă oblice. Covarianţa şi contravarianţa mărimilor* 306
§ 95. Sisteme de unităţi vectoriale de dimensiuni diferite 5
§ 96. Componentele scalare într'un sistem cartezian general 310
§ 97. Baze reciproce în spaţiul metric euclidian . . 312
§ 98. Expresii vectoriale raportate la baze reciproce . 315
§ 99. Modulul vectorilor şi distanţa în coordonate oblice. Metrica spaţiului 319
§ 100. Notaţia tensorială 321
§ 101. Geometria analitică şi notaţia tensorială. Vectorul covariant 324
§ 102. Schimbarea sistemului de referinţă cartezian . 329
§ 103. Definiţia analitică a vectorilor contravarianţi şi covarianţi 333
§ 104. Transformările bazelor şi componentelor contravariante şi covariante 336
§ 105. Transformarea componentelor covariante şi contravariante şi invers 342
Exerciţii 346

Cap. IV. Mărimi tensoriale şi compuse în spaţiul afin . . . 350

*A. *Măsura mărimilor în spaţiul afin* 350
*§ 106. Baze reciproce în spaţiul afin 350
*§ 107. Mărimi raportate la baze reciproce în spaţiul afin 353
*§ 108. Schimbarea bazelor reciproce. Covarianţă şi contravarianţă în spaţiul afin 355
*§ 109. Densităţi şi capacităţi. Mărimi pseudo-scalare şi pseudo-vectoriale 357
*§ 110. Forme pătratice şi biliniare în spaţiul afin . . 362
*§ 111. Forme pătratice de vectori. Polaritate . . . 367

Scanned with OKEN Scanner

§ 112. Forme liniare de vectori. Structura formelor pătratice 370
§ 113. Descompunerea unei forme pătratice într'o sumă de pătrate 374
§ 114. Metoda tensorială 379
§ 115. Tensori de ordinul al doilea în spaţiul afin . . . 383
§ 116. Tensorul mixt 387
§ 117. Tensori antisimetrici şi forme exterioare de vectori 389
§ 118. Mărimile tensoriale ale Calculului vectorial . . 392
Exerciţii 396

B. *Vectori alunecători* 400
§ 119. Forţele ca mărimi vectoriale 400
§ 120. Caracterizarea vectorului alunecător 402
§ 121. Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct 403
§ 122. Coordonate vectoriale ale unui vector alunecător 405
§ 123. Comomentul a doi vectori alunecători 408
§ 124. Momentul unui vector alunecător în raport ca o axă 409
§ 125. Sisteme de vectori alunecători. Torsori . . . 410
§ 126. Torsorul 413
§ 127. Cuplul 416
§ 128. Automoment al unui torsor 417
§ 129. Momentul unui torsor în raport cu o axă. Funcţia caracteristică 418
§ 130. Funcţia caracteristică şi echivalenţa sistemelor . 419
§ 131. Reducerea sistemelor de vectori alunecători . . 422
§ 132. Reducere canonică. Axă centrală 425
§ 133. Torsori particulari 431
§ 134. Reducerea unui sistem de vectori alunecători la doi vectori alunecători şi dreptele de moment nul 432
§ 135. Vectori alunecători în spaţiul afin 435
§ 136. Torsorul şi noţiunea de câmp de mărimi . . . 437
§ 137. Coordonatele tetraedrice al vectorului alunecător . 440
§ 138. Coordonatele tetraedrice ale torsorilor 444
§ 139. Comomentul a două sisteme de vectori alunecători 448
Exerciţii 450

512.8

Responsabil de carte : Moscovici M.
Tehnoredactor : Kivu N.
Corector resp. : Perieţianu V.

Dat la cules 5.12.1953. Bun de tipar 23.1.1954. Hârtie Velină 70/100/16 65 g/m². Coli editoriale 37,70. Coli tipar 28,50. Preţul unui exemplar broşat lei 14,65, legat ½ în pânză lei 18,12. C-da 291 A.-A. 04574/1953
Pentru bibliotecile mici, indicele de clasificare 512.
Pentru bibliotecile mari, indicele de clasificare 512.9

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Timişoara, Str. Popa Şapcă 8. Timişoara — R. P. R.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAŞI

Scanned with OKEN Scanner

ERATA

Pagina	Rândul	In loc de:	Se va citi:	Din vina cui:
45	18	$k\bar{u}$	$k_2\bar{u}$	Tipografiei
47	12	$\bar{v}=\overline{vu}$	$\bar{v}=v\bar{u}$	„
119	10 jos	$\mid n \sin i \mid = \mid n' \sin i_1 \mid$	$\mid n \sin i \mid = \mid n' \sin i' \mid$	„
121	27	R	$\bar{R}$	„
129	29	$\bar{k}\times\bar{i}=J$	$\bar{k}\times\bar{i}=\bar{J}$	Redacției
130	15	$\bar{i}, j, \bar{k}$	$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	Tipografiei
144	2	$2(\bar{w}\times\bar{u})($	$(\bar{w}\times\bar{u})($	Redacției
150	25	$(\bar{A}\times\bar{B})=$	$(\bar{A}\times\bar{B})^2=$	„
150	1 jos	$=[\bar{B}(\bar{A}\bar{C}=\bar{c}(\bar{A}\bar{B})]^2=$	$=[\bar{B}(\bar{A}\bar{C})-\bar{c}(\bar{A}\bar{B})]^2=$	Tipografiei
154	17	$\bar{v}[(\bar{q}\bar{w}-\bar{w}(\bar{q}\bar{v})]=$	$\bar{v}(\bar{q}\bar{w})-\bar{w}(\bar{q}\bar{v})=$	Redacției
155	22	$r\bar{c}\times s(\bar{a}\times\bar{b})$	$r\bar{c}+s(\bar{a}\times\bar{b})$	Tipografiei
172	9	$=(\bar{u}\,\bar{p})$	$=(\bar{u}\,\bar{p}^1)$	„
184	24	$,\ldots lU$	$\ldots lU_q$	„
188	2	$\overline{AC}$	$\overline{CA}$	Redacției
230	18	$[(\bar{u}, \bar{v}', \bar{w}]$	$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$	Tipografiei
251	2	$\bar{v}+\bar{w}=$	$\bar{v}\times\bar{w}=$	Redacției

Metode vectoriale în fizica matematică I.

Scanned with OKEN Scanner